A. Yu. Zaitsev, Approximation by infinitely divisible distributions in multidimensional case, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 89–103

А.Ю.Зайцев

АППРОКСИМАЦИЯ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В этой работе изучается точность аппроксимации распределений сумм независимых случайных векторов с помощью безгранично делимых распределений. В одномерном случае эта задача была впервые рассмотрена А.Н.Колмогоровым в [I]. Здесь мы приведем доказательства результатов, сформулированных (в несколько более слабом и менее общем виде) в [2] .

Мы будем использовать следующие обозначения и соглашения. В качестве нормы элемента $x=(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ мы выберем $\|x\|=\max\limits_{1\le j\le k}|x_j|$. В силу эквивалентности норм в R^k все последующие оценки будут справедливы и при другом выборе нормы, быть может, с изменением постоянных. Пусть, далее, $\mathfrak{A}_k$ – совокупность замкнутых параллелепипедов в R^k с ребрами, параллельными координатным осям; $\mathfrak{B}_k$ – совокупность борелевских множеств из R^k, $\mathfrak{F}_k$ – множество k-мерных вероятностных распределений, $\mathfrak{D}_k$ – безгранично делимые распределения из $\mathfrak{F}_k$; E_a – распределение, сосредоточенное в точке $a\in R^k$, $E=E_0$. Для $G,\ H\in\mathfrak{F}_k$ мы будем обозначать $g(t),\ h(t)$ – соответствующие характеристические функции; $D_G,\ D_H$ – ковариационные матрицы; $G^{(j)},\ H^{(j)}\in\mathfrak{F}_1$, $j=1,\dots,k$ – распределения j-ых координат векторов, имеющих распределения G и H ;

$$\pi(G,H)=\inf\{\varepsilon\,|\,G\{A\}\le H\{A^\varepsilon\}+\varepsilon,$$
$$H\{A\}\le G\{A^\varepsilon\}+\varepsilon \text{ для любого } A\in\mathfrak{B}_k\};$$
$$L(G,H)=\inf\{\varepsilon\,|\,G\{A\}\le H\{A^\varepsilon\}+\varepsilon,$$
$$H\{A\}\le G\{A^\varepsilon\}+\varepsilon \text{ для любого } A\in\mathfrak{A}_k\};$$
$$\rho_{var}(G,H)=\sup_{A\in\mathfrak{B}_k}|G\{A\}-H\{A\}|;\ \rho(G,H)=\sup_{A\in\mathfrak{A}_k}|G\{A\}-H\{A\}|.$$

Здесь A^ε – ε – окрестность множества A в смысле нормы $\|\cdot\|$; $\pi(\cdot,\cdot)$ – метрика Леви-Прохорова, $\rho_{var}(\cdot,\cdot)$ – – расстояние по вариации. В одномерном случае метрика $\rho(\cdot,\cdot)$ эквивалентна равномерному расстоянию между функциями распределения, а метрика $L(\cdot,\cdot)$ – расстоянию Леви. Заметим, впрочем, что существуют и другие, быть может даже более естественные, обобщения равномерного расстояния и расстояния Леви на многомерный случай. Мы будем обозначать $c(\cdot)$ положительные (вообще говоря, различные) постоянные, зависящие только от аргумента. Произведения и степени мер будут пониматься в смысле свертки, в частности, мы будем использовать обозначение

$$\exp(\lambda(G-E)) = e^{-\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}G^s \qquad (G^0=E),\ \lambda\geqslant 0,\ G\in\mathfrak{F}_k.$$

Нетрудно видеть, что $\exp(\lambda(G-E))\in\mathfrak{D}_k$. Для $G\in\mathfrak{F}_1$ функция концентрации определяется по формуле

$$Q(G,\lambda) = \sup_x G\{[x, x+\lambda]\},\quad \lambda\geqslant 0.$$

Сформулируем теперь основной результат.

ТЕОРЕМА I. Пусть распределения $F_i\in\mathfrak{F}_k$, $i=1,\dots,n$ представлены в виде $F_i = p_i V_i + (1-p_i)\mathcal{U}_i$, где $0\leqslant p_i\leqslant 1$; $\mathcal{U}_i, V_i\in\mathfrak{F}_k$ и распределения $\mathcal{U}_i, V_i$ сосредоточены, соответственно, на множествах

$$S_i = \{x\in R_k \mid x_j\in[\alpha_{ij}, \alpha_{ij}+\tau_{ij}],\ j=1,\dots,k\}$$

и на замыканиях множеств $R^k\setminus S_i$. Пусть, далее,

$$p=\max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i;\qquad \tau_j=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_{ij};\qquad \tau=\max_{1\leqslant j\leqslant k}\tau_j;$$

$$a_i=(a_{i1},\dots,a_{ik})\in R^k,\quad \text{где}\quad a_{ij}=\int_{R^1} x\,\mathcal{U}_i^{(j)}\{dx\}$$

$$F=\prod_{i=1}^n F_i;\qquad \mathfrak{D}=\prod_{i=1}^n (E_{-a_i}\exp(F_i E_{-a_i}-E)).$$

Тогда справедливы оценки

$$L(F,\mathfrak{D})\leqslant c(k)\Big(\sqrt{p\sum_{i=1}^n p_i^2}+p(|\ln p|+1)^{k/4}+\tau^{2/3}(|\ln\tau|+1)^{\frac{k+8}{12}}\Big);\quad (1)$$

$$\pi(F,\mathfrak{D})\leqslant c(k)\Big(\sum_{i=1}^n p_i^2+p(|\ln p|+1)^{k/4}+\tau^{2/3}(|\ln\tau|+1)^{\frac{k+8}{12}}\Big).\quad (2)$$

Если $p_i V_i = p_1 V_1$, $i=1,\dots,n$, то

$$\pi(F,\mathfrak{D})\leqslant c(k)\big(p(|\ln p|+1)^{k/4}+\tau^{2/3}(|\ln\tau|+1)^{\frac{k+8}{12}}\big).\quad (3)$$

Если вместо $p_i V_i = p_1 V_1$, $i=1,\dots,n$ мы предположим что для мер $p_i V_i^{(j)}$ справедливо представление

$$p_i V_i^{(j)} = \gamma_{ij} p_{ij} V_{ij1} + (p_i - p_{ij}) V_{ij2} + (1-\gamma_{ij}) p_{ij} V_{ij3},$$

где $0 \leqslant \gamma_{ij} \leqslant 1$, $0 \leqslant p_{ij} \leqslant p_i$ и распределения V_{ij1}, V_{ij2}, $V_{ij3} \in \mathfrak{F}_1$ сосредоточены, соответственно, на множествах $(-\infty, \alpha_{ij}]$, $[\alpha_{ij}, \alpha_{ij} + \tau_{ij}]$ и $[\alpha_{ij} + \tau_{ij}, \infty)$, то

$$\rho(F, \mathfrak{D}) \leqslant c(k)\left(\sqrt{p \sum_{i=1}^{n} p_i^2} + p + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_{ij}^2}{\tau_j^2} \gamma_{ij}(1-\gamma_{ij}) p_{ij} \right)^{-1/2} \right), \tag{4}$$

и существуют такие распределения $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathfrak{D}_k$, что

$$\rho(F, \mathfrak{D}_1) \leqslant c(k)\left(\frac{\sqrt{p}}{\gamma^{1/4}} + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_{ij}^2}{\tau_j^2} \gamma_{ij}(1-\gamma_{ij}) p_{ij} \right)^{-1/2} \right), \tag{5}$$

$$\gamma = \min_{i,j} \frac{\tau_{ij}^2}{\tau_j^2} \gamma_{ij}(1-\gamma_{ij});$$

$$L(F, \mathfrak{D}_2) \leqslant c(k)\left(\sqrt{p} + \tau^{2/3}(|\ln \tau| + 1)^{\frac{k+6}{12}}\right) \tag{6}$$

(если $\tau_j = 0$, то в (4),(5) следует положить $\tau_{ij}^2 / \tau_j^2 = 1$, $i = 1, \ldots, k$).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $L(F_i, E) \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$; $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$. Тогда существует такое распределение $\mathfrak{D}_3 \in \mathfrak{D}_k$, что $L(F, \mathfrak{D}_3) \leqslant c(k) \varepsilon^{1/2}$.

Чтобы получить это следствие, достаточно заметить, что из условия $L(F_i, E) \leqslant \varepsilon$ вытекают условия теоремы I с параметрами $p \leqslant 2\varepsilon$, $\tau \leqslant 2\varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В одномерном случае получены существенно более сильные оценки, чем теорема I и ее следствие, являющиеся оптимальными по порядку (см. [3]). Весьма правдоподобно выглядит гипотеза о том, что в многомерном случае должны быть справедливы оценки, имеющие такой же порядок по p и τ, что и соответствующие неулучшаемые одномерные оценки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Распределение $\mathfrak{D}$ часто называют сопровождающим безгранично делимым законом для распределения F.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I проводится по схеме, разработанной в одномерном случае в работах [I] , [4] - [7] .

Сначала мы получим оценки (I)-(3). Введем вспомогательные распределения

$$H_i = (1-p_i) \mathcal{U}_i E_{-a_i} + p_i E; \quad G_i = (1-p_i) E + p_i V_i E_{-a_i};$$

$$F^*=\prod_{i=1}^{n}(F_i E_{-a_i});\quad F'=\prod_{i=1}^{n}(G_i H_i);\quad F''=\prod_{i=1}^{n}(G_i \exp(H_i-E));$$

$$\mathfrak{D}^*=\prod_{i=1}^{n}\exp(F_i E_{-a_i}-E)=\prod_{i=1}^{n}(\exp(H_i-E)\exp(G_i-E)).$$

Легко видеть, что

$$R(F,\mathfrak{D})=R(F^*,\mathfrak{D}^*), \tag{7}$$

где $R(\cdot,\cdot)$ – любая из трех метрик: π, L или ρ . Кроме того, по неравенству треугольника

$$R(F^*,\mathfrak{D}^*)\leqslant R(F^*,F')+R(F',F'')+R(F'',\mathfrak{D}^*). \tag{8}$$

Мы будем в дальнейшем систематически использовать свойство слабой регулярности этих метрик (см. [8]): для любых $B_1,B_2,B_3\in\mathfrak{F}_k$

$$R(B_1B_3,B_2B_3)\leqslant R(B_1,B_2). \tag{9}$$

При доказательстве мы будем также неоднократно применять результаты [9] , [10] .

Очевидно, что распределения H_i сосредоточены на множестве $\{x\in R^k \mid \|x\|\leqslant 2\tau\}$ и имеют нулевые средние. Поэтому из теоремы 6 [10] следует, что

$$L(F^*,F')\leqslant\pi(F^*,F')\leqslant c(k)(\rho(|\ln\rho|+1)^{k/4}+\tau(|\ln\tau|+1)). \tag{10}$$

Далее, из (9) и из теоремы 5 [10] вытекает оценка

$$L(F',F'')\leqslant\pi(F',F'')\leqslant\pi\Big(\prod_{i=1}^{n}H_i,\prod_{i=1}^{n}\exp(H_i-E)\Big)\leqslant c(k)\tau^{2/3}(|\ln\tau|+1)^{\frac{k+8}{12}}. \tag{11}$$

Из теоремы 3 [9] следует, что

$$L(F'',\mathfrak{D}^*)\leqslant\rho(F'',\mathfrak{D}^*)\leqslant\rho\Big(\prod_{i=1}^{n}G_i,\prod_{i=1}^{n}\exp(G_i-E)\Big)\leqslant c\,k\sqrt{\rho\sum_{i=1}^{n}p_i^2}\,. \tag{12}$$

Теорема 3 была приведена в [9] без доказательства. Поскольку она существенно используется в настоящей работе, мы дадим ее доказательство в конце данной статьи. Полученная впервые А.Я.Хинчиным теорема I из [6] приводит нас к неравенству

$$\pi(F'',\mathfrak{D}^*)\le\rho_{var}(F'',\mathfrak{D}^*)\le\rho_{var}\Big(\prod_{i=1}^{n}G_i,\prod_{i=1}^{n}\exp(G_i-E)\Big)\le c\sum_{i=1}^{n}p_i^2. \qquad (13)$$

Если $p_iV_i=p_1V_1,\quad i=1,\dots,n$, то с помощью оценки, принадлежащей Ю.В.Прохорову [11] , получаем:

$$\pi(F'',\mathfrak{D}^*)\le\rho_{var}(F'',\mathfrak{D}^*)\le\rho_{var}(G_1^n,\exp(n(G_1-E)))\le cp. \qquad (14)$$

Из (8),(10)-(14) следуют неравенства (1)-(3).

Перейдем к доказательству неравенства (4). Не нарушая общности, будем считать, что $p\le 1/5$. Сначала мы установим оценку (4) для случая, когда распределения F_i имеют непрерывные ограниченные плотности, нигде не обращающиеся в ноль. В этом случае мы можем считать, что $\tau_j=\tau=1/2\sqrt{k}$, поскольку метрика $\rho(\cdot,\cdot)$ инвариантна относительно преобразований сжатия – растяжения вдоль координатных осей, применяемых к соответствующим распределениям.

Обозначим $H\in\mathfrak{F}_k$ – распределение с плотностью

$$\varphi(x)=\prod_{j=1}^{k}\varphi(x_j),\qquad\text{где}\quad \varphi(x_j)=C(m)\alpha\left(\frac{\sin\alpha x_j}{\alpha x_j}\right)^{2m}, \qquad (15)$$

где $m=[k/2]+3$ ($[\cdot]$ – целая часть числа), $\alpha=\dfrac{T}{2m}$; $T=1/k$. Нетрудно видеть, что характеристическая функция $h(t)$ обращается в ноль вне множества $\{t\in R^k \mid \|t\|\le T\}$.

Пусть Y – такое унитарное преобразование R^k , что $Y(\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{D}_{u_i})Y^T$ – диагональная матрица (T – символ транспонирования). Без потери общности будем считать, что σ_j^2 – ее диагональные члены – расположены в невозрастающем порядке: $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2\ge\dots\ge\sigma_k^2>0$. Обозначим W – распределение, определяемое по формуле $W\{A\}=H\{YA\}$ для любого $A\in\mathfrak{B}_k$ и применим лемму 2 из работы Э.Л.Пресмана [12] , согласно которой

$$(2W\{\{x\in R^k:\|x\|<h\}\}-1)\,\rho(F^*,\mathfrak{D}^*)\le$$

$$\le\rho(F^*W,\mathfrak{D}^*W)+W\{\{x\in R^k:\|x\|<h\}\}\sum_{j=1}^{k}Q(F^{*(j)},h). \qquad (16)$$

При этом мы выберем $h = c(k)$ так, чтобы

$$2W\{\{x \in R^k : \|x\| < h\}\} - 1 \geq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Заметим, кстати, что в [12] изучалась точность аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных векторов с помощью сопровождающих законов и были получены для этого случая оценки, весьма близкие к (4). При доказательстве неравенств (4)-(6) мы используем некоторые идеи из [12].

Для оценивания функции концентрации применим теорему 5 гл.III [13], согласно которой

$$Q(F^{*(j)}, h) \leq c(k) Q(F^{*(j)}, \tau_j) \leq c(k) \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_{ij}^2}{\tau_j^2} \gamma_{ij} (1 - \gamma_{ij}) p_{ij} \Big)^{-1/2}. \tag{18}$$

Чтобы оценить $\rho(F^* W, \mathfrak{D}^* W)$, применим неравенство треугольника

$$\rho(F^* W, \mathfrak{D}^* W) \leq \rho(F^* W, F' W) + \rho(F' W, F'' W) + \rho(F'' W, \mathfrak{D}^* W). \tag{19}$$

Пусть B – преобразование R^k, которое задается диагональной матрицей с диагональными членами $b_{jj} = \sigma_j^{-1}$, $j = 1, \ldots, k$. Для произвольного распределения $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_k$ мы будем обозначать $\tilde{\mathcal{U}}$ – распределение, определяемое по формуле

$$\tilde{\mathcal{U}}\{A\} = \mathcal{U}\{(BY)^{-1} A\}, \quad A \in \mathfrak{B}_k.$$

Мы подобрали преобразования Y и B таким образом, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_{\tilde{\mathcal{U}}_i}$ являлась единичной диагональной матрицей.

Воспользуемся теперь леммой 5 [10], согласно которой,

$$\rho(F^* W, F' W) \leq \rho_{var}(F^* W, F' W) = \rho_{var}(\tilde{F}^* \tilde{W}, \tilde{F}' \tilde{W}) \leq c(k) p m^{k/4} \leq c(k) p. \tag{20}$$

Для оценивания $\rho(F'' W, \mathfrak{D}^* W)$ мы используем (9) и (12):

$$\rho(F'' W, \mathfrak{D}^* W) \leq \rho(F'', \mathfrak{D}^*) \leq c\, k \sqrt{p \sum_{i=1}^{n} p_i^2}. \tag{21}$$

Чтобы оценить $\rho(F' W, F'' W)$, применим теорему 1 [9], согласно которой,

$$\rho(F'W,F''W)=\rho\Big(\big(W\prod_{i=1}^{n}H_i\big)\big(\prod_{i=1}^{n}G_i\big),\ \big(W\prod_{i=1}^{n}\exp(H_i-E)\big)\big(\prod_{i=1}^{n}G_i\big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{K}Q\Big(\prod_{i=1}^{n}G_i^{(j)},1\Big)\times$$

$$\times\Big\{K+\sum_{m=1}^{K}\int_0^{\infty}\sup_{A\in\mathfrak{B}_{m,x}}|P\{(\xi_1,\dots,\xi_m)\in A\}-P\{(\eta_1,\dots,\eta_m)\in A\}|dx\Big\}, \qquad (22)$$

где $\xi=Y\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_K)$, $\eta=Y\eta'=(\eta_1,\dots,\eta_K)$; вектора ξ', η' имеют, соответственно, распределения $W\sum_{i=1}^{n}H_i$ и $W\prod_{i=1}^{n}\exp(H_i-E)$, а

$$\mathfrak{B}_{m,x}=\{A\in\mathfrak{B}_m,\ A\subset\{y=(y_1,\dots,y_m)\in R^m:|y_m|>x\}\}.$$

Очевидно, что $E\xi_j=E\eta_j=0$, $\mathfrak{D}\xi_j=\mathfrak{D}\eta_j<\infty$, $j=1,\dots,K$.

Докажем теперь, что

$$\int_0^{\infty}\sup_{A\in\mathfrak{B}_{K,x}}|P\{(\xi_1,\dots,\xi_K)\in A\}-P\{(\eta_1,\dots,\eta_K)\in A\}|dx\leqslant C(K). \qquad (23)$$

Мы рассмотрим отдельно два случая: а) $0<\sigma_K\leqslant 1$, б) $\sigma_K>1$.

Пусть сначала $0<\sigma_K\leqslant 1$ и $A\in\mathfrak{B}_{K,x}$, $x>0$. Тогда по неравенству Чебышева

$$|P\{\eta\in A\}-P\{\xi\in A\}|\leqslant P\{|\xi_K|>x\}+P\{|\eta_K|>x\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\min\Big\{1,\frac{E\eta_K^2}{x^2}\Big\}\leqslant 2\min\Big\{1,\frac{C(K)+\sigma_K^2}{x^2}\Big\}.$$

Отсюда следует (23) в случае а).

Пусть теперь $\sigma_K>1$. Заметим, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{B}_{K,x}}|P\{\xi\in A\}-P\{\eta\in A\}|=$$

$$=\sup_{A\in\mathfrak{B}_{K,y}}\Big|\big(\tilde W\prod_{i=1}^{n}\tilde H_i\big)\{A\}-\big(\tilde W\prod_{i=1}^{n}\exp(\tilde H_i-E)\big)\{A\}\Big|, \qquad (24)$$

где $y=x\sigma_K^{-1}$. Пусть $A\in\mathfrak{B}_{K,y}$. Согласно лемме I из работы В.И.Ротаря [I4],

$$|(\tilde{W}\prod_{i=1}^{n}\tilde{H}_i)\{A\}-(\tilde{W}\prod_{i=1}^{n}\exp(\tilde{H}_i-E))\{A\}|\leqslant$$

$$\leqslant c(\kappa)\Big\{\int\limits_{\tilde{w}(t)\neq 0}|\tilde{w}(t)(\prod_{i=1}^{n}\tilde{h}_i(t)-\prod_{i=1}^{n}\exp(\tilde{h}_i(t)-1))|\,dt+$$

$$+\sup_{\omega}\int\limits_{\tilde{w}(t)\neq 0}\Big|\frac{\partial^{\kappa+2}}{\partial t_{\omega}^{\kappa+2}}(\tilde{w}(t)(\prod_{i=1}^{n}\tilde{h}_i(t)-\exp(\tilde{h}_i(t)-1))\Big|\,dt\Big\}\frac{1}{1+y^2}, \tag{25}$$

где $\frac{\partial^{\kappa+2}}{\partial t_{\omega}^{\kappa+2}}$ – оператор взятия $(\kappa+2)$ – кратной частной производной по направлению ω, где $\omega\in R^{\kappa}$ – вектор с единичной евклидовой нормой.

Действуя аналогично выкладкам, проведенным при доказательстве теоремы 5 [I0], можно с помощью (25) доказать, что

$$|(\tilde{W}\prod_{i=1}^{n}\tilde{H}_i)\{A\}-(\tilde{W}\prod_{i=1}^{n}\exp(\tilde{H}_i-E))\{A\}|\leqslant\frac{c(\kappa)}{(1+y^2)\sigma_{\kappa}^{2}}. \tag{26}$$

Из (24),(26) следует (23) и в случае б).

Учитывая, что $p<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$, $\tau_j=\frac{1}{2\sqrt{\kappa}}$ и опять используя теорему 5 гл.Ш [I3], получаем:

$$Q(\prod_{i=1}^{n}G_i^{(j)},1)\leqslant c(\kappa)\,Q(\prod_{i=1}^{n}G_i^{(j)},\tau_j)\leqslant$$

$$\leqslant c(\kappa)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij}^{2}}{\tau_j^{2}}\gamma_{ij}(1-\gamma_{ij})p_{ij}\Big)^{-1/2}. \tag{27}$$

Из (22),(23),(27) следует, что

$$\rho(F''W,F'W)\leqslant c(\kappa)\sum_{j=1}^{\kappa}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij}^{2}}{\tau_j^{2}}\gamma_{ij}(1-\gamma_{ij})p_{ij}\Big)^{-1/2}. \tag{28}$$

Теперь из (I9)–(2I),(28) вытекает оценка (4) для рассматриваемого нами случая абсолютно непрерывных распределений.

Чтобы доказать (4) в общей ситуации достаточно построить такие $\varepsilon_{ij\ell}\to 0$ при $\ell\to\infty$; $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,\kappa$, чтобы распределения

$$F_{i\ell}=F_i\Phi(\varepsilon_{i1\ell}^{2},\varepsilon_{i2\ell}^{2},\dots,\varepsilon_{i\kappa\ell}^{2})$$

допускали представление, которое было бы аналогично представлению

$$F_i = p_i V_i + (1-p_i)\mathcal{U}_i \tag{29}$$

и параметры которого неограниченно сближались бы с соответствующими параметрами представления (29). Здесь $\Phi(\varepsilon^2_{i1\ell}, \varepsilon^2_{i2\ell}, \ldots, \varepsilon^2_{ik\ell})$ – гауссовское распределение с диагональной ковариационной матрицей, диагональные члены которой равны $\varepsilon^2_{i1\ell}, \varepsilon^2_{i2\ell}, \ldots, \varepsilon^2_{ik\ell}$. При этом распределения $\prod_{i=1}^{n} F_{i\ell}$ слабо сходятся к $\prod_{i=1}^{n} F_i$, и аналогичная сходимость будет иметь место для соответствующих сопровождающих законов $\mathcal{D}_\ell$. Для получения (4) следует воспользоваться соотношением

$$\rho\Big(\prod_{i=1}^{n} F_i, \mathcal{D}\Big) \leqslant \overline{\lim_{\ell\to\infty}}\, \rho\Big(\prod_{i=1}^{n} F_{i\ell}, \mathcal{D}_\ell\Big), \tag{30}$$

а для оценивания правой части (30) применить уже доказанные оценки.

Построение величин $\varepsilon^2_{ij\ell} > 0$ не требует особых усилий, если $\tau_j > 0$. Если же $\tau_j = 0$, то можно построить $\varepsilon^2_{ij\ell} > 0$ таким образом, чтобы соответствующие параметры $\tau_{ij\ell}$ представления для $F_{i\ell}$ были бы одинаковыми при всех $i = 1, \ldots, n$. Именно поэтому мы можем в (4) считать, что для таких j $\tau_{ij}/\tau_j = 1$. Мы не проводим здесь строгого построения величин $\varepsilon_{ij\ell}$ в силу его одновременной громоздкости и достаточной простоты.

Перейдем к доказательству неравенства (5). Нетрудно показать, что в условиях теоремы мы можем построить для распределений F_i новое представление $F_i = \bar p_i \bar V_i + (1-\bar p_i)\bar{\mathcal{U}}_i$, параметры которого будут обозначаться так же, как параметры представления $F_i = p_i V_i + (1-p_i)\mathcal{U}_i$ с добавлением черты над соответствующими символами. При этом новое представление можно выбрать так, чтобы

$$\bar p_i \bar V_i\{A\} \leqslant p_i V_i\{A\} \quad \text{для любого } A \in \mathfrak{B}_k;$$

$$\bar p_{ij} \leqslant p_{ij}; \quad \bar\gamma_{ij} = \gamma_{ij}; \quad \bar\tau_{ij} \geqslant \tau_{ij}; \quad \frac{\bar\tau_{ij}}{\bar\tau_j} = \frac{\tau_{ij}}{\tau_j},$$

$$i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{\tau}_{ij}^{2}}{\bar{\tau}_j^2}\bar{\gamma}_{ij}(1-\bar{\gamma}_{ij})\bar{p}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij_0}^2}{\tau_{j_0}^2}\gamma_{ij_0}(1-\gamma_{ij_0})p_{ij_0}=\min_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij}^2}{\tau_j^2}\gamma_{ij}(1-\gamma_{ij})p_{ij}.$$

Согласно уже доказанному неравенству (4)

$$\rho\Big(\prod_{i=1}^{n}F_i,\ \prod_{i=1}^{n}(E_{-\bar{a}_i}\exp(F_i E_{-\bar{a}_i}-E))\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C(K)\left(\sqrt{\bar{p}\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i^2}+\bar{p}+\sum_{j=1}^{K}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{\tau}_{ij}^2}{\bar{\tau}_j^2}\bar{\gamma}_{ij}(1-\bar{\gamma}_{ij})\bar{p}_{ij}\Big)^{-1/2}\right). \tag{31}$$

Если при этом $\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i\leqslant\frac{1}{\bar{p}\sqrt{\bar{\gamma}}}$, то

$$\sqrt{\bar{p}\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i^2}\leqslant\frac{\sqrt{\bar{p}}}{\bar{\gamma}^{1/4}}\leqslant\frac{\sqrt{p}}{\gamma^{1/4}} \tag{32}$$

и, значит, в качестве $\mathcal{D}_1$ можно взять

$$\bar{\mathcal{D}}=\prod_{i=1}^{n}(E_{-\bar{a}_i}\exp(F_i E_{-\bar{a}_i}-E)).$$

Если же $\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i>\frac{1}{\bar{p}\sqrt{\bar{\gamma}}}$, то для распределений F_i можно построить новое представление $F_i=\bar{\bar{p}}_i\bar{\bar{V}}_i+(1-\bar{\bar{p}}_i)\bar{\bar{\mathcal{U}}}_i$ (его параметры мы обозначаем двумя чертами) так, чтобы выполнялись соотношения

$$\bar{\bar{p}}_i\bar{\bar{V}}_i\{A\}\leqslant\bar{p}_i\bar{V}_i\{A\}\quad\text{для любого } A\in\mathcal{B}_K$$

$$\bar{\bar{p}}_{ij}\leqslant\bar{p}_{ij}\ ;\quad\bar{\bar{\tau}}_{ij}\geqslant\bar{\tau}_{ij}\ ;\quad\frac{\bar{\bar{\tau}}_{ij}}{\bar{\bar{\tau}}_j}=\frac{\bar{\tau}_{ij}}{\bar{\tau}_j}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{\bar{\tau}}_{ij}^2}{\bar{\bar{\tau}}_j^2}\bar{\bar{\gamma}}_{ij}(1-\bar{\bar{\gamma}}_{ij})\bar{\bar{p}}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{\bar{\tau}}_{i1}^2}{\bar{\bar{\tau}}_1^2}\bar{\bar{\gamma}}_{i1}(1-\bar{\bar{\gamma}}_{i1})\bar{\bar{p}}_{i1}\ ;\quad\bar{\bar{\gamma}}_{ij}=\bar{\gamma}_{ij}\ ; \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{p}}_i=\frac{1}{\bar{\bar{p}}\sqrt{\bar{\bar{\gamma}}}}\ . \tag{34}$$

Дело в том, что мы можем изменять представление $F_i=\bar{p}_i\bar{V}_i+$ $+(1-\bar{p}_i)\bar{\mathcal{U}}_i$ так, чтобы были выполнены соотношения (33), а параметры $\bar{p}_i$ изменялись непрерывным образом, пока не будет выполнено равенство (34). При этом можно также добиться, чтобы

$$\frac{1}{\bar{\bar{p}}\sqrt{\bar{\bar{\gamma}}}}=\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{p}}_i\leqslant\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{p}}_{ij}\leqslant\frac{1}{\bar{\bar{\gamma}}}\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{\bar{\tau}}_{ij}^2}{\bar{\bar{\tau}}_j^2}\bar{\bar{\gamma}}_{ij}(1-\bar{\bar{\gamma}}_{ij})\bar{\bar{p}}_{ij}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{\bar{\bar{\gamma}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{\bar{\tau}}_{ij}^2}{\bar{\bar{\tau}}_j^2} \bar{\bar{\gamma}}_{ij} (1-\bar{\bar{\gamma}}_{ij}) \bar{\bar{p}}_{ij}, \qquad j=1,\ldots,k.$$

Следовательно, согласно неравенству (4)

$$\rho\Big(\prod_{i=1}^{n} F_i, \prod_{i=1}^{n} (E_{\bar{\bar{a}}_i} \exp(F_i E_{-\bar{\bar{a}}_i} - E))\Big) \leqslant c(k)\Big(\bar{\bar{p}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{p}}_i} + \bar{\bar{p}} + \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{\bar{\tau}}_{ij}^2}{\bar{\bar{\tau}}_j^2} \bar{\bar{\gamma}}_{ij} (1-\bar{\bar{\gamma}}_{ij}) \bar{\bar{p}}_{ij}\Big)^{-1/2}\Big) \leqslant c(k) \frac{\sqrt{\bar{\bar{p}}}}{\bar{\bar{\gamma}}^{1/4}}. \tag{35}$$

Из (32),(35) следует (5), причем в обоих случаях аппроксимирующее безгранично делимое распределение является сопровождающим.

Получим оценку (6). Аппроксимирующее распределение $\mathfrak{D}_2$ уже не будет, вообще говоря, сопровождающим для распределения $F=\prod_{i=1}^{n} F_i$. Мы построим $\mathfrak{D}_2$ в виде

$$\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_4 \prod_{i=1}^{n} (E_{a_i} \exp(H_i - E)),$$

$\mathfrak{D}_4 \in \mathcal{D}_k$ (очевидно, что тогда $\mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}_k$).

Так же, как и при доказательстве неравенств (I)-(3) мы применим неравенства (I0),(II), согласно которым,

$$L(F,\mathfrak{D}_2) = L(F^*, \mathfrak{D}_4 \prod_{i=1}^{n} \exp(H_i - E)) \leqslant$$

$$\leqslant L(F^*, F') + L(F', F'') + L(F'', \mathfrak{D}_4 \prod_{i=1}^{n} \exp(H_i - E)) \leqslant$$

$$\leqslant c(k)(p(|\ln p|+1)^{k/4} + \tau^{2/3}(|\ln \tau|+1)^{\frac{k+8}{12}} + L(\prod_{i=1}^{n} G_i, \mathfrak{D}_4)). \tag{36}$$

Мы опять рассмотрим два случая.

Если $\sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant p^{-1}$, то мы возьмем

$$\mathfrak{D}_4 = \prod_{i=1}^{n} \exp(G_i - E)$$

и, согласно теореме 3 из [9] ,

$$L(\prod_{i=1}^{n} G_i, \mathfrak{D}_4) \leqslant \rho(\prod_{i=1}^{n} G_i, \mathfrak{D}_4) \leqslant c(k)\sqrt{p \sum_{i=1}^{n} p_i^2} \leqslant c(k)\sqrt{p}. \tag{37}$$

Из (36),(37) следует (6) для случая $\sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant p^{-1}$. Заметим, что в этом случае $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}$.

Если же $\sum_{i=1}^{n} p_i > p^{-1}$, то, поскольку мы считаем $p < 1/5 < 1/2$, распределения G_i допускают представление, аналогичное представлению $F_i = (1-p_i)\,\mathcal{U}_i + p_i V_i$:

$$G_i = (1-p_i^*)\,\mathcal{U}_i^* + p_i^* V_i^*$$

(параметры этого представления мы будем обозначать с помощью звездочки), причем

$$p_i^* = 2p_i\,; \quad V_i^* = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}V_i E_{-a_i}\,; \quad \gamma_{ij}^* = \frac{1}{2}\,;$$
$$\alpha_{ij}^* = \tau_{ij}^* = 0, \quad i = 1,\ldots,n\,; \quad j = 1,\ldots,k.$$

Из того, что (5) уже доказано, следует, что существуют такие $b_i \in R^k$, что если

$$\mathfrak{D}_4 = \prod_{i=1}^{n}\left(E_{b_i}\exp(G_i E_{-b_i} - E)\right),$$

то

$$\rho\Big(\prod_{i=1}^{n} G_i, \mathfrak{D}_4\Big) \leqslant c(k)\Big(\sqrt{p^*} + \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^*\Big)^{-1/2}\Big) \leqslant c(k)\sqrt{p}\,. \tag{38}$$

Из (36),(38) следует (6) и в случае $\sum_{i=1}^{n} p_i > p^{-1}$.

В заключение приведем полное доказательство теоремы 3, сформулированной без доказательства в [9].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G_i = (1-p_i)E + p_i V_i\,;\ 0 \leqslant p_i \leqslant 1;\ V_i, E \in \mathfrak{F}_k,$ $i = 1,\ldots,n.$ Тогда

$$\rho\Big(\prod_{i=1}^{n} G_i, \prod_{i=1}^{n}\exp(G_i - E)\Big) \leqslant ck\Big(p\sum_{i=1}^{n} p_i^2\Big)^{1/2},$$

где $p = \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi_\varepsilon = \Phi(\varepsilon^2, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^2) \in \mathfrak{F}_k$. Предположим сначала, что $V_i = V_i'\,\Phi_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $V_i' \in \mathfrak{F}_k$, $i = 1,\ldots,k$. Не нарушая общности, будем считать, что $p \leqslant 1/2$. Пусть

$$G = \prod_{i=1}^{n} G_i\,; \quad \mathfrak{D} = \prod_{i=1}^{n}\exp(G_i - E), \quad \mathcal{U}_i = \prod_{\ell=1}^{i-1} G_\ell \prod_{\ell=i+1}^{n}\exp(G_\ell - E).$$

Тогда

$$G-\mathfrak{D}=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i\left((e^{-p_i}-(1-p_i))(V_i-E)+\sum_{m=2}^{\infty}e^{-p_i}\frac{p_i^m}{m!}(V_i-V_i^m\right).$$

Очевидно, что

$$e^{-p_i}-(1-p_i)+\sum_{m=2}^{\infty}e^{-p_i}\;\frac{p_i^m(m-1)}{m!}\leqslant cp_i^2.$$

Поэтому с помощью леммы I из [9] получаем:

$$\rho(G,\mathfrak{D})\leqslant c\sum_{i=1}^{n}p_i^2\,\rho(\mathcal{U}_iV_i,\mathcal{U}_i)\leqslant c\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}p_i^2\int_R Q(\mathcal{U}_i^{(j)},|x|)V_i^{(j)}\{dx\}.\tag{39}$$

Определим меры H_j с помощью их "функций распределения":

$$H_j(x)=H_j\{(-\infty,x)\}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \sum_{i=1}^{n}p_i^2\,V_i^{(j)}\{(-x,x)\}, & x>0.\end{cases}$$

Обозначим $v=\sum_{i=1}^{n}p_i^2$ полную вариацию меры H_j. Пусть, далее,

$$\mathfrak{D}_{p,j}=\left\{x\in R^1:H_j\{(|x|,\infty)\}\geqslant 2p^2\right\}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}p_i^2\int_{R^1}Q(\mathcal{U}_i^{(j)},|x|)V_i^{(j)}\{dx\}\leqslant 2p^2+\sum_{i=1}^{n}p_i^2\int_{\mathfrak{D}_{p,j}}Q(\mathcal{U}_i^{(j)},|x|)V_i^{(j)}\{dx\}.\tag{40}$$

Учитывая, что $p\leqslant 1/2$, и используя хорошо известные оценки для функции концентрации (см., например, теоремы I,5 гл.Ш [I3]), получаем, что

$$Q(\mathcal{U}_i^{(j)},|x|)\leqslant c\left(\sum_{\ell\neq i}p_\ell V_\ell^{(j)}\{R^1\setminus[-|x|,|x|]\}\right)^{-1/2}.\tag{4I}$$

Кроме того, при $x\in\mathfrak{D}_{p,j}$

$$\sum_{\ell\neq i}p_\ell^2\,V_\ell^{(j)}\{R^1\setminus[-|x|,|x|]\}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}p_\ell^2\,V_\ell^{(j)}\{R^1\setminus[-|x|,|x|]\}.\tag{42}$$

В силу (4I), (42)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \int_{\mathfrak{D}_{p,j}} Q(\mathcal{U}_i^{(j)}, |x|) V_i^{(j)}\{dx\} \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{D}_{p,j}} \frac{p_i^2 V_i^{(j)}\{dx\}}{\left(\sum_{l\neq i} p_l V_l^{(j)}\{R\setminus[-|x|,|x|]\}\right)^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{D}_{p,j}} \frac{p_i^2 V_i^{(j)}\{dx\}}{\left(\sum_{l\neq i} p_l^2 V_i^{(j)}\{R\setminus[-|x|,|x|]\}\right)^{1/2}} \leqslant c\sqrt{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH_j(x)}{(v-H_j(x))^{1/2}} \leqslant 2c\sqrt{2p}\sqrt{v}.$$

Отсюда и из (39),(40) следует утверждение леммы при $V_i = V_i' \Phi_\varepsilon$.

Рассмотрим теперь общий случай. Обозначим для $\varepsilon > 0$ $G_{i,\varepsilon} = (1-p_i)E + p_i V_i \Phi_\varepsilon$. Тогда, используя уже доказанное, получаем:

$$\rho\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, \prod_{i=1}^{n}(G_i - E)\right) \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to+0}}\, \rho\left(\prod_{i=1}^{n} G_{i,\varepsilon}, \prod_{i=1}^{n} \exp(G_{i,\varepsilon} - E)\right) \leqslant$$

$$\leqslant cK\sqrt{p\sum_{i=1}^{n} p_i^2},$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕЧАНИЕ. Уже после написания этой статьи автору удалось доказать, что если распределения $H_i \in \mathfrak{F}_K$, $i=1,\dots,n$ имеют нулевые средние и $H_i\{\{x: \|x\| \leqslant \tau\}\} = 1$, то

$$\pi\left(\prod_{i=1}^{n} H_i, \prod_{i=1}^{n} \exp(H_i - E)\right) \leqslant c(K)\tau(|\ln\tau|+1). \quad (43)$$

В одномерном случае этот результат получен в [3]. Существенно усиливая теорему 5 [10], неравенство (43) позволяет заменить $\tau^{2/3}(|\ln\tau|+1)^{\frac{K+3}{12}}$ на $\tau(|\ln\tau|+1)$ в формулах (1),(2),(3),(11) и, таким образом, приблизиться к неулучшаемым одномерным неравенствам, доказанным в [3] (см. замечание 1).

Литература

1. К о л м о г о р о в А.Н. Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых. - Теория вероятн. и ее примен. 1956, т.1, № 4, с.426-436.
2. З а й ц е в А.Ю. Об аппроксимации распределений сумм независимых случайных векторов безгранично делимыми распределениями. - Докл.АН СССР, 1980, т.253, № 2, с.277-279.
3. **З а й ц е в А.Ю., А р а к Т.В. О скорости сходимости во второй равномерной предельной теореме Колмогорова. - Теория вероятн. и ее примен., 1983, т.28, № 2, с. 333-353.**

4. П р о х о р о в Ю.В. О равномерной предельной теореме А.Н. Колмогорова. – Теория вероятн. и ее примен., I960, т.5, № I, с.I03–II3.
5. К о л м о г о р о в А.Н. О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями. – Труды Моск.матем.об-ва, I963, т.I2, с.437–45I.
6. L e C a m L. On the distributions of sums of independent random variables. – In "Bernoulli 1713, Bayes 1763, Laplace 1813", Berlin-Heidelberg – New York, 1965, p.179–202.
7. И б р а г и м о в И.А., П р е с м а н Э.Л. О скорости сближения распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами. – Теория вероятн. и ее примен., I973, т.I8, № 4, с.753–766.
8. З о л о т а р е в В.М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений. – Матем.сб., I976, т.I0I (I43), № 3 (II), с.4I6–454.
9. З а й ц е в А.Ю. Об использовании функции концентрации для оценивания равномерного расстояния. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, I982, т.II9, с.93–I07.
I0. З а й ц е в А.Ю. Оценки расстояния Леви-Прохорова в терминах характеристических функций и некоторые их применения. – Зап. научн.семин.ЛОМИ, I982, т.II9, с.I08–I27.
II. П р о х о р о в Ю.В. Асимптотическое поведение биномиального распределения. – Успехи матем.наук, I953, т.8, № 3, с.I35–I42.
I2. П р е с м а н Э.Л. О многомерном варианте равномерной предельной теоремы Колмогорова. – Теория вероятн. и ее примен., I973, т.I8, № 2, с.396–402.
I3. П е т р о в В.В. Суммы независимых случайных величин. – М., I972, 4I6 с.
I4. Р о т а р ь В.И. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. – Теория вероятн. и ее примен., I970, т.I5, № 2, с.370–372.