А. Д. Бендиков, И. В. Павлов, Винеровский процесс с отражением и гармонические функции с конечным интегралом энергии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1988, том 33, выпуск 3, 586–589

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС С ОТРАЖЕНИЕМ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ЭНЕРГИИ

БЕНДИКОВ А. Д., ПАВЛОВ И. В.

1. Введение. Пусть T — единичная окружность, а $T^\infty := T \times T \times \ldots$ — счетное декартово произведение таких окружностей (бесконечномерный тор). Положим $\mathfrak{A} := R^n \times T^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots): \quad x_1, \ldots, x_n \in R^1, \quad x_{n+1}, \ldots, \in T\}$, $\mathfrak{A}_+ := \{x \in \mathfrak{A}: x_1 > 0\}$, $\partial\mathfrak{A}_+ := \{x \in \mathfrak{A} : x_1 = 0\}$, $\overline{\mathfrak{A}}_+ := \mathfrak{A}_+ \cup \partial\mathfrak{A}_+$. В настоящей работе изучаются граничные значения гармонических на $\mathfrak{A}_+$ функций, принадлежащих расширенному пространству Дирихле винеровского процесса с отражением на $\overline{\mathfrak{A}}_+$. Эти гармонические функции составляют гильбертово пространство, которое мы обозначаем $\mathscr{H}_{W_e^1}$. Основной результат данной статьи таков: при $n \geqslant 3$ граничные (для функций из $\mathscr{H}_{W_e^1}$) функции образуют расширенное пространство Дирихле относительно процесса Коши на $\partial\mathfrak{A}_+$. Этот факт является бесконечномерной реализацией одной теоремы Сильверстейна (см. [1, теорема 5.5.1]) и обобщает реализацию для R^n, описанную в [1, пример 5.5.2]).

Результаты данной работы анонсированы в [2].

2. Определения и факты из теории пространств Дирихле. Пусть E — локально компактное сепарабельное хаусдорфово пространство и ν — плотная мера Радона на E. Положим $L_2 := L_2(E, \nu)$, $(u, v) := (u, v)_{L_2}$, $\| u \|_2 := \| u \|_{L_2}$ и обозначим $\mathbf{C}_0$ пространство непрерывных функций на E с компактными носителями.

Определение 1. Замкнутая неотрицательно определенная симметричная билинейная форма $\mathscr{E}$ на L_2 называется *регулярной формой Дирихле* с областью определения $\mathbf{D}[\mathscr{E}]$, если:

1) $\mathbf{D}[\mathscr{E}] \cap \mathbf{C}_0$ плотно в $\mathbf{C}_0$ в равномерной метрике и в $\mathbf{D}[\mathscr{E}]$ в метрике $\| u \|_* := \sqrt{\mathscr{E}(u) + \| u \|_2^2}$ (условие регулярности [1, с. 6]);

2) $\mathscr{E}$ — марковская (см. [1, с. 5]), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\varphi_\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, что $\varphi_\varepsilon(t) = t$, $t \in [0, 1]$; $-\varepsilon \leqslant \varphi_\varepsilon(t) \leqslant 1 + \varepsilon$, $t \in R$; $0 \leqslant \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(s) \leqslant t - s$, $t \geqslant s$;

$$u \in \mathbf{D}[\mathscr{E}] \Rightarrow \varphi_\varepsilon(u) \in \mathbf{D}[\mathscr{E}], \quad \mathscr{E}(\varphi_\varepsilon(u)) \leqslant \mathscr{E}(u).$$

Гильбертово пространство $(\mathscr{F}, \| \cdot \|_*)$, где $\mathscr{F} := \mathbf{D}[\mathscr{E}]$, называется при этом *пространством Дирихле*.

Пусть X — марковский процесс на E и (P_t)— его марковская полугруппа.

Теорема 1. 1) *Каждой регулярной форме Дирихле $\mathscr{E}$ можно сопоставить такой симметричный процесс Ханта X, что* $\mathscr{E}(u, v) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - P_t u, v)$, $u, v \in \mathbf{D}[\mathscr{E}]$ (*см.* [1, *теорема* 6.2.1]).

2) *Процесс X определяется формой $\mathscr{E}$ однозначно с точностью до эквивалентности* (*см.* [1, *теорема* 4.3.6]).

В дальнейшем будем придерживаться таких обозначений: N — множество натуральных чисел; dx — мера Хаара на $\mathfrak{A}$; $\partial/\partial x_k$ — производная по переменной x_k в смысле теории обобщенных функций; $\mathscr{L}(U)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $U \subset \mathfrak{A}$ с компактными носителями; (Q_t) — полугруппа Коши, ассоциированная с (P_t), т. е. $Q_t f = \int\limits_0^\infty (P_s f) h_t(s) ds$, где $h_t(s) = (4\pi)^{-1/2} t s^{-3/2} \exp(-t^2/(4s))$; $\mathscr{L}^{(\infty)}$ — множество бесконечномерных векторов $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ с целочисленными координатами, причем у каждого θ лишь конечное число координат отлично от нуля; $\hat{\mathfrak{A}} := R^n \times \mathscr{L}^{(\infty)}$ — двойственная к $\mathfrak{A}$ группа; $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u; $d\theta$ — мера Хаара на $\hat{\mathfrak{A}}$.

3. Примеры пространств Дирихле на $\mathfrak{A}$.

Пример 1 (пространство Дирихле винеровского процесса на $\mathfrak{A}$).

Пусть $E = \mathfrak{A}$ и $\nu = dx$. Положим

$$\mathscr{E}(u) := \int_{\mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 (x)\, dx,\ a_k > 0\ (k \in N);$$

$$\mathbf{D}[\mathscr{E}] := W_2^1 = \left\{u \in L_2 : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2\,(k \in N),\ \mathscr{E}(u) < \infty\right\}.$$

Стандартным образом проверяются следующие утверждения:

1) $\mathscr{E}$ — регулярная форма Дирихле.

2) Соответствующий (по теореме 1) форме $\mathscr{E}$ процесс Ханта X на $\mathfrak{A}$ есть диагональный винеровский процесс на $\mathfrak{A}$ (см. [3]), инфинитезимальный оператор которого имеет вид

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

3) Пусть $\psi(\theta) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \theta_k^2$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots) \in \hat{\mathfrak{A}}$. Тогда

$$\mathscr{E}(u) = \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \psi(\theta)\,|\hat{u}(\theta)|^2\, d\theta;$$

$$\mathbf{D}[\mathscr{E}] = \left\{u \in L_2 : \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \psi(\theta)\,|\hat{u}(\theta)|^2\, d\theta < \infty\right\}.$$

Пример 2 (пространство Дирихле пространства Коши на $\mathfrak{A}$).

Пусть Y — процесс Коши на $\mathfrak{A}$, т. е. марковский процесс на $\mathfrak{A}$, порожденный полугруппой (Q_t). Положим

$$\mathscr{E}_{1/2}(u) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - Q_t u, u);$$

$$\mathbf{D}[\mathscr{E}_{1/2}] := W_2^{1/2} = \left\{u \in L_2 : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - Q_t u, u) \text{ существует и конечен}\right\}.$$

Тогда $\mathscr{E}_{1/2}$ — регулярная форма Дирихле и имеют место соотношения:

$$\mathscr{E}_{1/2}(u) = \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \sqrt{\psi(\theta)}\,|\hat{u}(\theta)|^2\, d\theta;$$

$$\mathbf{D}[\mathscr{E}_{1/2}] = \left\{u \in L_2 : \int_{\hat{\mathfrak{A}}} \sqrt{\psi(\theta)}\,|\hat{u}(\theta)|^2\, d\theta < \infty\right\}.$$

Пример 3 (пространство Дирихле винеровского процесса с отражением в $\overline{\mathfrak{A}}_+$). Пусть $E = \mathfrak{A}_+$, $\nu = dx$. Положим

$$\mathscr{E}^+(u) := \int_{\mathfrak{A}_+} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx;$$

$$\mathbf{D}[\mathscr{E}^+] := W_2^1(\mathfrak{A}_+) = \left\{u \in L_2 : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2\,(k \in N),\ \mathscr{E}^+(u) < \infty\right\}.$$

Опять стандартно проверяется, что форма $\mathscr{E}^+$ симметрична, неотрицательно определенна и замкнута. Вместе с тем условие регулярности (п. 1 определения 1), как легко видеть, нарушается. Однако условие регулярности будет выполняться, если рассматривать $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$ относительно $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_+, dx)$. Действительно, множество цилиндрических функций из $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$ плотно в $W_2^1(\mathfrak{A}_+)$, а каждую такую цилиндрическую функцию можно приблизить следами на $\overline{\mathfrak{A}}_+$ функций из $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ в метрике $\|\cdot\|_*^+ := (\mathscr{E}^+(\cdot) + \|\cdot\|^2_{L_2(\mathfrak{A}_+)})^{1/2}$ (см. [4, предложение 3.4]).

Пусть X — винеровский процесс на $\mathfrak{A}$ (см. пример 1), а $\tilde{X}$ — процесс на $\overline{\mathfrak{A}}_+$, полученный из X отражением от $\partial\mathfrak{A}_+$. Так же, как в [1, пример 4.4.2], доказывается, что $(W_2^1(\mathfrak{A}_+), \mathscr{E}^+)$ — пространство Дирихле процесса $\tilde{X}$.

П р и м е р 4 (пространство Дирихле части винеровского процесса в $\mathfrak{A}_+$). Обозначим $W^1_{2,0}(\mathfrak{A}_+)$ подпространство гильбертова пространства $(W^1_2(\mathfrak{A}_+), \|\cdot\|^+_*)$, полученное замыканием множества $\mathscr{L}(\mathfrak{A}_+)$ в метрике $\|\cdot\|^+_*$. Согласно [1, теорема 4.4.2], $(W^1_{2,0}(\mathfrak{A}_+), \mathscr{E}^+)$ — пространство Дирихле части процесса X на множестве $\mathfrak{A}_+$.

4. Расширенные пространства Дирихле для невозвратных процессов. В следующем определении среди пространств Дирихле $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$ на $L_2(E)$ выделяются те, для которых $(\mathscr{F}, \sqrt{\mathscr{E}})$ — предгильбертово пространство.

О п р е д е л е н и е 2. Пространство Дирихле $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$ называется *невозвратным*, если существует такая функция $g \in L_1 \cap L_\infty$, $g > 0$ (ν-п. в.), что $(|u|, g) \leqslant \sqrt{\mathscr{E}(u)}$ для любой $u \in \mathscr{F}$ (см. [1, (1.5.6)]). Процесс X называется *невозвратным*, если $Gf: = \int\limits_0^\infty P_t f dt < \infty$ (ν-п. в.) для любой неотрицательной $f \in L_1$ (см. [1, (1.5.4)]).

Теорема 2. *Пусть пространство Дирихле* $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$ *соответствует процессу* X *по теореме* 1. *Тогда* $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$ *невозвратно в том и только том случае, если процесс* X *невозвратен* (*см.* [1, *теорема* 1.5.1]).

Пусть снова X (соответственно Y) — винеровский процесс (процесс Коши) на $\mathfrak{A}$. Согласно [5, 13.27], невозвратность процесса X (Y) эквивалентна тому, что функция $1/\psi(\theta)$ $(1/\sqrt{\psi(\theta)})$ лежит в $L_{1,\mathrm{loc}}(\hat{\mathfrak{A}}, d\theta)$. Отсюда следует, что X (Y) невозвратен тогда и только тогда, когда $n \geqslant 3$ ($n \geqslant 2$). Обозначим через W^1_e (соответственно $W^{1/2}_e$) пополнение невозвратного пространства $(W^1_2, \mathscr{E})$ (соответственно $(W^{1/2}_2, \mathscr{E}_{1/2})$) по метрике $\sqrt{\mathscr{E}}$ $(\sqrt{\mathscr{E}_{1/2}})$. Получаем, что W^1_e $(W^{1/2}_e)$ — гильбертово пространство, являющееся расширенным пространством Дирихле процесса X (Y) (см. [1, § 1.5]). Используя стандартную технику преобразования Фурье обобщенных функций (см. [6, введение и гл. VI]), а также [1, теорема 1.5.4] имеем:

1) $W^1_e = \{u \in L_{1,\mathrm{loc}}$: u есть обобщенная функция медленного роста и $\hat{u} \in L_2(\hat{\mathfrak{A}}, \psi\, d\theta)\}$;

2) $$W^1_e \subset \left\{u \in L_{1,\mathrm{loc}}: \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2\,(k \in N), \int\limits_{\mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx < \infty\right\};$$

3) $W^{1/2}_e = \{u \in L_{1,\mathrm{loc}}$: u есть обобщенная функция медленного роста и $\hat{u} \in L_2(\hat{\mathfrak{A}}, \sqrt{\psi} d\theta)\}$.

5. Гармонические функции класса $\mathscr{H}_{W^1_e}$. Пусть $\mathfrak{A} = R^n \times T^\infty$ ($n \geqslant 3$) и $(W^1_2(\mathfrak{A}_+, \|\cdot\|^+_*)$ — пространство Дирихле винеровского процесса с отражением на $\overline{\mathfrak{A}}_+$ (пример 3)). Из невозвратности винеровского процесса на $\mathfrak{A}$ следует невозвратность винеровского процесса с отражением, поэтому $(W^1_2(\mathfrak{A}_+), \|\cdot\|^+_*)$ — невозвратное пространство Дирихле. Обозначим через $W^1_e(\mathfrak{A}_+)$ и $W^1_{e,0}(\mathfrak{A}_+)$ пополнение $W^1_2(\mathfrak{A}_+)$ и $W^1_{2,0}(\mathfrak{A}_+)$ по метрике $\sqrt{\mathscr{E}^+}$ и запишем ортогональное разложение

$$W^1_e(\mathfrak{A}_+) = W^1_{e,0}(\mathfrak{A}_+) \oplus \mathscr{H}_{W^1_e}.$$

Для удобства будем считать, что в последовательности $\{a_k\}$, определяющей форму $\mathscr{E}^+$, $a_1 = 1$. В этом случае процесс X представляется в виде прямого произведения $X = (Z, X^\partial)$, где Z — стандартный винеровский процесс на R^1, а X^∂ — винеровский процесс на $\partial\mathfrak{A}_+ \simeq R^{n-1} \times T^\infty$. В дальнейшем элементы $x \in \mathfrak{A}$ будем записывать в виде $x = (t, y)$, где $t = x_1 \in R^1$, $y = (x_2, x_3, \ldots) \in R^{n-1} \times T^\infty$.

Теорема 3. 1) *Пространство* $\mathscr{H}_{W^1_e}$ *состоит из гармонических в обобщенном смысле функций на* $\mathfrak{A}_+$.

2) *Гильбертово пространство* $(\mathscr{H}_{W^1_e}, \sqrt{\mathscr{E}^+})$ *унитарно эквивалентно расширенному пространству Дирихле* $(\mathscr{F}^\partial_e, \mathscr{E}^\partial)$ *процесса Коши* Y^∂, *ассоциированного с процессом* X^∂ *на* $\partial\mathfrak{A}_+$:

$$(\mathscr{H}_{W^1_e}, \sqrt{\mathscr{E}^+}) \underset{Q}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} (\mathscr{F}^\partial_e, \mathscr{E}^\partial),$$

где $\gamma f = f|_{\partial \mathfrak{A}_+}$ — *оператор следа и* $Qf(t, y) = Q_t f(y)$ — *интеграл Пуассона (здесь* (Q_t) — *полугруппа процесса* Y^∂).

Доказательство. 1) Заметим, что как и в случае W_e^1, имеет место вложение $W_e^1(\mathfrak{A}_+) \subset \{u \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathfrak{A}_+)\colon \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\mathfrak{A}_+),\ \mathscr{E}^+(u) < \infty\}$. Пусть теперь $\varphi \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}_+)$. Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}_+)$ и для любой функции $u \in \mathscr{H}_{W_e^1}$ $(u, \Delta\varphi) = -\mathscr{E}^+(u, \varphi) = 0$, что и означает гармоничность в обобщенном смысле.

2) Для функции $u \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$ легко устанавливается неравенство $\|u(0, \cdot)\|_{L_2(\partial\mathfrak{A}_+)} \leqslant c\|u\|_*^+$. Записав его для $u_\tau(t, y) = u(t+\tau, y)$ и учитывая, что $\|u_\tau\|_*^+ \leqslant \|u\|_*^+$, получим: $\sup\limits_{t>0}\|u(t, \cdot)\|_{L_2(\partial\mathfrak{A}_+)} \leqslant c\|u\|_*^+$. После предельного перехода в этом неравенстве получаем аналогичное неравенство для функций из $\mathscr{H}_{W_e^1} \cap L_2(\mathfrak{A}_+)$, но с заменой $\sup\limits_{t>0}$ на $\operatorname{ess\,sup}\limits_{t>0}$. Поэтому (см. [7]) dy-п.в. существует предел $\lim\limits_{t\to 0} u(t, y) := \gamma u(y) \in L_2(\partial\mathfrak{A}_+)$ и $u(t, y) = Q_t\gamma u(y)$. Для $u \in \mathscr{H}_{W_e^1} \cap L_2(\mathfrak{A}_+)$ прямыми вычислениями получаем равенство $\mathscr{E}^+(u) = \mathscr{E}^\partial(\gamma u)$. Так как $\mathscr{H}_{W_e^1} \cap L_2(\mathfrak{A}_+)$ плотно в $\mathscr{H}_{W_e^1}$, то из этого равенства следует, что γ — изометрия $\mathscr{H}_{W_e^1}$ в $\mathscr{F}_e^\partial$. С другой стороны, для любой функции $\varphi \in \mathscr{L}(\partial\mathfrak{A}_+)$ функция $u(t, y) = (Q_t\varphi(y)$ лежит в $\mathscr{H}_{W_e^1}$ и $\gamma u = \varphi$. Поскольку $\mathscr{L}(\partial\mathfrak{A}_+)$ плотно в $\mathscr{F}_e^\partial$, то $\gamma\mathscr{H}_{W_e^1} = \mathscr{F}_e^\partial$. Теорема доказана.

Замечание. Для функции $u \in \mathscr{H}_{W_e^1}$ положим $\tilde{u}(t, y) = u(|t|, y)$, $t \in R^1$. Можно показать, что $\tilde{u} \in W_e^1$, причем $\mathscr{E}(\tilde{u}) = c\mathscr{E}^+(u)$. Отсюда следует, что $W_e^1(\mathfrak{A}_+)$ изометрично вкладывается в W_e^1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fukushima M.* Dirichlet Forms and Markov Processes. Amsterdam etc.: North-Holland/Elsevier, 1980, 196 p.
2. *Бендиков А. Д., Павлов И. В.* Винеровский процесс с отражением и гармонические функции с конечным интегралом энергии.— В сб.: XX школа-коллоквиум по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. / Под ред. Г. Н. Кинкладзе. Тбилиси: Мецниереба, 1986, с. 6.
3. *Бендиков А. Д.* О гармонических структурах, порожденных тепловым винеровским процессом на группе.— Успехи матем. наук, 1979, т. XXXIV, в. 1 (205), с. 217—218.
4. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977, 504 с.
5. *Berg Ch., Forst G.* Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups. Berlin — Heidelberg etc.: Springer, 1975, 197 S.
6. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966, 516 с.
7. *Бендиков А. Д., Павлов И. В.* Лемма Вейля для винеровского процесса на торе и характеризация интеграла Пуассона. В сб.: Случайный анализ и асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики./Под ред. Г. М. Мания, Н. Л. Лазриевой, Т. Л. Шервашидзе. Тбилиси: Мецниереба, 1984, 128 с.

Поступила в редакцию
14.V.1986