© 1990 г.

Н.Л.Гордеев

КОРАНГИ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП И СЛОЖНОСТЬ АЛГЕБР ИНВАРИАНТОВ

Корангом линейного оператора здесь называется коразмерность подпространства инвариантных векторов. В работе рассматриваются некоторые классы линейных групп, содержащие элементы малого (в сравнении с размерностью основного линейного пространства) коранга. Также рассматривается связь между минимумом корангов неединичных элементов линейной группы и коразмерностью ее алгебры инвариантов.

Корангом линейного оператора h, действующего в конечномерном линейном пространстве V, мы называем ранг оператора $h-1$. Классом линейной группы $G \le \mathrm{GL}(V)$ называем минимум корангов ее неединичных элементов и обозначаем $\mathrm{cl}(G)$. Класс линейной группы - это аналог понятия класса конечной группы подстановок, который определяется как минимально возможное число нестационарных элементов для нетождественных подстановок данной группы. Для группы $G \le \mathrm{GL}(V)$ вводится (см. §2) и понятие проективного класса (обозначается $\mathrm{pr.cl}(G)$), которое является естественным аналогом класса для образа группы G в $\mathrm{PGL}(V)$. Всегда

$$\mathrm{pr.cl}\ (G) \le \mathrm{cl}(G).$$

Интерес к понятию класса вызван следующими обстоятельствами. Теорема Жордана (см. [1]) утверждает, что транзитивная примитивная группа подстановок конечного множества X, класс которой достаточно мал по сравнению с $|X|$, является симметрической или знакопеременной группой подстановок данного множества X. Далее, пусть $G \le \mathrm{GL}_n(C)$ - конечная неприводимая примитивная группа. Если G содержит матрицу, у которой не более двух неединичных собственных значений (т.е. $\mathrm{cl}(G) \le 2$) и $n > 10$, то $A_{n+1} \lhd G \lhd C^* S_{n+1}$, где A_{n+1}, $S_{n+1} \le \mathrm{GL}_n(C)$ - образы знакопеременной и симметрической группы в стандартном неприводимом представлении (см. [2]). Эффект стабилизации имеет место и для простых алгебр Ли (см. [3]): простая неприводимая алгебра Ли $g \subset \mathrm{End}V$ (над полем C), содержащая оператор достаточно малого ранга (в сравнении с $\dim V$), - это $\mathrm{sl}(V)$, $\mathrm{so}(V)$ или $\mathrm{sp}(V)$.

Естественным шагом был бы перенос теоремы Жордана на случай конечных линейных групп. В этой работе это проделано для групп, у которых простые нециклические факторы композиционного ряда - это знакопеременные группы, группы типа Ли или

Ключевые слова: линейная группа, коразмерность алгебры инвариантов.

простые группы из какого-либо конечного списка. Такие группы мы называем известными. (Если считать законченной классификацию простых конечных групп, то любая конечная группа является известной).

Теорема 1. *Пусть* $G \le \mathrm{GL}_n(K)$ *– известная конечная линейная группа над алгебраически замкнутым полем* K *нулевой характеристики. Если* G *– неприводима, квазипримитивна и* $\mathrm{pr.cl}(G) \ll n$, *то* $\mathrm{pr.cl}(G)=\mathrm{cl}(G)$ *или* $\mathrm{pr.cl}(G)=\frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(G)$ *и*

$$A_m \otimes G_1 \lhd G \lhd S_m \otimes G_2,$$

где $G_1 \le G_2 \le \mathrm{GL}_s(K)$; $(m-1)\cdot s=n$, $s=\mathrm{cl}(G)$ *или* $s=\frac{1}{2}\mathrm{cl}(G)$; $[G_2:G_1] \le 2$.

(Выражение $x \ll y$ означает, что для любого фиксированного значения x рассматриваются лишь те значения y, которые больше некоторой границы, зависящей от данного значения x. Квазипримитивная линейная группа – это такая, у которой ограничение на любой нормальный делитель либо неприводимо, либо является суммой эквивалентных неприводимых представлений. Любая примитивная группа является также квазипримитивной).

Следствие. *Пусть* G *– группа, удовлетворяющая условиям теоремы* 1. *Если* G *порождается элементами малого (в сравнении с* n*) коранга, то* $G=A_{n+1}$ *или* S_{n+1}.

(Теорема 1 и следствие были анонсированы в [4]).

Кроме вопросов, связанных с поведением класса линейных групп, в этой работе рассматривается связь между классом линейной группы и коразмерностью ее алгебры инвариантов (см. п. 4.1). Доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $G \le \mathrm{GL}(V)$ *– известная конечная группа,* $R=K[V]^G$ *– алгебра инвариантов. Если* G *– неприводима, квазипримитивна и* $\mathrm{codim}\, R \ll n=\dim V$, *то* $G=A_{n+1}$ *или* S_{n+1}.

Теорема 3. *Пусть* $G \le \mathrm{GL}(V)$ *– полупростая алгебраическая группа (здесь* V *– конечномерный рациональный* G*-модуль);* $R=K[V]^G$*– алгебра инвариантов. Тогда*

1) $\mathrm{codim}\, R \ge \dfrac{\mathrm{cl}G}{d(G)} - 2\dim G-1$;

2) $\mathrm{codim}\, R \ge \dfrac{\sqrt{\dim V}}{12[G:G^0]\,|Z(G^0)|\,rd(G)} - 2\dim G-1$, *если* $V^G=0$;

$$\left.\begin{array}{ll} 3)\ \mathrm{codim}\, R \ge \dfrac{\dim V}{12[G:G^0]rd(G)} - 2\dim G-1, & \\ 4)\ \mathrm{codim}\, R \ge \dfrac{\sqrt{\dim V}}{34[G:G^0]d(G)} - 2\dim(G)-1, & \end{array}\right\}\ \textit{если } V \textit{ – неприводимый } G\text{-модуль.}$$

Здесь $d(G)$ – порядок некоторого элемента в группе Вейля группы G, r – ранг G $(r>0)$, G^0 – связная компонента единицы группы G. Основное поле K в обеих теоремах имеет нулевую характеристику и является алгебраически замкнутым.

Следует отметить, что, хотя неравенства 2), 3), 4) теоремы 3 не связаны явно с классом группы G, получены они при помощи оценок снизу на класс полупростой

алгебраической группы, вытекающих из оценок Ю.Г.Зархина (см.[5]) на ранги операторов простых алгебр Ли.

Из неравенства 2) следует теорема В.Л.Попова (см.[6]) о конечности числа G-модулей (с точностью до изоморфизма и прибавления тривиального слагаемого), алгебра инвариантов которых имеет фиксированную гомологическую размерность.

Коразмерность алгебр - это один из показателей сложности их строения. Полученные результаты, таким образом, показывают, что сложность алгебр инвариантов возрастает с ростом класса, который в свою очередь растет с ростом размерности пространства представления. Эти результаты примыкают к результатам работ [6-11], в которых рассматривается поведение сложности алгебр инвариантов различных классов линейных групп. Оценки, полученные в данной работе, по-видимому, можно усилить. Здесь мы ставили задачу лишь продемонстрировать возможность получения оценок такого рода.

Содержание работы. Терминология. Обозначения

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 вводится понятие коранга линейного оператора и его проективного аналога, приводятся некоторые элементарные оценки корангов. В § 2 вводятся понятия класса и проективного класса линейной группы, рассматриваются простейшие свойства класса. В § 3 доказывается теорема о строении конечной (известной) неприводимой квазипримитивной линейной группы, у которой проективный класс достаточно мал в сравнении с размерностью основного пространства. В § 4 доказываются результаты, связывающие коразмерность алгебр инвариантов полупростых алгебраических групп (в том числе и конечных) с их классом и размерностью пространства представления.

В работе принимаются следующие соглашения.

Будем говорить, что некоторая величина x достаточно мала по сравнению с некоторой величиной y, и писать $x<<y$, предполагая лишь, что $y>y_0=y_0(x)$; значение $y_0=y_0(x)$ может вытекать из контекста или быть неопределенным (в последнем случае выражение $x<<y$ означает, что мы рассматриваем для любого фиксированного значения x лишь те значения y, которые больше некоторой границы, зависящей от данного значения x). Как правило, y будет размерностью линейного пространства, а x - корангом линейного оператора или классом линейной группы, действующих в этом пространстве. Выражения вида "оператор малого коранга", "группа малого класса" будут означать, что соответствующий коранг или класс малы по сравнению с размерностью пространства, в котором действует данный оператор или группа.

Пусть $A(x,y)$ - некоторое утверждение, зависящее от двух параметров x,y. Импликация

$$x << y \Rightarrow A(x,y) \qquad (*)$$

будет означать, что для любого значения $x = x_0$ найдется такое значение $y = y_0=y_0(x_0)$, что утверждение $A(x_0,y')$ истинно при любом значении $y = y'>y_0$.

Пусть $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ - две функции, удовлетворяющие следующим условиям: для любого x_0 значения функции $f_1(x_0,y)$ ограничены, а $f_2(x_0,y)\longrightarrow\infty$ при $y\longrightarrow\infty$. В этом случае будем считать, что из $x<<y$ следует $f_1(x,y)<<f_2(x,y)$. (Действительно, увеличивая y при фиксированном x, можно добиться, чтобы значения $f_2(x,y)$ были достаточно большими относительно границы для значений $f_1(x,y)$).

В этой работе K - алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Скалярные матрицы отождествляются с элементами из $K^*=K\setminus\{0\}$. Единица любой группы обозначается символом 1. Для линейных групп $G_1 \le \mathrm{GL}(V_1)$, $G_2 \le \mathrm{GL}(V_2)$ через $G_1\otimes G_2$ будем обозначать естественный образ группы $G_1\times G_2$ в $\mathrm{GL}(V_1\otimes V_2)$. Символами S_n и A_n мы обозначаем симметрическую и знакопеременную группу, когда речь идет об абстрактных группах или группах подстановок. Если речь идет о линейных группах, то символы S_n и A_n будут обозначать образы в $\mathrm{GL}_{n-1}(K)$ стандартного неприводимого представления симметрической и знакопеременной группы (соответствующего диаграмме $(n-1,1)$). Термины "неприводимость", "примитивность", "квазипримитивность", "импримитивность", используемые в теории линейных групп, здесь имеют свое обычное значение.

Алгебраическую группу будем называть полупростой, если тривиален ее радикал (не требуется, чтобы она была связной). Простые алгебраические группы предполагаются связными. Условие, что группа $G\le\mathrm{GL}(V)$ является алгебраической, означает, что G - образ рационального представления некоторой алгебраической группы.

Символы $Z(G)$, $C_G(H)$ обозначают центр группы G и централизатор в G подгруппы H; $O_p(G)$ - максимальный нормальный делитель группы G, порядок которого есть степень простого числа p. Группу G мы называем квазипростой, если $G/Z(G)$ - некоммутативная простая группа.

Остальные термины и символы являются общепринятыми или определяются в тексте.

§ 1. Коранги линейных групп и линейных операторов

1.1. Пусть V - конечномерное линейное пространство над полем K, $H \le \mathrm{GL}(V)$ - линейная группа, $\varphi: H\longrightarrow K^*$ - некоторый одномерный характер группы H. Пусть, далее, $V_\varphi=\{v\in V \mid h(v)=\varphi(h)v$ для всех $h\in H\}$; число $\dim V-\dim V_\varphi$ будем называть φ-корангом группы H и обозначать $r_\varphi(H)$. Корангом группы H будем называть число $\dim V-\dim V^H$ и обозначать $r(H)$ (таким образом, $r(H)=r_\varphi(H)$ при $\varphi=1$). Корангом $r(h)$ и φ-корангом $r_\varphi(h)$ линейного оператора $h\in\mathrm{GL}(V)$ будем называть коранг и φ-коранг группы $H=\langle h\rangle$. Размерность пространства V_φ будем обозначать $\bar r_\varphi(H)$. Таким образом, $\bar r(H)=\dim V^H$.

1.2. Пусть $H=\langle H_1,\dots,H_l\rangle$, где $H_i\le\mathrm{GL}(V)$; $\varphi_i: H_i\longrightarrow K^*$ - одномерные характеры. Неравенство

$$\dim V - \dim \bigcap_i V_{\varphi_i} \le \sum_{i=1}^{l} (\dim V - \dim V_{\varphi_i})$$

влечет неравенство

$$r_\varphi(H) \le \sum_{i=1}^{l} r_{\varphi_i}(H) \tag{1.1}$$

в случае, когда существует одномерный характер $\varphi: H \longrightarrow K^*$, являющийся продолжением характеров φ_i, поскольку $V_\varphi = \bigcap_i V_{\varphi_i}$. Если такого характера φ не существует или $V_\varphi = 0$, то

$$\dim V \le \sum_{i=1}^{l} r_{\varphi_i}(H_i). \tag{1.2}$$

1.3. Пусть $H_i = \langle h_i \rangle$ и характеры φ_i не продолжаются до некоторого характера φ группы $H = \langle h_1, \ldots, h_l \rangle$ или $V_\varphi = 0$. Предположим также, что $r_{\varphi_i}(h_i) = r$ для любого i. Тогда из (1.2) получим неравенство

$$r \ge (\dim V)/l. \tag{1.3}$$

1.4. Пусть $H = \langle h \rangle$ и $h = h_1 h_2$. Пусть, далее, φ, φ_1, φ_2 - какие-либо одномерные характеры групп H, $\langle h_1 \rangle$, $\langle h_2 \rangle$, удовлетворяющие условию $\varphi(h) = \varphi_1(h)\varphi_2(h)$. Из включения $V_{\varphi_1} \cap V_{\varphi_2} \subset V_\varphi$ получаем неравенство

$$r_\varphi \le r_{\varphi_1}(h_1) + r_{\varphi_2}(h_2), \tag{1.4}$$

которое в случае $\varphi = 1$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$ принимает вид

$$r(h) \le r(h_1) + r(h_2). \tag{1.4'}$$

1.5. Пусть теперь $h = [h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$; φ_1, φ_2 - произвольные одномерные характеры групп $\langle h_1 \rangle$, $\langle h_2 \rangle$. Представляя h как произведение $(h_1 h_2 h_1^{-1}) h_2^{-1}$ или как произведение $h_1 (h_2 h_1^{-1} h_2^{-1})$ и используя неравенство (1.4), получим

$$r(h) \le 2 \min \left\{ r_{\varphi_1}(h_1),\ r_{\varphi_2}(h_2) \right\}. \tag{1.5}$$

§ 2. Классы линейных групп

2.1. Для конечной группы подстановок G множества X ее классом называется число $\min\{|X \setminus X^\sigma| \mid \sigma \in G,\ \sigma \ne 1\}$. Следуя этой терминологии, классом линейной группы $G \le GL(V)$ будем называть число

$$cl(G) = \min\{r(\sigma) \mid \sigma \in G,\ \sigma \ne 1\}.$$

Пусть Φ - множество всех одномерных характеров всех циклических подгрупп группы G. Число

$$\min\{r_\varphi(\sigma) \mid \sigma \in G,\ \sigma \notin K^*;\ \varphi \in \Phi\}$$

будем называть проективным классом группы G и обозначать $pr.cl(G)$.

Из определений следует, что $pr.cl(G) \le cl(G)$ и

$$pr.cl(G) = pr.cl(K^* G) = cl(K^* G). \tag{2.1}$$

Ниже, если мы рассматриваем класс (проективный класс) некоторой группы $G \le GL_n(K)$, то предполагаем, что $G \ne 1$ (соответственно $G \not\subseteq K^*$).

2.2. Рассмотрим простейшие свойства проективного класса, связанные с нормальным строением линейных групп.

Предложение 1. *Пусть* $G_1 \le GL_n(K)$, $G_2 \le GL_m(K)$, $G=G_1 \otimes G_2 \le GL_{nm}(K)$. *Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(G) = \min\{m \cdot \mathrm{pr.cl}(G_1),\ \ n \cdot \mathrm{pr.cl}(G_2)\}.$$

Доказательство. Доказательство следующего утверждения - несложное упражнение по линейной алгебре.

Лемма 1. *Пусть* $\sigma_1 \in GL_n(K)$, $\sigma_2 \in GL_m(K)$; $\sigma_1, \sigma_2 \notin K^*$. *Тогда* $r(\sigma_1 \otimes \sigma_2) \ge m \cdot \mathrm{pr.cl}(\langle\sigma_1\rangle)$, $r(\sigma_1 \otimes \sigma_2) \ge n \cdot \mathrm{pr.cl}(\langle\sigma_2\rangle)$.

Из леммы 1 следует, что $\mathrm{cl}(K^*G) \ge \min\{m \cdot \mathrm{cl}(K^*G_1),\ n \cdot \mathrm{cl}(K^*G_2)\}$. С другой стороны, $r(\gamma_1 \otimes 1) = mr(\gamma_1)$, $r(1 \otimes \gamma_2) = nr(\gamma_2)$ для любых $\gamma_1 \in K^*G_1$, $\gamma_2 \in K^*G_2$. Поэтому $\mathrm{cl}(K^*G) = \min\{m \cdot \mathrm{cl}(K^*G_1),\ n \cdot \mathrm{cl}(K^*G_2)\}$. Утверждение предложения 1 следует теперь из равенства (2.1). ●

Следствие 1. *Пусть* $G=G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k \le GL_n(K)$, *где* $G_i \le GL_{n_i}(K)$ *для* $i=1,\ldots,k$. *Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(G) = \min\left\{\frac{n}{n_i} \cdot \mathrm{pr.cl}(G_i)\right\}.$$

Доказательство очевидно. ●

Предложение 2. *Пусть* $H \lhd G \le GL(V)$ *и* $C_G(H) \le K^*H$. *Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(G) \ge \min\left\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cl}(H),\ \mathrm{pr.cl}(H)\right\}.$$

Если $C_G(H) \subset H \cup K^*$, *то* $\mathrm{cl}(G) \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(H)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{pr.cl}(G)=r_\varphi(\sigma)$ (или $\mathrm{cl}(G)=r(\sigma)$). Если $\sigma \notin C_G(H)$, то $[\sigma,h] \ne 1$ для некоторого $h \in H$. Из (1.5) следует $\mathrm{pr.cl}(G) = r_\varphi(\sigma) \ge \frac{1}{2} r([\sigma,h]) \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(H)$ (соответственно $\mathrm{cl}(G) \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{cl}(H)$). Если $\sigma \in C_G(H)$, то $\sigma \in K^*H$ (или $\sigma \in H \cup K^*$). В этом случае $\mathrm{pr.cl}(G)=\mathrm{pr.cl}(H)$ (соответственно $\mathrm{cl}(G)=\mathrm{cl}(H)$). ●

Следствие 2. *Пусть* $H \lhd G \le GL(V)$ *и* V *- неприводимый* H*-модуль. Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(G) \ge \min\left\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cl}(H),\ \mathrm{pr.cl}(H)\right\},\ \ \mathrm{cl}(G) \ge \tfrac{1}{2}\,\mathrm{cl}(H).$$

Доказательство следует из леммы Шура и предложения 2. ●

Предложение 3. *Пусть* $H \lhd G \le GL(V)$, $H \not\le Z(G)$ *и* V *- неприводимый* G*-модуль. Предположим, что число элементов любой минимальной системы образующих любой подгруппы* $F \le H$ *не превосходит фиксированного числа* g. *Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(H) \ge (\dim V)/g.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{pr.cl}(H)=r_\varphi(h)$ для некоторых h и φ. Пусть, далее, F - нормальный делитель группы G, порожденной классом сопряженных с h элементов; $h_1,\ldots,h_l$ - некоторая минимальная система образующих группы F, содержащаяся в данном классе сопряженных элементов; $\varphi_i : \langle h_i\rangle \longrightarrow K^*$ - одномерные характеры групп $\langle h_i\rangle$, определенные формулой $\varphi_i(h_i)=\varphi(h)$. Так как $\mathrm{pr.cl}(H)=r_\varphi(h)$, то h не может быть скалярной матрицей. Поэтому ввиду теоремы Клиффорда (см. [12],

§ 49) не существует такого вектора $v\in V$, $v\neq 0$, что $h_i(v)=\varphi_i(h_i)v$ для всех $i=1,\dots,l$. Следовательно, можно воспользоваться неравенством (1.3), из которого получим $r_\varphi(h)\geq(\dim V)/l$. Требуемое неравенство вытекает теперь из условия $l\leq g$. ●

2.3. Импримитивные группы. Пусть $G\leq GL(V)$ - неприводимая импримитивная линейная группа. Зафиксируем некоторую систему импримитивности $\{V_i\}_{i=1}^n$ такую, что образ естественного гомоморфизма

$$\alpha : G \longrightarrow S_n$$

является примитивной группой подстановок. Для любой подстановки $\gamma\in S_n$ через $t(\gamma)$ обозначим число $n-|\{1,\dots,n\}^\gamma|$ нестационарных элементов. Для любого элемента $\sigma\in G$, $\sigma\notin \mathrm{Ker}\alpha$ и любого одномерного характера $\varphi:\langle\sigma\rangle\longrightarrow K^*$ имеет место очевидное неравенство

$$r_\varphi(\sigma) \geq \frac{1}{2}\, t\,(\alpha(\sigma))\cdot \dim V_1. \tag{2.2}$$

Согласно теореме Жордана ([1], с. 43), существует неубывающая функция $f:N\longrightarrow N$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\infty$, и $t(\gamma)\geq f(n)$ для любой неединичной подстановки γ, принадлежащей транзитивной примитивной группе подстановок $\Gamma\leq S_n$, если $\Gamma\neq S_n$, A_n. Поэтому если $\alpha(G)\neq S_n, A_n$, то из (2.2) следует

$$r_\varphi(\sigma) \geq \frac{1}{2}\, f\,(\dim V/\dim V_1)\cdot \dim V_1 \tag{2.3}$$

для любого элемента $\sigma\in G$ такого, что $\alpha(\sigma)\neq 1$, и любого одномерного характера φ группы $\langle\sigma\rangle$.

Из определения функции f следует, что $f(l)\leq l$ для любого натурального l. Поэтому для любых натуральных $n\geq m$ имеет место неравенство $f([n/m])\cdot m\geq f([\sqrt{n}])$. Таким образом, (2.3) можно заменить на неравенство

$$r_\varphi(\sigma) \geq \frac{1}{2}\, f\left(\left[\sqrt{\dim V}\right]\right). \tag{2.4}$$

Из (2.4), в частности, следует, что $\alpha(G)=S_n$ или A_n, если в группе G есть элемент малого φ-коранга, образ которого в группе $\alpha(G)$ есть неединичная подстановка.

П р е д л о ж е н и е 4. *Предположим, что G - алгебраическая группа, порожденная элементами малого φ-коранга. Тогда* $\dim V_i \ll \dim V$ *и существует подгруппа H группы G, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $H\approx A_n$;

2. *группа H действует как группа подстановок некоторого множества базисов пространств* $\{V_i\}_{i=1}^n$;

3. *полупрямое произведение* $(\mathrm{Ker}\alpha)\cdot H$ *является нормальным делителем группы G индекса* ≤ 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку G порождается элементами малого φ-коранга, образ хотя бы одного такого элемента в группе $\alpha(G)$ нетривиален. Следовательно, $\alpha(G)=A_n$ или S_n. Кроме того, из (2.2) следует, что $\dim V_i \ll \dim V$.

Пусть $X\subset\{1,\dots,n\}$, $G_X=\{\sigma\in G\mid\sigma(V_j)=V_j$ для всех $j\notin X\}$. Пусть, далее,

$$\Theta_X : G_X \longrightarrow \sum_{j\notin X} GL(V_j)$$

- естественное представление. Так как $A_n\le\alpha(G)$, то $A_{|X|}\le\alpha(G_X)$. Покажем, что при $\dim V_j<<|X|$ имеет место включение

$$A_{|X|} \le \alpha\ (\mathrm{Ker}\ \theta_X). \tag{2.5}$$

Для этого достаточно доказать, что $\mathrm{Ker}\ \theta_X \not\subseteq \mathrm{Ker}\ \alpha$, поскольку $\alpha(\mathrm{Ker}\ \theta_X)$ - нормальный делитель в группе $\alpha(G_X)$ и, следовательно, $\alpha(\mathrm{Ker}\theta_X)=A_{|X|}$ или $S_{|X|}$ (можно считать, что $|X|\ge5$). Предположим, что $\mathrm{Ker}\ \theta_X\subset\mathrm{Ker}\ \alpha$. Тогда существует факторгруппа H группы $\theta_X(G_X)$, изоморфная группе $A_{|X|}$ или $S_{|X|}$. Для некоторого $j\notin X$ ограничение Γ_j группы $\theta_X(G_X)$ на подпространство V_j также должно иметь факторгруппу, изоморфную H (здесь $|X|\ge5$). Но $\Gamma_j\le GL(V_j)$ - это линейная алгебраическая группа, поскольку таковыми являются группы G и G_X. Поэтому группа Γ_j не может иметь факторгрупп, изоморфных группе H при $\dim V_j<<|X|$. (Действительно, в силу теоремы Жордана-Блихфельда-Шура (см. [12], § 36) группа $GL(V_j)$ не может иметь конечных подгрупп, факторгруппы которых изоморфны простым группам большого (в сравнении с $\dim V_j$) порядка. Кроме того, у связной компоненты Γ_j° группы Γ_j не может быть конечной группы внешних автоморфизмов, порядок которой достаточно большой. Отсюда следует, что в Γ_j нет факторгрупп, изоморфных H). Таким образом, предположение $\mathrm{Ker}\ \theta_X\subset\mathrm{Ker}\ \alpha$ приводит к противоречию, и, значит, имеет место включение (2.5).

Пусть $\dim V_1<<|X|\le\frac{n}{2}$; $X',X''\subset\{1,\dots,n\}$; $|X|=|X'|=|X''|$; $\{i_1,\dots,i_6\}\subset X'$; $X\cap X'=\{i_1,i_2,i_3\}$; $X''\cap\{i_1,\dots,i_6\}=\{i_1,i_2\}$. Из (2.5) следует, что существуют такие элементы $\sigma\in\mathrm{Ker}\ \theta_X, \alpha(\sigma)=(i_1i_2i_3)$, $\tau\in\mathrm{Ker}\ \theta_{X'}$, , что

$$\alpha\ ([\sigma,\tau]) = (i_1i_2i_3)(i_4i_5i_6), \tag{2.6}$$

$$\sum_{j\ne i_1,\dots,i_6} V_j \subset V^{<[\sigma,\tau]>}. \tag{2.7}$$

Из (2.5)-(2.7) следует, что существует такой элемент $\delta\in\mathrm{Ker}\theta_{X''}$, что

$$\alpha\ ([\delta,[\sigma,\tau]]) = (i_1i_2i_3), \tag{2.8}$$

$$\sum_{j\ne i_1,i_2,i_3} V_j \subset V^{<[\delta,[\sigma,\tau]]>}. \tag{2.9}$$

Положим $\gamma=[\delta,[\sigma,\tau]]$. Пусть $Y\subset\{1,\dots,n\}$, $|Y|=|X|$; $i_1,i_2\notin Y$; $\{i_3,\dots,i_6\}\subset Y$. Ввиду (2.5) существует такой элемент $\varepsilon\in\mathrm{Ker}\ \theta_Y$, для которого $\alpha(\varepsilon)=(i_3i_4)(i_5i_6)$. Из (2.8), (2.9) следует, что в некотором базисе пространства $V_{i_1}+V_{i_2}+V_{i_3}+V_{i_4}$ оператор $\gamma'=[\gamma^3,\varepsilon]^{-1}\gamma$ представлен матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где E - единичная матрица; $A, E \in GL_m(K)$, $m = \dim V_1$. Кроме того, оператор γ' действует тривиально на любом из подпространств V_j при $j \neq i_1, i_2, i_3, i_4$. Пусть $Y' \subset \{1, \ldots, n\}$, $|Y'| = |X|$; $i_1, i_2, \in Y'$; $i_3, i_4 \notin Y'$; $\omega \in \operatorname{Ker} \theta_{Y'}$; $\alpha(\omega) = (i_1 i_5)(i_2 i_6)$. Тогда оператор $\omega\gamma'\omega^{-1}$ действует тривиально на любом подпространстве V_j при $j \neq i_3, i_4, i_5, i_6$, а на подпространстве $V_{i_3} + V_{i_5} + V_{i_6} + V_{i_4}$ представлен матрицей вида (2.10). Таким образом, группа $\langle \gamma', \omega\ \gamma'\omega^{-1} \rangle$ действует как группа подстановок A_5 некоторого множества базисов пространств V_j для $j = i_1, i_2, i_3, i_5, i_6$. На подпространстве V_{i_4} группа $\langle \gamma', \omega\gamma'\omega^{-1} \rangle$ действует как циклическая группа, порожденная матрицей A. На всех остальных подпространствах V_j группа $\langle \gamma', \omega\gamma'\omega^{-1} \rangle$ действует тривиально. Следовательно, в группе $\langle \gamma', \omega\gamma'\omega^{-1} \rangle$ найдется элемент, действующий как подстановка базисов подпространств $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ и тривиальный на всех остальных подпространствах V_j. Таким образом, для любых трех индексов i_1, i_2, i_3 в группе G найдется оператор, действующий как подстановка базисов подпространств $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ и тривиальный на всех остальных подпространствах V_j. Отсюда легко следуют утверждения предложения. •

2.4. Полупростые алгебраические группы. Теоремы Ю. Г. Зархина. Пусть V - конечномерное линейное пространство над полем K; $\operatorname{End} V$ - алгебра его эндоморфизмов; $g \subset \operatorname{End} V$ - неприводимая простая алгебра Ли ранга r. Ю. Г. Зархин показал, что для любого линейного оператора $f \in g$, $f \neq 0$, имеет место неравенство (см. [5], теорема 4)

$$\operatorname{rank} f \geq \frac{\dim V}{3r}. \tag{2.11}$$

Кроме того, если $g \neq sl(V), so(V), sp(V)$, то (см. [5], теорема 6)

$$(\operatorname{rank} f)^2 \geq \frac{\dim V}{72}. \tag{2.12}$$

Из неравенств (2.11) и (2.12) очевидно следуют оценки снизу на коранги и φ-коранги линейных операторов, содержащихся в простых алгебраических группах. Действительно, пусть $G \leq GL(V)$ - неприводимая (как линейная группа) простая алгебраическая группа. Группу G можно рассматривать как группу Шевалле, построенную по некоторой неприводимой простой алгебре Ли $g \subset \operatorname{End} V$ (см. [13], § 5, 12). Любой унипотентный элемент группы G имеет вид $\exp f$, где f - нильпотентный линейный оператор. Очевидно, что ранг оператора f равен корангу оператора $\exp f$. Таким образом, из (2.11) следует, что для любого унипотентного элемента $u \in G$ имеет место неравенство

$$r(u) \geq \frac{\dim V}{3r}, \tag{2.13}$$

где r - ранг группы G; если при этом $G\neq SL(V)$, $SO(V)$, $Sp(V)$, то из (2.12) получаем

$$(r(u))^2 \geq \frac{\dim V}{72}. \tag{2.14}$$

Далее, любой элемент группы G содержится в некоторой подгруппе Бореля. Следовательно, класс (проективный класс) подгруппы Бореля совпадает с классом (проективным классом) группы G. Применяя предложение 2 к подгруппе Бореля и ее унипотентному радикалу, получаем из (2.13) неравенство

$$\mathrm{pr.cl}\ (G) \geq \frac{\dim V}{6r}, \tag{2.15}$$

а в случае, когда $G\neq SL(V)$, $SO(V)$, $Sp(V)$, из (2.14) следует

$$(\mathrm{pr.cl}(G))^2 \geq \frac{\dim V}{288}, \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь случай полупростых групп. Пусть $G\leq GL(V)$ - полупростая алгебраическая группа; G^0 - связная компонента единицы группы G; $G_1,\dots,G_m$ - простые компоненты группы G^0; $H=C_G(G^0)$ (ясно, что H - конечная группа); $F=HG^0$. Пусть, далее, $V=V_1\oplus..,\oplus V_k$ - разложение F-модуля V в прямую сумму неприводимых F-модулей. Каждая компонента V_i разлагается в тензорное произведение $V_i = V_{i1}\otimes\dots\otimes V_{im}\otimes W_i$, где V_{ij} - неприводимый рациональный G_j-модуль, а W_i - неприводимый H-модуль. Образы естественных представлений $F \longrightarrow GL(V_i)$, $G_j \longrightarrow GL(V_{ij})$, $H \longrightarrow GL(W_i)$ обозначим соответственно через Γ_i, Γ_{ij}, Δ_i.

Очевидно, что $C_G(F) \leq F$. Поэтому ввиду предложения 2

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{pr.cl}(F). \tag{2.17}$$

Далее, из теоремы Клиффорда следует, что классы (проективные классы) групп Γ_i совпадают, и, значит,

$$\mathrm{pr.cl}(F) \geq \mathrm{pr.cl}(\Gamma_i) \tag{2.18}$$

для любого $i=1,\dots,k$. Из следствия 1 получаем

$$\mathrm{pr.cl}(\Gamma_i) = \min\left\{\frac{\dim V_i}{\dim_{V_{ij}}}\cdot \mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij}),\ \frac{\dim V_i}{\dim W_i}\cdot \mathrm{pr.cl}(\Delta_i)\right\} \tag{2.19}$$

(здесь j пробегает значения $1,\dots,m$). Учитывая, что $k\ \dim V_i=\dim V$, получаем из (2.17)-(2.19)

$$2\mathrm{pr.cl}(G) \geq \mathrm{pr.cl}(F) \geq \frac{\dim V}{k}\cdot \min\left\{\frac{\mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij})}{\dim V_{ij}},\ \frac{\mathrm{pr.cl}(\Delta_i)}{\dim W_i}\right\}. \tag{2.20}$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть $r>0$ - ранг группы G. Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{\dim V}{12[G:G^0]r}.$$

Если G - связная группа, то

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{\dim V}{6r}.$$

Доказательство. Пусть r_{ij} - ранг группы Γ_{ij}. Из (2.15) следует, что для любых i, j

$$\mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij}) \geq \frac{\dim V_{ij}}{6r_{ij}} \geq \frac{\dim V_{ij}}{6r}. \tag{2.21}$$

Если для некоторых индексов i, j выполнено неравенство

$$\frac{\mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij})}{\dim V_{ij}} \leq \frac{\mathrm{pr.cl}(\Delta_i)}{\dim W_i} \tag{2.22}$$

или проективный класс Δ_i неопределен (при $\dim W_i=1$), то требуемые неравенства следуют из (2.20), (2.21) и неравенств $k \leq [G:F] \leq [G:G^0]$. Предположим, что для всех i, j

$$\frac{\mathrm{pr.cl}(\Delta_i)}{\dim W_i} < \frac{\mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij})}{\dim V_{ij}}. \tag{2.23}$$

Тогда из (2.20) и (2.23) получаем

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{1}{2k}\frac{\dim V}{\dim W_i} \cdot \mathrm{pr.cl}(\Delta_i). \tag{2.24}$$

Так как W_i - неприводимый H-модуль, то $\dim W_i \leq |H/Z(H)|$ (см. [12], § 53). Учитывая, что $k \leq [G:F]$, получаем

$$k \dim W_i \leq [G:G^0]. \tag{2.25}$$

Сравнивая (2.24) и (2.25), получаем неравенство

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{\dim V}{2[G:G^0]}, \tag{2.26}$$

из которого, очевидно, следует требуемое неравенство. ●

Предложение 6. *Если* $\Gamma_{ij} \neq \mathrm{SL}(V_{ij})$, $\mathrm{SO}(V_{ij})$, $\mathrm{Sp}(V_{ij})$ *для любых* i, j *или* $\dim V \geq \dim G$, *то*

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{\sqrt{\dim V}}{34\ [G:G^0]}.$$

Если, кроме того, группа G *связна, то*

$$\mathrm{pr.cl}(G) \geq \frac{\sqrt{\dim V}}{17}.$$

Доказательство. Если для всех i, j выполнено неравенство (2.23), то, как показано выше, выполнено и неравенство (2.26), из которого будет следовать и требуемое неравенство. Поэтому можно считать, что выполнено неравенство (2.22) для некоторых i, j (или проективный класс Δ_i неопределен), и ввиду (2.20)

$$2\mathrm{pr.cl}(G) \geq \mathrm{pr.cl}(F) \geq \frac{\dim V}{k \cdot \dim V_{ij}} \cdot \mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij}) \geq$$

$$\geq \frac{\dim V}{[G:G^0]\dim V_{ij}}\,\mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij}). \tag{2.27}$$

Если $\Gamma_{ij}\neq SL(V_{ij})$, $SO(V_{ij})$, $Sp(V_{ij})$, то из (2.16) получаем

$$\mathrm{pr.cl}(\Gamma_{ij}) \geq \frac{\sqrt{\dim V_{ij}}}{17}. \tag{2.28}$$

Требуемые неравенства следуют теперь из (2.27) и (2.28). Предположим, что группа Γ_{ij}, фигурирующая в неравенстве (2.27), - это $SL(V_{ij})$, $SO(V_{ij})$ или $Sp(V_{ij})$. Тогда

$$\sqrt{\dim \Gamma_{ij}} > \frac{\dim V_{ij}}{17}. \tag{2.29}$$

Далее, из неравенства $\dim V \geq \dim G$ следует, что $\dim V \geq \dim \Gamma_{ij}$ и, значит,

$$\sqrt{\dim V} \geq \sqrt{\dim \Gamma_{ij}}. \tag{2.30}$$

Сопоставляя (2.27), (2.29), (2.30), получаем требуемые неравенства. ●

§ 3. Классы конечных линейных групп

3.1. Конечную группу будем называть *известной*, если все простые нециклические факторы ее композиционного ряда - это группы типа Ли или знакопеременные группы или группы из некоторого конечного списка простых групп, содержащего 26 известных спорадических групп.

Теорема 1. *Пусть $G\leq GL_n(K)$ - известная конечная линейная группа над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики. Если G - неприводима, квазипримитивна и $\mathrm{pr.cl}(G)<<n$, то $\mathrm{pr.cl}(G)=\mathrm{cl}(G)$ или $\mathrm{pr.cl}(G)=\frac{1}{2}\mathrm{cl}(G)$ и*

$$A_m \otimes G_1 \lhd G \lhd S_m \otimes G_2,$$

где $G_1\leq G_2\leq GL_s(K)$, $(m-1)s=n$, $s=\mathrm{cl}(G)$ или $s=\frac{1}{2}\mathrm{cl}(G)$, $[G_2:G_1] \leq 2$.

Следствие 3. *Пусть G - группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Если группа G порождается элементами малого коранга, то $G=A_{n+1}$ или S_{n+1}.*

Доказательство следствия. Из леммы 1 следует, что $G_1, G_2\leq K^*$. Поэтому $A_{n+1}\lhd G \lhd K^*S_{n+1}$. Элементы малого коранга группы K^*S_{n+1} очевидно содержатся в S_{n+1}. ●

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько шагов.

3.2. Редукция к квазипростым группам. Пусть $F(G)$ - максимальный нильпотентный нормальный делитель группы G (подгруппа Фиттинга). Предположим, что $F(G) \not\subseteq Z(G)$, и пусть $h\in F(G), h\notin Z(G), H=\langle\sigma h\sigma^{-1}|\sigma\in G\rangle$. Так как $G\leq GL_n(K)$ - квазипримитивная линейная группа, то естественное вложение $i:G \to GL_n(K)$ при ограничении на нормальный делитель H разлагается в сумму эквивалентных неприводимых представлений, причем каждое такое представление мономиально, поскольку H - нильпотентная группа. При выборе любой системы импримитивности неприводимого представления группы H соответствующая группа подстановок не может

быть симметрической или знакопеременной. Поэтому (см. п. 2.3, неравенство (2.4)) с ростом размерности такого представления будет расти и величина φ-корангов образующих группы H. Отсюда следует, что с ростом числа n будет расти и величина φ-корангов образующих группы H, как линейной группы в $\mathrm{GL}_n(K)$. Таким образом, с ростом числа n растет и проективный класс группы $F(G)$, поскольку элемент h выбирался произвольно. Поэтому можно считать, что

$$\mathrm{pr.cl}(G) < \frac{1}{2}\,\mathrm{pr.cl}(F(G)) \tag{3.1}$$

или $F(G) \le Z(G)$.

Пусть $L(G)$ - максимальный полупростой нормальный делитель группы G (слой), $F^*(G)=L(G)F(G)$ - обобщенная подгруппа Фиттинга группы G. По теореме Бендера $C_G(F^*(G))\le F^*(G)$ (см. [14], п. 1.5). Из предложения 2 следует, что $\mathrm{pr.cl}(F^*(G))\le 2\mathrm{pr.cl}(G)$. Сравнивая это неравенство с (3.1) и используя предложение 1, заключаем, что элементы группы $F^*(G)$ малых φ-корангов содержатся в $L(G)$. При этом ввиду леммы 1 такие элементы содержатся не более, чем в одной квазипростой компоненте P группы $L(G)$.

Рассмотрим неприводимое представление $j: P \to \mathrm{GL}_l(K)$, являющееся неприводимой компонентой ограничения представления $G \to \mathrm{GL}_n(K)$ на нормальный делитель P (все такие представления эквивалентны). В силу выбора P $\mathrm{pr.cl}(j(P)) << l$. Предположим, что $A_m \le j(P) \le K^* A_m$, где $m=l+1$. Пусть $G_1=C_G(P)$. Тогда $A_m \times G_1 \lhd G$. Группа G_1 имеет точное неприводимое представление малой (в сравнении с m) степени. Поэтому $\mathrm{Aut}(A_m \times G_1)=\mathrm{Aut}(A_m) \times \mathrm{Aut}(G_1)$. Так как $\mathrm{Aut}(A_m)=S_m$ при $m\ge 6$ (см. [14], 4.239), то $G=A_m \times G_1$ или $G=\langle A_m \times G_1, \gamma \mid \gamma^2 \in A_m \times G_1\rangle$. Во втором случае $G \lhd F=S_m \times G_2$, где $G_2=C_F(S_m)$. Из неприводимости и квазипримитивности группы G следует, что группа G_2 имеет неприводимое представление той же размерности, что и группа G_1. Отсюда следует утверждение теоремы.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для любой квазипростой неприводимой группы $P \le \mathrm{GL}_l(K)$ справедлива импликация

$$\mathrm{pr.cl}(P) << l \Longrightarrow A_{l+1} \le P \le K^* A_{l+1}$$

При этом, естественно, можно исключить из рассмотрения любое конечное множество квазипростых групп (в частности, множество спорадических квазипростых групп).

3.3. Знакопеременные группы. Случай $P=A_n \times Z_k$ следует из утверждения, приведенного ниже.

Предложение 7. *Пусть $\rho: A_n \longrightarrow \mathrm{GL}_m(K)$ - неприводимое неодномерное нестандартное представление и $n \ge 9$. Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(A_n)) > \frac{\sqrt{m}}{8}.$$

Доказательство. Если ρ - нестандартное представление и $n \ge 9$, то $m \ge n(n-3)/4$ (см. [15]). Далее, $n(n-3) > (n-2)^2$ при $n \ge 9$ и, следовательно,

$$m > (n-2)\frac{\sqrt{m}}{2}. \tag{3.2}$$

Поскольку n-2 двойные транспозиции порождают группу A_n, то из (1.3) и (3.2) следует, что

$$r_\varphi(\rho(\sigma)) > \frac{\sqrt{m}}{2} \tag{3.3}$$

для любой двойной транспозиции $\sigma \in A_n$ и $\varphi = \pm 1$.

Для любого элемента $\gamma \in A_n$, $\gamma \neq 1$, существует двойная транспозиция $\delta \in A_n$ такая, что $[\gamma,\delta] \neq 1$. Так как δ - двойная транспозиция, то при некотором натуральном k подстановка $[\gamma,\delta]^k$ - это либо цикл порядка 3 или 5, либо произведение двух независимых циклов порядка 2 или 3, либо произведение четырех независимых транспозиций. Учитывая, что $n \geq 9$, в каждом из этих случаев легко найти такую подстановку $\omega \in A_n$, что $[[\gamma,\delta]^k,\omega]$ - двойная транспозиция. Из (1.5) получаем

$$r_\varphi(\rho(\gamma)) \geq \frac{r(\rho([[\gamma,\delta]^k,\omega]))}{4}. \tag{3.4}$$

Сравнивая (3.3) и (3.4), получаем требуемое неравенство. •

3.4. Центральные расширения знакопеременных групп. Будем предполагать, что $n \geq 9$, и рассматривать нетривиальные центральные расширения $\hat{A}_n$ групп A_n при помощи группы второго порядка. Отметим, что такие расширения не расщепляются при ограничении на подгруппу A_4 и, следовательно, прообразы двойных транспозиций в $\hat{A}_n$ имеют порядок 4.

Предложение 8. *Пусть* $\rho: \hat{A}_n \longrightarrow GL_m(K)$ - *точное неприводимое представление. Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(\hat{A}_n)) \geq \frac{m}{4}.$$

Доказательство. Так как ρ - точное представление, то его ограничение на $\hat{A}_4$ - это сумма точных двумерных представлений группы $\hat{A}_4$. Следовательно, оператор $\rho(\sigma)$, где $\sigma \in \hat{A}_n$ - прообраз подстановки (12) (34), имеет собственные значения i; $-i$. Поэтому

$$r_\varphi(\rho(\sigma)) = \begin{cases} m, & \text{если } \varphi(\sigma) \neq \pm i; \\ m/2, & \text{если } \varphi(\sigma) = \pm i. \end{cases} \tag{3.5}$$

Для любого $\gamma \in \hat{A}_n$, $\gamma \notin Z(\hat{A}_n)$, существуют такие $\delta, \omega \in \hat{A}_n$ и натуральное k, что $[[\gamma,\delta]^k, \omega]$ - элемент, сопряженный с σ (см. доказательство предложения 7). Из (1.5) следует, что

$$r_\varphi(\rho(\gamma)) \geq \frac{r(\rho(\sigma))}{4}. \tag{3.6}$$

Требуемое неравенство следует из (3.5) и (3.6). •

3.5. Квазипростые группы типа Ли. Множество всех квазипростых групп типа $X_l(q)$ или ${}^kX_l(q)$ (см. [14], гл. 2), где $X=A,\ldots,G$, $k=2,3$, будем обозначать символом $\mathrm{Chev}_l(q)$.

П р е д л о ж е н и е 9. *Существуют такие константы* $c_1, c_2>0$, *что для любых* $q=p^n$ *и* l, *любой группы* $G\in\mathrm{Chev}_l(q)$ *и любого ее неприводимого неодномерного представления* $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ *над полем* K *имеет место неравенство*

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(G)) > \frac{q^{c_1 l}}{c_2 n l}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве существования таких констант можно, естественно, не рассматривать любое конечное множество групп. Поэтому, в частности, будем считать, что $(Z(G),p) = 1$ (см. [14], с.316).

Нам потребуются следующие утверждения.

Л е м м а 2. *Существует такая константа* $c > 0$, *что для любых* q *и* l *и любой группы* $\Gamma \in \mathrm{Chev}_l(q)$ *минимально возможная степень* $m(\Gamma)$ *неодномерного представления группы* Γ *над полем* K *больше, чем* q^{cl}.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Из результатов работы [16] следует, что $m(\Gamma) > \frac{1}{2}(q^{dl}-1)$, где d - некоторое положительное вещественное число, зависящее лишь от типа группы Γ и независимое от q и l. Отсюда, очевидно, следует и утверждение данной леммы. ●

Л е м м а 3. *Пусть* $H\le B$ - *подгруппы Картана и Бореля группы* G; $N\le G, B\cap N=H \lhd N$, $G=BNB$; $W=N/H$. *Тогда*

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(G)) \ge \frac{1}{2|W|}\,\mathrm{pr.cl}(\rho(B)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что проективные классы групп $\rho(G)$ и $\rho(B)$ равны их классам (для этого вместо группы G нужно рассмотреть группу $G\times Z_m$ для достаточно большого числа m). Пусть $\mathrm{cl}(G)=r(\sigma)$ для некоторого элемента $\sigma\in G$; C - класс сопряженных с σ элементов группы G. Для любого натурального k положим

$$M_k = CUC^2U \ldots UC^k.$$

Если $Z(G)M_k\ne G$, то множество M_k содержит по крайней мере k классов сопряженных элементов группы G, образы которых в группе $G/Z(G)$ различны и не совпадают с классом единицы (это следует из простоты группы $G/Z(G)$). Пусть $k=|W|$. Если существует элемент $\tau\in M_k\cap B$, $\tau\notin Z(G)$, то, используя (1.4), получаем нужное неравенство: $\mathrm{cl}(\rho(B))\le r(\rho(\tau))\le kr(\rho(\sigma))=|W|\mathrm{cl}(\rho(G))$. Если такого элемента нет, то $Z(G)M_k\ne G$. Следовательно, существуют элементы $\gamma,\delta\in M_k\cap B\omega B$ для некоторого $\omega\in N$, $\omega\notin H$, такие, что образы классов, сопряженных с γ и δ элементов группы G в группе $G/Z(G)$, различны и не совпадают с классом единицы. Можно считать, что $\gamma=\omega\gamma'$, $\delta=\omega\delta'$, где $\gamma',\delta'\in B$. Так как $\gamma,\delta\in M_k$, то из (1.4′) следует, что $r(\rho(\gamma))\le kr(\rho(\sigma))$, $r(\rho(\delta))\le$ $\le kr(\rho(\sigma))$. Следовательно, $r(\rho(\gamma^{-1}\delta))\le 2kr(\rho(\sigma))$. Так как $\gamma^{-1}\delta\in B$, $\gamma^{-1}\delta\notin Z(G)$, то из последнего неравенства следует утверждение леммы. ●

Рассмотрим группы из $\mathrm{Chev}_l(q)$ при $l>8$. Группы $\mathrm{SL}_{l+1}(q)$, $\mathrm{SU}_{l+1}(q)$, $\mathrm{Sp}_{2l}(q)$, $\Omega^{\pm}_{2l}(q)$, $\Omega_{2l+1}(q)$ будем обозначать одним символом $\Gamma_l(q)$; их центральное расширение - символом $\tilde{\Gamma}_l(q)$ (предполагаем, что $(Z(\tilde{\Gamma}_l(q)),p)=1$). При $l>8$ группа $G\in\mathrm{Chev}_l(q)$ есть

факторгруппа группы типа $\tilde{\Gamma}_l(q)$.

Пусть M - пространство естественного представления группы $\Gamma_l(q)$ (над полем $GF(q)$). Для любого элемента $\sigma\in\Gamma_l(q)$, $\sigma\notin Z(\Gamma_l(q))$ существует такой элемент $\tau\in\Gamma_l(q)$, что $\gamma=[\sigma,\tau]\neq 1$ и $r(\tau)<(\dim M-2)/4$. Из (1.5) следует, что $r(\gamma)<(\dim M-2)/2$. Так как $\dim M^{\gamma} > (\dim M+2)/2$, то в M^{γ} найдется одномерное подпространство L, стабилизируемое некоторой подгруппой Бореля группы $\Gamma_l(q)$ (этот факт легко следует из свойств геометрий над конечными полями). Пусть $P_l(q)$ - максимальная параболическая подгруппа, стабилизирующая L; $\tilde{P}_l(q)$ - ее прообраз в $\tilde{\Gamma}_l(q)$. Пусть, далее, $\theta:\tilde{\Gamma}_l(q)\to GL(V')$ - линейное представление над полем K, ядро которого лежит в центре группы $\tilde{\Gamma}_l(q)$. Так как $\gamma=[\sigma,\tau]\in P_l(q)$, а элемент σ выбирался произвольно, то ввиду (1.5)

$$\mathrm{pr.cl}(\theta(\tilde{\Gamma}_l(q))) \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{pr.cl}(\theta(\tilde{P}_l(q))). \tag{3.7}$$

Пусть $F=O_p(\tilde{P}_l(q))$ - максимальная нормальная p-подгруппа в группе $\tilde{P}_l(q)$. Известно, что централизатор F в $\tilde{P}_l(q)$ содержится в группе $FZ(\tilde{P}_l(q))$ (см. [14], с. 61). Из предложения 2 следует

$$\mathrm{pr.cl}(\theta(\tilde{P}_l(q))) \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{pr.cl}(\theta(F)). \tag{3.8}$$

Пусть $\mathrm{pr.cl}(\theta(F)=r_{\varphi}(\theta(f))$ для некоторых $f\in F$ и φ. Существует неприводимое подпредставление $\theta':\tilde{P}_l(q)\to GL(V'')$ представления $\theta:\tilde{P}_l(q)\longrightarrow GL(V')$ такое, что $\theta'(f)\neq\varphi(f)$. Так как $\Gamma_{l-2}(q)\leq P_l(q)$, то из леммы 2 следует неравенство $\dim V''>q^{c(l-2)}$ (c - константа из леммы 2). Далее, $|F|=|O_p(\tilde{P}_l(q))|<q^{c'l}$ для некоторой константы $c'>0$, независимой от $l,q,\Gamma_l(q),P_l(q)$. Поэтому число образующих любого сечения (т.е. подфактора) группы F не превосходит $c'nl$. Используя предложение 3, получаем, что

$$\mathrm{pr.cl}(\theta'(F)) \geq \frac{q^{c(l-2)}}{c'l\,n} \tag{3.9}$$

или $\theta'(F)\leq K^*$. Если $\theta'(f)\notin K^*$, то из (3.9) получаем

$$\mathrm{pr.cl}(\theta(F)) = r_{\varphi}(\theta(f)) \geq r_{\varphi}(\theta'(f)) \geq \mathrm{pr.cl}(\theta'(F)) \geq \frac{q^{c(l-2)}}{c'l\,n}. \tag{3.10}$$

В этом случае утверждение предложения для групп из $\mathrm{Chev}_l(q)$ при $l>8$ следует из (3.7), (3.8), (3.10). Если $\theta'(f)\in K^*$, то $r_{\varphi}(\theta(f))>q^{c(l-2)}$, поскольку $\theta'(f)\neq\varphi(f)$ и $\dim V''>q^{c(l-2)}$. Поэтому в этом случае также получаем нужное утверждение (при $l>8$).

Рассмотрим теперь группы из $\mathrm{Chev}_l(q)$ при $l\leq 8$. Так как в этом случае ограничены порядки групп Вейля, то, используя лемму 3, доказательство предложения 9 можно свести к доказательству существования таких констант $c'_1, c'_2>0$, что

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(B)) > \frac{q^{c'_1}}{c'_2 n} \tag{3.11}$$

(здесь B - подгруппа Бореля группы $G\in\mathrm{Chev}_l(q)$).

Пусть $B=HU$, где $U=O_p(B)$, $(|H|,p)=1$. Пусть $\theta:B\to GL(V')$ - неприводимое представление над полем K, нетривиальное на подгруппе U. Тогда $\dim V'\geq(q-1)/2$. Действительно, в $\theta(U)$ можно выбрать элементарную абелеву группу X, содержащую H-орбиту, в которой не менее чем $(q-1)/2$ элементов. Отсюда, очевидно, будет следовать неравенство $\dim V'\geq(q-1)/2$. (Группу X можно найти в подгруппе $\theta(U_\alpha)$, где U_α - такая корневая подгруппа в U, что $\theta(U_\alpha)\neq 1$. Это следует из свойств подгрупп Бореля групп Шевалле ранга 1 (см. [14], 3.2)). Не рассматривая конечное множество групп типа Ли с $q<7$ и $l\leq 8$, получаем

$$\dim V' > q^{1/2}. \tag{3.12}$$

Далее, существует такая константа $a>0$, что для любой группы $G\in\mathrm{Chev}_l(q)$ при $l\leq 8$ имеет место неравенство $|U|<q^a$. Поэтому число образующих любого сечения группы U не превосходит числа an. Из неравенства (3.12) и предложения 3 получаем

$$\mathrm{pr.cl}(\theta(U)) > \frac{q^{1/2}}{an}, \tag{3.13}$$

а из неравенства (3.13) и предложения 2 получаем

$$\mathrm{pr.cl}\ (\theta(B)) > \frac{q^{1/2}}{2\ an}. \tag{3.14}$$

Пусть $r_\varphi(\rho(\sigma))=\mathrm{pr.cl}(\rho(B))$ для некоторого $\sigma\in B$ и φ. Так как $\sigma\notin Z(B)$, то существует неприводимое подпредставление $\theta:B\to GL(V')$ представления $\rho:B\to GL(V)$, нетривиальное на подгруппе U, и такое, что $\theta(\sigma)\notin K^*$. Таким образом, из (3.14) получим (3.11). Предложение 9 полностью доказано. ●

Оценку снизу на проективный класс группы $\rho(G)$, полученную в предложении 9, можно видоизменить следующим образом:

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(G)) > \frac{2^{\frac{c_1}{3}\sqrt{\log_2|\bar{G}|}}}{c_2\log_2|\bar{G}|}. \tag{3.15}$$

(Здесь $\bar{G}=G/Z(G)$; c_1,c_2 - константы из предложения 9). Действительно, из таблицы порядков простых групп типа Ли извлекаем неравенства

$$q^l \leq |U| \leq q^{2l^2}, \quad |U| < |\bar{G}| < |U|^3$$

(см. [14], с. 145), из которых получаем

$$nl \leq (nl)\log_2 p \leq \log_2|U|\leq(2nl^2)\log_2 p <(\sqrt{2}\ nl\cdot\log_2 p)^2,$$

$$\log_2|U| < \log_2|\bar{G}| < 3\ \log_2|U|.$$

Далее,

$$nl \leq \log_2|U| < \log_2|\bar{G}|,$$

$$2^{\sqrt{\log_2|\bar{G}|}} < 2^{\sqrt{3}\sqrt{\log_2|U|}} < 2^{\sqrt{6}\ nl\ \log_2 p} = q^{\sqrt{6}\ l}. \qquad (3.16)$$

Теперь (3.15) следует из (3.16) и предложения 9. Так как $|\bar{G}| \to \infty$ при $\dim V \to \infty$, то $\mathrm{pr.cl}(G) \to \infty$ при $\dim V \to \infty$. Таким образом, случай групп типа Ли также разобран. Теорема 1 полностью доказана. ●

З а м е ч а н и е. Заменяя в правой части неравенства предложения 9 лишь числитель, получим неравенство

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(G)) > \frac{2^{\frac{c_1}{3}\sqrt{\log_2|\bar{G}|}}}{c_2 nl}. \qquad (3.17)$$

Далее, из леммы 2 следует

$$\log_2(\dim V) \geq cnl \cdot \log_2 p \geq cnl. \qquad (3.18)$$

Из неприводимости представления ρ получаем

$$\log_2(\dim V) \leq \log_2(|\bar{G}|). \qquad (3.19)$$

Сравнивая (3.17)-(3.19), получаем

$$\mathrm{pr.cl}(\rho(G)) > \frac{2^{e_1\sqrt{\log\ (\dim V)}}}{e_2\ \log_2(\dim V)}, \qquad (3.20)$$

где e_1, e_2 - некоторые константы. Таким образом, величину $\mathrm{pr.cl}(\rho(G))$ можно оценивать снизу через величину $\dim V$, используя неравенства вида (3.20).

§ 4. Приложения к теории инвариантов

4.1. Коразмерность алгебр инвариантов редуктивных алгебраических групп. В этом параграфе K - алгебраически замкнутое поле (характеристики нуль), G - редуктивная алгебраическая группа над полем K, V - точный конечномерный рациональный G-модуль, т.е. V - конечномерное линейное пространство над полем K, для которого зафиксировано точное рациональное представление $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. Всюду ниже будем отождествлять группу G с группой $\rho(G)$. Таким образом, для группы G определены класс и проективный класс. Линейное пространство V будем также рассматривать и как аффинное, отождествляя точки аффинного пространства с векторами касательного пространства в нуле.

Пусть $S=K[V]$ - алгебра регулярных функций на аффинном пространстве V. На алгебре S группа G действует по формуле $\sigma f(v)=f(\sigma^{-1}v)$ для любых $\sigma \in G$, $f \in S$, $v \in V$. Пусть $R=S^G$ - соответствующая алгебра инвариантов. Алгебра R имеет конечный однородный (в естественной градуировке алгебры S) базис $f_1,\ldots,f_m$ (см. [17], гл. 2). Следовательно, алгебру R можно представить как факторалгебру $R=A/I$ алгебры многочленов $A=K[X_1,\ldots,X_m]$ по идеалу I, порожденному однородными (в градуировке $\deg X_i=\deg f_i$) многочленами $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$. Мерой сложности алгебры R могут служить ее

коразмерность codim $R=m-\dim R$, дефект $d(R)=s-\operatorname{codim} R$, а также ряд других параметров (например, кратность $\mu(R)$), демонстрирующих отличие алгебры R от наиболее «простых» типов алгебр: алгебр многочленов, гиперповерхностей, полных пересечений и т.д. Естественно, возникают две задачи: первая - классифицировать случаи «малых» параметров, вторая - оценить в целом поведение сложности алгебр инвариантов разных классов редуктивных групп. Здесь мы будем иметь дело со второй задачей.

Оценки сложности алгебр инвариантов разных классов редуктивных групп (как связных, так и конечных) есть в работах [6-11]. Наиболее существенным является следующий результат В.Л.Попова (см.[6]), который можно сформулировать так: пусть Γ - фиксированная связная полупростая алгебраическая группа, U пробегает множество всех конечномерных рациональных Γ-модулей таких, что $U^{\Gamma}=0$, тогда

$$\operatorname{codim} K[U]^{\Gamma} \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad \dim U \longrightarrow \infty.$$

Ниже это утверждение (при этом будет снято условие связности группы Γ) получится как следствие теорем Ю.Г.Зархина (см. § 2). (Как и в [6], здесь будет использован слайс-метод (см.[6, 11]). Следует отметить, что при использованном ниже подходе упрощается получение качественного результата, но теряется ряд важных конструктивных результатов работы [6]). Здесь мы получим также теорему о росте коразмерности алгебр инвариантов конечных групп, которая является обобщением соответствующих результатов работ [7, 8].

Полученные результаты о поведении коразмерности алгебр инвариантов можно, по-видимому, перенести и на их дефект.

4.2. Полусвободный слайс. Пусть $v\in V$, Gv - орбита точки v, G_v - ее стабилизатор. Предположим, что орбита Gv замкнута (в топологии Зарисского). Тогда G_v - редуктивная алгебраическая группа (см.[18]) и $V=N_v\oplus T_v$, где $T_v=gv$, g - алгебра Ли группы G, а N_v - прямое дополнение G_v-модуля T_v до G_v-модуля V.

Ниже G_v-модуль N_v будем называть слайсом G-модуля V. Так как $T_v\approx g/g_v$, где g_v - стабилизатор точки v в g, то

$$\dim N_v = \dim V - \dim G + \dim G_v. \tag{4.1}$$

Слайс N_v будем называть собственным, если $G_v\neq G$.

Пусть $S_v=K[N_v]$ - алгебра регулярных функций на аффинном пространстве N_v; $R_v=S_v^{G_v}$ - алгебра инвариантов. Тогда

$$\operatorname{codim} R_v \le \operatorname{codim} R, \quad d(R_v) \le d(R) \tag{4.2}$$

(см. [6,11]). Эти неравенства следуют из теоремы об этальном слайсе (см.[18]), из которой, в частности, следует

$$\dim N_v/G_v = \dim V/G, \tag{4.3}$$

где $V/G=\operatorname{Specm} R$, $N_v/G_v=\operatorname{Specm} R_v$ - соответствующие алгебраические факторы.

Пусть $\pi_v: V \longrightarrow V/G$ - факторный морфизм. Если $G_v=1$, то π_v является гладким отображением в некоторой окрестности точки v (это также следует из [18]). Таким

образом, если $G_v=1$, то в некоторой окрестности точки v ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, где $f_1,\dots,f_m$ - базис алгебры R, а $x_1,\dots,x_n$ - базис пространства линейных форм V^*, равен $\dim V/G$.

Пусть H - редуктивная алгебраическая группа, W - конечномерный рациональный H-модуль. Модуль W будем называть полусвободным, если стабилизатор любого вектора из W, орбита которого замкнута, либо тривиален, либо совпадает со всей группой H.

Лемма 4. *Пусть W - полусвободный H-модуль и $W^H=0$, $A=K[W]$ - алгебра регулярных функций на W, $B=A^H$ - алгебра инвариантов, W^0 - нуль-слой факторного морфизма $\pi_w: W\to W/H$ (см. [19], гл. II). Тогда*

$$\operatorname{codim} B \geq \dim W - \dim W^0 - \dim H - 1.$$

Доказательство. Пусть $\dim W=n$, $\dim W/H=r$. Если $r=0$, то $W=W^0$ и, значит, $\operatorname{codim} B=0>-\dim H-1$. Пусть $r>0$. Рассмотрим точку $w\in W\setminus W^0$. В замыкании Hw орбиты точки w содержится замкнутая орбита Hw' некоторой точки w' (см. [19], гл. II, 3.3). Так как $w\notin W^0$, то $w'\neq 0$. Следовательно, $H_{w'}=1$ (поскольку W -полусвободный H-модуль и $W^H=0$), и, значит, $\dim Hw'=\dim H$. Таким образом, $Hw=Hw'$ - замкнутая орбита и $H_w=1$. Пусть $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ - однородный базис алгебры B; $x_1,\dots,x_n$ - линейный базис пространства W^*. Ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)$ в окрестности любой точки с замкнутой орбитой и тривиальным стабилизатором равен r. Пусть I_r - идеал в алгебре A, порожденный минорами ранга r матрицы $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)$. Множество нулей идеала I_r содержится в W^0. Следовательно, для высоты $\operatorname{ht} I_r$ идеала I_r имеет место неравенство

$$\operatorname{ht} I_r \geq \dim W - \dim W^0. \tag{4.4}$$

Идеал, порожденный минорами ранга r матрицы размером $m\times n$ и имеющий ранг r, имеет высоту не больше, чем $m+n-2r+1$ (см. [20]). Следовательно,

$$\operatorname{ht} I_r \leq m + n - 2r + 1. \tag{4.5}$$

Учитывая, что $m-r=\operatorname{codim} B$, из (4.4) и (4.5) получим

$$\operatorname{codim} B \geq \dim W - \dim W^0 - (n-r) - 1. \tag{4.6}$$

Теперь утверждение леммы следует из (4.6) и равенства $n-r=\dim H$, которое в свою очередь следует из (4.1) и (4.3) при $G_v=1$. ●

4.3. Флаг слайсов. Рассмотрим флаг подпространств

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_k, \tag{4.7}$$

где V_{i+1} - некоторый собственный слайс для V_i. Такой флаг будем называть флагом слайсов. Флагу слайсов естественно соответствует ряд редуктивных алгебраических групп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k, \tag{4.8}$$

где G_{i+1} - стабилизатор в G_i некоторой точки $v_i\in V_i$, орбита которой замкнута. Такие

образом, V_i - это конечномерный рациональный G_i-модуль. Флаг слайсов (4.7) будем называть максимальным, если число k - максимально возможное.

Пусть $g=g_0\supset g_1\supset\ldots\supset g_k$ - ряд алгебр Ли ряда групп (4.8). Так как G_i-модуль V_{i-1} изоморфен G_i-модулю $g_{i-1}/g_i\oplus V_i$ для любого $i=1,\ldots,k$, то

$$V = g/g_i\oplus V_i. \tag{4.9}$$

Л е м м а 5. *Пусть* (4.7) *- некоторый максимальный флаг слайсов. Если* $\dim V/G \geq \dim V-\dim G$ *и* $\mathrm{cl}(G) > \dim G$, *то* $G_k=1$, *а* V_{k-1} *- полусвободный слайс.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G_k\neq 1$. Пусть $\sigma\in G_k$, $\sigma\neq 1$; σ_k - ограничение оператора σ на подпространство V_k. Из (4.9) следует, что $r(\sigma_k) \geq r(\sigma) - \dim G + \dim G_K$. Поэтому

$$\dim V_k / V_k^{G_k} \geq r(\sigma_k) \geq \mathrm{cl}(G) - \dim G + \dim G_k. \tag{4.10}$$

Из неравенства $\mathrm{cl}(G) > \dim G$ и (4.10) следует

$$\dim V_k / V_k^{G_k} > \dim G_k. \tag{4.11}$$

Так как V_k - последний слайс максимального флага, то у всех точек из V_k, орбиты которых замкнуты, стабилизатор совпадает со всей группой G_k, т.е. все такие точки лежат в пространстве $V_k^{G_k}$. Следовательно, алгебраический фактор V_k/G_k совпадает с аффинным пространством $V_k^{G_k}$. Учитывая неравенство (4.11), получаем

$$\dim V_k/G_k < \dim V_k - \dim G_k. \tag{4.12}$$

С другой стороны, из (4.1) и (4.3) следуют соответственно равенства

$$\begin{aligned} &\dim V - \dim G = \dim V_1 - \dim G_1 = \ldots = \dim V_k - \dim G_k,\\ &\dim V/G = \dim V_1/G_1 = \ldots = \dim V_k/G_k. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Из неравенства $\dim V/G \geq \dim V - \dim G$ и равенств (4.13) получаем неравенство $\dim V_k/G_k \geq \dim V_k - \dim G_k$, которое противоречит неравенству (4.12). Таким образом, $G_k=1$.

Рассмотрим слайс V_{k-1}. Из определения максимального флага слайсов следует, что любой такой флаг для G_{k-1}-модуля V_{k-1} имеет ровно два члена. При этом последний слайс такого флага будет также последним слайсом некоторого максимального флага для G-модуля V. Выше было показано, что стабилизатор, соответствующий последнему слайсу максимального флага G-модуля V, тривиален. Следовательно, стабилизатор любой точки G_{k-1}-модуля V_{k-1}, орбита которой замкнута, либо тривиален, либо совпадает со всей группой G_{k-1}. Поэтому V_{k-1} - полусвободный слайс. ●

П р е д л о ж е н и е 10. *Предположим, что*

$$\dim V/G \geq \dim V - \dim G \quad \text{и} \quad \mathrm{cl}(G) > \dim G.$$

Тогда существует замкнутая редуктивная подгруппа H группы G, $H\neq 1$, такая, что H-модуль V разлагается в прямую сумму трех H-модулей

$$V = g/h \oplus U \oplus W,$$

где g и h – алгебры Ли групп G и H; W – полусвободный H-модуль и $W^H=0$; U – тривиальный H-модуль. При этом коразмерность алгебры инвариантов R удовлетворяет следующему неравенству

$$\operatorname{codim} R \geq \dim W - \dim W^0 - \dim H - 1,$$

где W^0 – нуль-слой H-модуля W.

Доказательство. Пусть $V=V_0\supset V_1\supset\ldots\supset V_k$ – какой-либо максимальный флаг слайсов G-модуля V; $R=R_0$; $R_1,\ldots,R_k$ – последовательность соответствующих алгебр инвариантов. Из (4.2) следует последовательность неравенств $\operatorname{codim} R \geq \operatorname{codim} R_1 \geq \ldots \geq \operatorname{codim} R_k$. Пусть $H=G_{k-1}$, $U=V_{k-1}^{G_{k-1}}$, W – прямое дополнение G_{k-1}-модуля U до G_{k-1}-модуля V_{k-1}. Утверждения предложения о H-модулях V,U,W следуют из (4.9) и леммы 5. Неравенство для $\operatorname{codim} R$ следует из неравенства $\operatorname{codim} R \geq \operatorname{codim} R_{k-1}$ и леммы 4. ●

4.4. Алгебры инвариантов конечных групп. В этом пункте G – конечная группа. Из предложения 10 получаем

Следствие 4. *Пусть $G\leq GL(V)$ – конечная группа, $R=K[V]^G$ – алгебра инвариантов. Тогда*

$$\operatorname{codim} R \geq \operatorname{cl}(G) - 1.$$

Доказательство. Условия предложения 10 в случае конечной группы G, очевидно, выполнены. Из определения пространства W следует, что $\dim W \geq \operatorname{cl}(H)$. Так как $\operatorname{cl}(H) \geq \operatorname{cl}(G)$, $\dim W^0=0$, $\dim H=0$, то из неравенства $\operatorname{codim} R \geq \dim W - \dim W^0 - \dim H - 1$ получаем требуемое неравенство. ●

Теорема 2. *Пусть $G\leq GL(V)$ – известная конечная группа, $R=K[V]^G$ – алгебра инвариантов. Если G – неприводима, квазипримитивна и $\operatorname{codim} R \ll n = \dim V$, то $G=A_{n+1}$ или S_{n+1}.*

Доказательство. Так как $\operatorname{codim} R \ll n$, то ввиду следствия 4 $\operatorname{pr.cl}(G) \leq \operatorname{cl}(G) \ll n$. Из теоремы 1 следует, что $A_m \otimes G_1 \triangleleft G \triangleleft S_m \otimes G_2$, где A_m, $S_m \leq GL(V_1)$, $\dim V_1=m-1$; $G_1, G_2 \leq GL(V_2)$, $\dim V_2=s$, $s \ll n$, $V=V_1\otimes V_2$; $[G_2:G_1] \leq 2$. Пусть $v\in V_1$ – вектор, стабилизатор которого в группе S_m совпадает с подгруппой S_{m-1}; $W=v\otimes V_2$; $F=\{\sigma\in G \mid \sigma(w)=w$ для всех $w\in W\}$. Из определения группы F следует, что $F=A_m\otimes 1$ или $S_m\otimes 1$. Если $s=\dim V_2>1$, то коразмерность алгебры инвариантов $R_1=K[V]^F$ будет расти с ростом числа m (см. [8]). Так как $\operatorname{codim} R_1 \leq \operatorname{codim} R$ (см. [7]), то из условия $\operatorname{codim} R \ll n$ следует, что $s=1$. Поэтому $A_{n+1} \triangleleft G \triangleleft K^* S_{n+1}$. При большом n среди таких групп только у A_{n+1} и S_{n+1} алгебры инвариантов имеют малую коразмерность (базисные инварианты промежуточных групп $A_{n+1} \triangleleft G \triangleleft K^* S_{n+1}$ можно вычислить через базисные инварианты группы A_{n+1}). Отсюда получаем утверждение теоремы. ●

4.5. Алгебра инвариантов полупростых алгебраических групп. В этом пункте G – полупростая алгебраическая группа ранга $r>0$; G^0 – связная компонента единицы; $G_1,\ldots,G_m$ – ее простые компоненты, $r_1,\ldots,r_m$ – их ранги; $T\leq G$ –

максимальный тор; $X(T)=\mathrm{Hom}(T,K^*)$ - группа его рациональных характеров; $E=\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}X(T)$ (здесь $\mathbb{R}$ - поле вещественных чисел); $Y(T)$ - множество однопараметрических подгрупп в T. Для $\lambda\in Y(T)$ положим $E_\lambda^+=\{v\in E|\langle v,\lambda\rangle>0\}$, $E_\lambda^-=\{v\in E|\langle v,\lambda\rangle<0\}$, где $\langle,\rangle$ - естественное спаривание $E\times Y(T)\longrightarrow\mathbb{R}$ (см. [19], гл. II).

Для $i=1,\dots,m$ положим

$$d_i=d(G_i)=\begin{cases} r_i+1, & \text{если } G_i\text{- группа типа } A_{r_i};\\ 2(r_i-1), & \text{если } G_i\text{- группа типа } D_{r_i};\\ 3, & \text{если } G_i\text{- группа типа } E_6;\\ 2 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Определим число $d(G)$ как наименьшее общее кратное чисел d_i.

Теорема 3. *Пусть V - точный конечномерный рациональный G-модуль; $R=K[V]^G$- алгебра инвариантов. Тогда*

1) $\operatorname{codim} R\geq\dfrac{\mathrm{cl}(G)}{d(G)}-2\dim G-1$;

2) $\operatorname{codim} R\geq\dfrac{\sqrt{\dim V}}{12[G:G^\circ]|Z(G^\circ)|rd(G)}-2\dim G-1$, *если* $V^G=0$;

$$\left.\begin{aligned}&3)\ \operatorname{codim} R\geq\frac{\dim V}{12[G:G^\circ]rd(G)}-2\dim G-1,\\ &4)\ \operatorname{codim} R\geq\frac{\sqrt{\dim V}}{34[G:G^0]d(G)}-2\dim G-1,\end{aligned}\right\}\text{, если } V \text{ - неприводимый } G\text{-модуль.}$$

Доказательство. Нам потребуется следующая

Лемма 6. *Пусть V_λ^+, V_λ^- - подпространства V, состоящие из сумм весовых подпространств, веса которых находятся в E_λ^+ и E_λ^- соответственно. Тогда*

$$\dim V_\lambda^-\geq\frac{(\dim V_\lambda^++\dim V_\lambda^-)}{d(G)}.$$

Доказательство леммы. Пусть W_i - группа Вейля компоненты G_i; $c_i\in W_i$- преобразование Кокстера (см. [21], гл. 5, § 6), h_i- его порядок (число Кокстера). Положим $k_i=h_i/d_i$, $f_i=c_i^{k_i}$, $f=\prod_{i=1}^m f_i$. Сравнивая числа Кокстера, показатели групп Вейля (см. [21], табл. I-IX) и числа k_i, можно убедиться, что оператор f действует без неподвижных точек в $E\setminus\{0\}$. Следовательно, ни одна $\langle f\rangle$-орбита не может целиком содержаться в E_λ^+ (или E_λ^-). Множество весов G-модуля V инвариантно относительно группы Вейля, а значит, его можно разбить на $\langle f\rangle$-орбиты. При этом кратности весов из одной орбиты одинаковы. Так как $\langle f\rangle$-орбита не может содержаться в E_λ^+, то ее вклад в размерность пространства V_λ^- не меньше, чем $a/|\langle f\rangle|$, где a - ее вклад в размерность пространства $V_\lambda^+ + V_\lambda^-$. Отсюда следует требуемое неравенство. ●

Докажем теперь неравенство 1). Можно считать, что $\mathrm{cl}(G)>\dim G$ (в противном случае неравенство очевидно). Далее, $\dim V/G\geq\dim V-\dim G$, поскольку G -

полупростая группа. Таким образом, выполнены условия предложения 10 и

$$\operatorname{codim} R \geq \dim W - \dim W^0 - \dim H - 1. \tag{4.14}$$

Если $\dim H=0$, то (см. следствие 4) $\operatorname{codim} R \geq \operatorname{cl}(H)-1 \geq \operatorname{cl}(G)-1 > \operatorname{cl}(G)/d(G)-2\dim G-1$. Пусть $\dim H>0$; $T_H \leq H$ - максимальный тор, $Y(T_H)$ - множество однопараметрических подгрупп в T_H. Так как $W_\lambda^- = W \cap V_\lambda^-$ для любого $\lambda \in Y(T_H)$, то

$$\dim W - \dim W^0 \geq \min\{\dim(W \cap V_\lambda^-) \mid \lambda \in Y(T_H)\} - \dim H \tag{4.15}$$

(см. [19], гл. III, § 2). Из определения пространства W следует

$$\dim W \cap V_\lambda^- \geq \dim V_\lambda^- - \dim G + \dim H \tag{4.16}$$

для любого $\lambda \in Y(T_H)$, а из определения $\operatorname{cl}(G)$ следует, что $\dim V_\lambda^+ + \dim V_\lambda^- \geq \operatorname{cl}(G)$. Используя теперь лемму 6, а также неравенства (4.14)-(4.16), получаем

$$\operatorname{codim} R \geq \operatorname{cl}(G)/d(G) - \dim G - \dim H - 1 \geq \operatorname{cl}(G)/d(G) - 2\dim G - 1.$$

Неравенства 3) и 4) следуют из 1) и предложений 5 и 6 соответственно (чтобы использовать предложение 6 можно предполагать, что $\dim V \geq \dim G$, так как в противном случае неравенство 4) очевидно).

Докажем теперь неравенство 2). Имеет место следующая

Лемма 7. *Пусть Γ - полупростая алгебраическая группа (возможно, конечная); U - конечномерный рациональный (не обязательно точный) Γ-модуль, у которого $U^\Gamma=0$; m - число неприводимых компонент в разложении Γ-модуля U. Тогда существует такой Γ-подмодуль $M \subset U$ (возможно, $M=U$), что $\operatorname{cl}(F) \geq m/k$, где F - образ группы Γ в $GL(M)$, а k - длина композиционного ряда группы Γ.*

Доказательство леммы. Проведем индукцию по k. При $k=1$ группа Γ является простой и, значит, ограничение любого элемента $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$, на любую неприводимую компоненту Γ-модуля U - нетривиально, поскольку $U^\Gamma=0$. Поэтому $\operatorname{cl}(\Gamma) \geq m$, и в качестве M можно взять сам Γ-модуль U. Пусть $k>1$. Если $\operatorname{cl}(\Gamma) \geq m/k$, то положим $M=U$. Пусть $\operatorname{cl}(\Gamma) < m/k$; $\sigma \in \Gamma$, $r(\sigma)=\operatorname{cl}(\Gamma)$; $U_1, \ldots, U_l$ - те неприводимые компоненты Γ-модуля U, на которых оператор σ действует тривиально; $U_0=U_1+\ldots+U_l$; H - образ группы Γ в $GL(U_0)$. Так как длина композиционного ряда группы $H \leq GL(U_0)$ не превосходит $k-1$, то существует H-подмодуль $M \subset U_0$ такой, что $\operatorname{cl}(F) \geq l/(k-1)$, где F - образ группы H в $GL(M)$. Но $l \geq m - r(\sigma) > m - m/k$, и, значит, $\operatorname{cl}(F) > m/k$. Поскольку H-модуль M является также и Γ-подмодулем в U, он удовлетворяет утверждению леммы. ●

Пусть теперь $\Gamma=G$, $U=V$, а $M \subset V$ - G-подмодуль, удовлетворяющий утверждениям леммы 7. Для любого G-подмодуля $L \subset V$ имеет место неравенство

$$\operatorname{codim} R \geq \operatorname{codim} K\,[L]^G \tag{4.17}$$

(см. [6, 11]). Используя (4.17) при $L=M$, неравенство 1) (если F - бесконечная группа) или следствие 4 (если F - конечная группа), получаем

$$\operatorname{codim} R \geq \frac{m}{kd(G)} - 2\dim G - 1. \tag{4.18}$$

Так как $k \le [G:G^0]|Z(G^0)|r$, то неравенство 2) будет следовать из (4.18), если $m \ge \sqrt{\dim V}$. Если $m < \sqrt{\dim V}$, то существует неприводимый G-подмодуль $L \subset V$, для которого $\dim L \ge \sqrt{\dim V}$. Если образ группы G в $GL(L)$ - бесконечная группа, то неравенство 2) следует из неравенства 3), а если конечная, то $\sqrt{\dim V} \le \dim L \le [G:G^0]$ и, значит, правая часть неравенства 2) отрицательна, и оно заведомо выполнено. Таким образом, неравенство 2) также доказано. ●

С л е д с т в и е 5. (см. [6]). *Пусть* Γ *- полупростая алгебраическая группа;* U *пробегает множество всех конечномерных рациональных* Γ*-модулей таких, что* $U^\Gamma=0$. *Тогда*

$$\operatorname{codim} K[U]^\Gamma \longrightarrow \infty \quad \textit{при} \quad \dim U \longrightarrow \infty .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G - образ группы Γ в $GL(U)$. Если G - бесконечная группа, то из неравенства 2) теоремы 3 следует, что коразмерность алгебры $K[U]^G$ достаточно велика при большой размерности пространства U. То же самое в случае конечной группы G следует из леммы 7, неравенства (4.17) и следствия 4 (число неприводимых компонент в разложении G-модуля $U \ge \dim U/[\Gamma:\Gamma^0]$).●

С п и с о к л и т е р а т у р ы

[1] W i e l a n d t H. Finite Permutation Groups. New York.: Acad.Press, 1 9 6 4. 122 p.

[2] З а л е с с к и й А.Е. Линейные группы // Успехи мат.наук. 1 9 8 1. Т.36, N 5. С.57-107.

[3] З а р х и н Ю.Г. Линейные простые алгебры Ли, содержащие оператор небольшого ранга. Препринт НИВЦ НЦБИ. Пущино, 1 9 8 6.

[4] Г о р д е е в Н.Л. Коранги операторов конечных линейных групп //XIX Всесоюз.алгебраическая конференция: Тез.докл.Ч.I. Львов, 1 9 8 7. С.67.

[5] Z a r h i n Yu.G. Linear simple Lie algebras and ranks of operators// Prepublications Universite de Paris-Sud. 88-12. Orsay, 1 9 8 8.

[6] П о п о в В.Л. Сизигии в теории инвариантов // Изв.АН СССР. 1 9 8 3. Т.47, N3. С.544-622.

[7] Г о р д е е в Н.Л. Сложность алгебр инвариантов конечных групп // ДАН СССР. 1 9 8 7. Т.29(3). С.528-531.

[8] Г о р д е е в Н.Л. Инварианты симметрических и знакопеременных групп // Зап.науч.семин. ЛОМИ АН СССР. 1 9 8 7. Т.160. С.201-210.

[9] D i x m i e r J. Sur les invariants du groups symmetrique dans certaines representations // J.Algebra. 1 9 8 6. Vol.103, N 1. P.184-192.

[10] H u f f m a n W.C., S l o a n e N.J.A. Most primitive groups have messy invariants // Adv.Math. 1 9 7 9. Vol.32, N 2. P.118-127.

[11] K a c V.G. Root systems, representations of quivers and invariant theory //

Lect.Notes Math. 1 9 8 3. Vol.996. P.74-108.

[12] К э р т и с Ч., Р а й н е р И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1 9 6 9. 668 с.

[13] С т е й н б е р г Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1 9 7 5. 262 с.

[14] Г о р е н с т е й н Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1 9 8 5. 352 с.

[15] R a s a l a R. On the minimal degrees of characters of S_n //J. Algebra. 1 9 7 7. Vol.45, N 1. P.132-181.

[16] L a n d a z u r i V., S e i t z G.M. On the minimal degrees of projective representations of the finite Chevalley groups // J.Algebra. 1 9 7 4. Vol.32, N 2. P.418-443.

[17] С п р и н г е р Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1 9 8 1. 191 с.

[18] L u n a D. Slices etales // Bull.Soc.Math.France. 1 9 7 3. Mem. 33. P.81-105.

[19] К р а ф т Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1 9 8 7. 312 с.

[20] B r u n s W. The Eisenbud-Evans Generalized Principal Theorem and determinatal Idials // Proc.Amer.Math.Soc. 1 9 8 1. Vol.83, N 1. P.19-24.

[21] Б у р б а к и Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV-VI. М.: Мир, 1 9 7 2. 331 с.

Ленинградский государственный
педагогический институт им. А. И. Герцена
191186, наб. р. Мойки, 48

Поступило 20 марта 1989 г.