Ю. Ф. Коробейник, О представляющих системах подпространств, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 741–755

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 5 (1985)

О ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Ю. Ф. Коробейник

§ 1. Пусть H — линейное топологическое пространство (л.т.п.) над полем скаляров Ф. Последовательность его элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется представляющей системой (п.с.) в H, если любой элемент x из H можно представить в виде сходящегося в H ряда

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad c_k \in \Phi \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется абсолютно-представляющей системой (а.п.с.) в отделимом локально выпуклом пространстве (л.в.п.) H, если любой элемент x из H можно представить в виде ряда (1), абсолютно сходящегося в H. Изложение результатов, полученных для а.п.с. элементов, см. [1].

Пусть теперь $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность подпространств л.т.п. H. Назовем эту последовательность п.с. подпространств в H, если любой элемент x можно представить в виде сходящегося в H ряда

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} y_k, \quad y_k \in H_k \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Далее, назовем последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ а.п.с. (подпространств) в л.в.п. H, если любой элемент x из H можно представить в виде ряда (2), абсолютно сходящегося в H.

Во всех известных нам примерах п.с. и а.п.с. подпространств выполняется одно из двух (частично пересекающихся) условий: 1) для любого $x \in H$ разложение в ряд (2) единственно; тогда $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис подпространств в H — понятие, хорошо изученное, особенно в банаховых и гильбертовых пространствах;

2) все H_n одномерны: $H_n = \alpha x_n$, $\alpha \in \Phi$; в этом случае $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — п.с. или а.п.с. подпространств тогда и только тогда, когда $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — п.с. или а.п.с. элементов в H.

В настоящей статье строятся довольно общие классы п.с. и а.п.с. подпространств, для которых не выполняется ни одно из этих двух условий. Все рассмотрения проводятся в пространстве $H(\mathcal{G})$ аналитических в области $\mathcal{G}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах $\mathcal{G}$ ($\Phi = \mathbb{C}$).

§ **2.** Изложению основных результатов работы предпошлем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $\gamma(r)$ непрерывна в промежутке $[a, +\infty)$, $a > 1$ и такова, что $\gamma(r) \geqslant r/\ln r$, $\gamma(r) = o(r)$ при $r \to \infty$. Положим*

$$\nu(r) = \sup_{u \geqslant r} \frac{\gamma(u)}{u} \quad \text{и} \quad \nu(r) = \nu(a), \qquad 0 \leqslant r \leqslant a;$$

$$\mu(r) = 2\int_0^r \frac{du}{u}\int_0^u \nu(v^2)\,dv; \qquad s_n = [\mu(n)];$$

$$\tilde{\gamma}(r) = \int_0^{\sqrt{r}} \mu(u)\ln\frac{r}{u^2}\,du;$$

$$U_{Q,c} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{Q,c}^{n};$$

$$U_{Q,c}^{n} = \{r : n^2 - c\cdot n^{-2Q} < r < n^2 + c\cdot n^{-2Q}\}, \qquad c > 0, Q > 1.$$

Тогда функция $L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{\lambda}{n^2}\right)^{s_n}\right]$ *обладает следующими свойствами:*

1) $L_1(\lambda) \in [1, 0]$;

2) $\ln|L_1(re^{i\varphi})| = \tilde{\gamma}(r) + o(\tilde{\gamma}(r))$ *при* $r \to \infty$, $r \notin U_{Q,c}$ ($Q > 1$ *и* $c > 0$ *произвольно зафиксированы*). *При этом* $\forall r \geqslant a$ $\tilde{\gamma}(r) \geqslant \gamma(r)$ *и* $\tilde{\gamma}(r) = o(r)$ *при* $r \to \infty$.

Эта лемма является частью леммы 1 [2] (доказательство соответствующей части см. [2, с. 644—647]).

ЛЕММА 2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *множество точек комплексной плоскости, такое, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$ *и* $\exists c > 0$,

$\exists Q > 1$: $\Lambda \cap U_{Q,c} = \varnothing$. *Пусть, далее,* d_n — *произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию:* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| \leqslant 0$. *Тогда можно так выбрать функцию* $\gamma(r)$ *со свойствами, указанными в предыдущей лемме, что* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_n|}{|L_1(\lambda_n)|} < \infty$, *где* $L_1(\lambda)$ — *функция из леммы* 1, *построенная по* $\gamma(r)$.

Доказательство. Пусть $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всех попарно различных членов последовательности $\{|\lambda_n|\}_{n=1}^{\infty}$. Для каждого m существует конечное число номеров q_m ($q_m \geqslant 1$), таких, что $q_m = n_{m+1} - n_m$,

$$|\lambda_{n_m+1}| = |\lambda_{n_m+2}| = \ldots |\lambda_{n_{m+1}}| = \mu_m,$$

$n_m \uparrow \infty$, $n_1 = 0$. Пусть

$$\beta_m = \sup \{ |d_k| : n_m + 1 \leqslant k \leqslant n_{m+1} \}.$$

Тогда $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \frac{\ln \beta_m}{\mu_m} \leqslant 0$. Построим теперь функцию $\gamma(r)$ следующим образом. В точках $r = \mu_l$ положим

$$\hat{\gamma}(\mu_l) = \max \left\{ 2 \ln \beta_l + 4 \ln l, \frac{\mu_l}{|\ln \mu_l|} \right\}, \qquad l \geqslant 1.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{\hat{\gamma}(\mu_l)}{\mu_l} = 0$. Соединив отрезками прямых точки $(0, 0)$, $\left(\mu_l, \frac{\hat{\gamma}(\mu_l)}{\mu_l}\right)$ $(l = 1, 2, \ldots)$, получим график функции $y = v(r)$. Положим $\gamma(r) = r \cdot \max \{v(r), 1/\ln r\}$, $r > 1$. Тогда $\gamma(r) \geqslant r/\ln r$, $\gamma(\mu_l) = \hat{\gamma}(\mu_l)$, $l \geqslant l_0$, $\gamma(r) = o(r)$ при $r \to \infty$. По лемме 1 построим функцию $L_1(\lambda)$, для которой вне $U_{Q,c}$

$$\ln |L_1(re^{i\varphi})| = \tilde{\gamma}(r) + o(\tilde{\gamma}(r)).$$

Отсюда

$$\forall n > N_1 \ \ln |L_1(\lambda_n)| > \tilde{\gamma}(|\lambda_n|)/2,$$

и

$$|d_n/L_1(\lambda_n)| \leqslant |d_n| \exp[-\gamma(|\lambda_n|)/2].$$

Но $\forall n \geqslant 1 \quad \exists l \geqslant 1$: $|\lambda_n| = \mu_l, \quad n_l + 1 \leqslant n < n_{l+1}$, $|d_n| \leqslant \beta_l$, откуда $|d_n/L_1(\lambda_n)| \leqslant \beta_l \exp[-\hat{\gamma}(\mu_l)/2] \leqslant 1/l^2$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n/L_1(\lambda_n)| < \infty.$$

Заметим, что результат, аналогичный лемме 2, имеется в работе [2]. Лемма 2 использовалась (в неявном виде) [3 с. 1096]. Мы сформулировали здесь этот результат для удобства приложений.

§ 3. ТЕОРЕМА 1. *Пусть $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа с индикатором $h(\varphi) > 0$ и нулями λ_n кратности p_n, допускающая на некоторой системе окружностей $|\lambda| = r_n$, $r_n \uparrow \infty$, оценку снизу*: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$:

$$|L(\lambda)| > \exp[h(\arg\lambda) - \varepsilon]\,|\lambda|, \quad |\lambda| = r_n,\ n > N. \quad (3)$$

Пусть, далее, $H_n = \operatorname{span}\{z^s e^{\lambda_k z}: s = 0, 1, \ldots, p_k - 1;\ r_n \leqslant |\lambda_k| < r_{n+1}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ (*полагаем* $r_1 = 0$). *Тогда последовательность* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является п.с. подпространств в пространстве* $H(\mathcal{G})$, *где* $\mathcal{G}$ — *выпуклая область с опорной функцией* $h(-\varphi)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $H_n \neq \varnothing\ \forall n \geqslant 1$, т. е. что в каждом кольце $r_k \leqslant |z| < r_{k+1}$ содержится по крайней мере один нуль λ_j функции $L(\lambda)$ $(j \geqslant k)$. Действительно, если, например, $H_n = \varnothing$, то из последовательности $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ выбросим r_{n+1} и, соответственно, положим

$$\hat{H}_k = H_k,\ k \leqslant n - 1;$$

$$\hat{H}_n = \{z^s e^{\lambda_k z}: s = 0, 1, \ldots, p_k - 1;\ r_n \leqslant |\lambda_k| < r_{n+2}\};$$

$\hat{H}_k = H_{k+1}$, $k \geqslant n + 1$. Новая система подпространств $\{\hat{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ получается удалением из исходной пустого множества H_n и потому будет а.п.с. или п.с. в $H(\mathcal{G})$ в том и только том случае, если таковой является исходная система $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$. Корни λ_j располагаем в порядке неубывания их модуля. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$ и $\forall k \geqslant k_0$ $r_k \geqslant |\lambda_k| > \alpha k$, $\alpha > 0$. Выберем числа $\varepsilon_k > 0$ так, чтобы $\varepsilon_k \to 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_k r_k} < \infty$. Положим

$$U_k = \{r: r_k - e^{-\varepsilon_k r_k} \leqslant r \leqslant r_k + e^{-\varepsilon_k r_k}\}$$

$$(k = 1, 2, \ldots), \quad U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{Q,1}^{k};$$

$$Q > 1; \quad U_{Q,1}^{k} = \{\tau: k^2 - k^{-2Q} < r < k^2 + k^{-2Q}\}$$

$$(k = 1, 2, \ldots) \quad V = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{Q,1}^{k};$$

$\breve{U}$ и $\breve{V}$ — подмножества $(0, +\infty)$ нулевой относительной меры. Можно всегда выбрать а.п.с. экспонент $\{e^{\tau_m z}\}_{m=1}^{\infty}$ в $H(\mathscr{G})$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln k}{\tau_k}=0$ и чтобы $\Omega\bigcap(V\bigcup U)=\varnothing$, где $\Omega=\{\,|\tau_m|\}_{m=1}^{\infty}$. Это можно осуществить, например, методом, разработанным А. Ф. Леонтьевым [4], а именно: построить экспоненциальную функцию вполне регулярного роста с индикатором $h(\varphi)$ и простыми нулями $\{\tau_s\}_{s=t}^{\infty}$. Так, чтобы $\Omega\bigcap(V\bigcup U)=\varnothing$ и чтобы $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ являлось регулярным множеством (определение последнего см. [4, с. 30; 5, с. 126]). Если f — произвольная функция из $H(\mathscr{G})$, то $\exists\ \{d_m\}_{m=1}^{\infty}$: $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}d_m e^{\tau_m z}$, причем ряд сходится абсолютно в $H(\mathscr{G})$. Согласно лемме [6, с. 333—334],

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left[\frac{1}{|\tau_m|}\ln|d_m|+h(\arg\tau_m)\right]\leqslant 0.$$

Следующий этап доказательства заключается в выводе одного вспомогательного равенства для функции $e^{\lambda z}$. Точнее говоря, мы разложим такую функцию в ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$, где $y_n\in H_n$, $n=1, 2, \ldots$ Пусть $\alpha=\inf\limits_{\theta}h(\theta)$, $q\in(0,\ 1)$, $q\mathscr{G}=\{t\in\mathbf{C}\colon\ t=qu,\ u\in\mathscr{G}\}$. Рассмотрим интеграл

$$J_n(z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=r_n}\frac{e^{uz}du}{L(u)(u-\lambda)}\qquad(n=1, 2\ldots).$$

Если $z\in q\mathscr{G}$, $|\lambda|\notin U$, то $\forall\varepsilon<(1-q)/(3\alpha)$ существует такое N, что $n>N$,

$$|J_n|\leqslant r_n\sup_{|u|=r_n}\exp\left[qh(\arg u)-h(\arg u)+\varepsilon+\varepsilon_n\right]|u|<e^{-\delta|r_n|},$$
$$\delta=(1-q)/3\alpha.$$

Отсюда $\forall n>N$ $\sup\{\,|J_{n+1}(z,\lambda)-J_n(z,\lambda)|\,:z\in q\mathscr{G}$, $|\lambda|\in CU<2e^{-\delta r_n}$. Если $r_N>|\lambda|$, $L(\lambda)\neq 0$ и $n>N$, то по теории вычетов

$$J_n=\frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)}-\sum_{k=1}^{\varphi(n)}e^{\lambda_k z}\sum_{j=1}^{p_k}\frac{c_{j,k}z^{p_k-j}}{(\lambda_k-\lambda)^j},$$
$$\varphi(n)=\sup\{k\colon\ |\lambda_k|<r_n\}.$$

Пусть $\Lambda = \{ | \lambda_j | \}_{j=1}^{\infty}$, $B = \Lambda \bigcup U$. Если $z \in \mathcal{G}$ и $| \lambda | \notin B$, то

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} L(\lambda) e^{\lambda_k z} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k} z^{p_k - j}}{(\lambda_k - \lambda)^j} =$$

$$= L(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z, \lambda). \qquad (4)$$

При этом

$$\forall q \in (0, 1) \quad \exists N = N(q),$$

$$\exists \delta = \delta(q) > 0: \ \forall z \in q\mathcal{G}, \quad \forall n > N, \quad |\lambda| \notin B$$

$$|\mu_n(z, \lambda)| \leqslant 2e^{-\delta r_n}, \qquad (5)$$

$$\left| e^{\lambda z} - L(\lambda) \sum_{m=1}^{n} \mu_m(z, \lambda) \right| \leqslant |L(\lambda)| e^{-\delta r_n}, \qquad (6)$$

$$\left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu_m(z, \lambda) \right| \leqslant e^{-\delta r_n}. \qquad (7)$$

Возвращаясь теперь к разложению функции f по системе $\{e^{\tau_m z}\}_{m=1}^{\infty}$, положим $\alpha_m = | d_m | [| L(\tau_m) | + \exp h(\arg \tau_m) | \tau_m |]$, $m = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что

$$\varlimsup_{m \to \infty} \frac{1}{|\tau_m|} \ln \alpha_m \leqslant 0.$$

Пользуясь леммой 2, построим функцию

$$R(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{n^2} \right)^{s_n} \right]$$

из класса $[1, 0]$ так, чтобы $\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha_m}{R(\tau_m)} \right| < \infty$.

Рассмотрим функцию $f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m e^{\tau_m z}}{R(\tau_m)}$. Так как

$$\left| \frac{d_m}{R(\tau_m)} \right| \leqslant \left| \frac{\alpha_m}{R(\tau_m)} \right| e^{-h(\arg \tau_m)|\tau_m|} \leqslant C e^{-h(\arg \tau_m)|\tau_m|},$$

то

$$\varlimsup_{m \to \infty} \left[\frac{1}{|\tau_m|} \ln \left| \frac{d_m}{R(\tau_m)} \right| + h(\arg \tau_m) \right] \leqslant 0,$$

и

$$f_1(z) \in H(\mathcal{G}).$$

В силу (4)

$$e^{\tau_m z} = L(\tau_m) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,m}(z), \qquad \mu_{n,m}(z) \overset{\text{def}}{=} \mu_n(z, \lambda_m).$$

Отсюда $\forall z \in \mathcal{G}\ \forall n \geqslant 1\ \forall N > n$

$$f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \left[\sum_{n=1}^{N} \mu_{n,m}(z) + \sum_{m=N+1}^{\infty} \mu_{n,m}(z) \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} e^{\lambda_k z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k}^{(m)} z^{p_k - j}}{(\lambda_k - \mu_m)^j} + R_N(z) = \sum_{n=1}^{N} y_n(z) + R_N(z),$$

$$y_n \in H_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

При этом в силу неравенства (7) $\forall q \in (0,\ 1)$, $\forall z \in q\mathcal{G}$

$$|R_N(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d_m L\tau_m}{R(\tau_m)} \right| e^{-\delta r_N} = c e^{-\delta r_N}.$$

Таким образом, $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$, где $y_n \in H_n$, и ряд сходится в $H(\mathcal{G})$.

Пусть $R(D)$ — оператор свертки с характеристической функцией

$$R(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \lambda^l \colon\ (R(D)\, y)(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l y^{(l)}(z).$$

Тогда $\forall z \in \mathcal{G}\ f(z) = R(D) f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (R(D)\, y_n)(z)$, причем ряд сходится в $H(\mathcal{G})$ в силу непрерывности оператора $R(D)$ (см. [7]). При этом

$$R(D)\, y_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} R(\lambda_k)\, e^{\lambda_k z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k}}{(\lambda_k \tau_m)^j} = w_n,$$

где $w_n \in H_n$. Теорема доказана.

§ 4. Установим теперь аналогичный результат для а.п.с. подпространств.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1 *и, кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{r_n} = 0.$$

Тогда $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— а.п.с. подпространств в* $H(\mathcal{G})$.

Доказательство. Повторяя дословно доказательство теоремы 1, приходим к равенству $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$, где $y_n \in H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и ряд сходится в $H(\mathcal{G})$. Покажем, что он сходится в $H(\mathcal{G})$ абсолютно. Имеем $\forall z \in \mathcal{G}$, $\forall n \geqslant 1$

$$y_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{n,m}(z) \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)}.$$

На основании оценки (5) получаем, что $\forall q \in (0, 1)$ $\exists \delta > 0$, $\exists N < \infty$:

$$\sup_{z \in q\mathcal{G}} |y_n(z)| \leqslant 2e^{-\delta r_n} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \right| \leqslant ce^{-\delta r_n},$$
$$\forall n > N.$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$ сходится абсолютно в $H(\mathcal{G})$. Но тогда, как при доказательстве теоремы 1, находим, что $\forall z \in \mathcal{G}$

$$f(z) = (R(D) f_1)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z), \quad w_k = R(D) y_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно в $H(\mathcal{G})$, причем $w_k \in H_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Теорема 2 доказана. Пусть выполняются все предположения теоремы 1. Из последовательности $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно всегда извлечь достаточно редкую подпоследовательность $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^{\infty} = \{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, так чтобы $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\ln k}{\tilde{r}_k} = 0$. Так как на окружностях $|z| = r_n$ по предположению имеет место оценка (3), то по теореме 2 в $H(\mathcal{G})$ будет абсолютно-представляющей последовательность подпространств $\{\tilde{H}_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $\tilde{H}_k = \operatorname{span}\{z^s e^{\lambda_j z}\colon s = 0, 1, \ldots, p_j - 1;\ \tilde{r}_k \leqslant |\lambda_m| < \tilde{r}_{k+1}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Замечание 2. В теоремах 1—2 можно заменить условие $h(\varphi) > 0$ более слабым требованием: сопряженная диаграмма функции $L(\lambda)$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку. Этот более общий случай сводится к случаю $h(\varphi) > 0$ с помощью перехода от функции $L(\lambda)$ к функции $L_0(\lambda) = e^{\alpha\lambda} L(\lambda)$. При таком переходе пространства H_n не меняются, а индикатор функции L_0 при подходящем выборе α уже положителен. Критерий того, что сопряженная диаграмма экспоненциальной функции $L(\lambda)$ содержит по крайней мере одну внутреннюю точку, приведен в [4, с. 97].

§ 5. Укажем класс функций $L(\lambda)$, для которых имеется нужная нам оценка снизу на окружностях $|z| = r_n$, $n = 1, 2, \ldots$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа вполне регулярного роста и множество $\mathcal{G}$ всех внутренних точек ее сопряженной диаграммы непусто. Тогда существует последовательность $r_n \uparrow \infty$, $r_1 = 0$, такая, что $r_{n+1}/r_n \to 1$ и $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — а.п.с. подпространств в $H(\mathcal{G})$, где H_n — подпространства, фигурирующие в теореме* 1.

Доказательство. Как установлено в [4, с. 41], всегда найдется последовательность окружностей $|z| = \rho_n$, где $\rho_n \uparrow \infty$, $\rho_{n+1}/\rho_n \to 1$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N\colon \ |L(\lambda)| \geqslant \exp[h(\arg\lambda) - \varepsilon]\,|\lambda|,$$
$$|\lambda| = \rho_n,\ n > N.$$

Если $\ln n/\rho_n \to 0$, то теорема доказана. Если же последнее условие не выполняется, то извлечем из $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\rho_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, так чтобы $r_{k+1}/r_k \to 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln k}{r_k} = 0$. С этой целью положим $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, а при $s \geqslant 3$ $n_s = \min\{j > n_{s-1}\colon\ \rho_j > (\ln s)^2\}$. Тогда $\forall s \geqslant 3$ $r_s = \rho_{n_s} > (\ln s)^2$. В то же время для любого $s \geqslant 3$ или $n_s - 1 = n_{s-1}$, или $n_s - 1 > n_{s-1}$, но $\rho_{n_s-1} \leqslant (\ln s)^2$. В первом случае $r_s = \rho_{n_{s-1}+1}$, $1 \leqslant \dfrac{r_s}{r_{s-1}} = \dfrac{\rho_{n_{s-1}+1}}{\rho_{n_{s-1}}}$, а во втором

$$1 \leqslant \frac{r_s}{r_{s-1}} = \frac{\rho_{n_s}}{\rho_{n_s-1}} \cdot \frac{\rho_{n_s-1}}{r_{s-1}} \leqslant \frac{\rho_{n_s}}{\rho_{n_s-1}} \cdot \left[\frac{\ln s}{\ln(s-1)}\right]^2.$$

Из этих неравенств следует, что при $s \to \infty$ $r_s/r_{s-1} \to 1$. Кроме того,

$$\varlimsup_{s\to\infty} \frac{(\ln s)^2}{r_s} \leqslant 1$$

и подавно

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\ln s}{r_s} = 0.$$

Остается сослаться на теорему 2.

В связи с теоремой 3 напомним (см. [3]), что если $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа с индикатором $h(\varphi)$ и простыми нулями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, и $\mathcal{G}$ — (непустая) выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$, то $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ — а.п.с. в $H(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполняются такие два условия:

а) $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста (при показателе 1);

б) в классе $[1, 0]$ найдется функция $c(\lambda)$, отличная от тождественного нуля и такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{c(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+h(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0.$$

В частности, условия а — б выполнены, если $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — регулярное множество. В то же время существуют целые функции вполне регулярного роста (при показателе 1) с простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{c(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|=+\infty,$$

какова бы ни была функция $c(\lambda)$ из класса $[1, 0]$, отличная от тождественного нуля (простой пример такой функции был указан А. Ф. Леонтьевым [3, с. 1085]. В этом случае $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ — не а.п.с. в $H(\mathcal{G})$, но по теореме 3 $\{H_n\}$ — п.с. подпространств и $\{\tilde{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — а.п.с. подпространств в $H(\mathcal{G})$. В данном случае

$$H_n=\operatorname{span}\{e^{\lambda_k z}:\ r_n\leqslant|\lambda_k|<r_{n+1}\},$$

$$\tilde{H}_n=\operatorname{span}\{e^{\lambda_k z}:\ \tilde{r}_n\leqslant|\lambda_k|<\tilde{r}_{n+1}\},$$

$$r_n\uparrow\infty,\quad \frac{r_{n+1}}{r_n}\to 1,\quad \frac{\tilde{r}_{n+1}}{\tilde{r}_n}\to 1,\quad \frac{\ln n}{\tilde{r}_n}\to 0.$$

Иначе говоря, если $L(\lambda)$ — произвольная функция вполне регулярного роста (при показателе 1) с простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и индикатором $h(\varphi)$, а $\mathcal{G}$ — выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$, то не всегда любую функцию f из пространства $H(\mathcal{G})$ можно представить в виде абсолютно сходящегося в $H(\mathcal{G})$ ряда

$$f(z)=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\beta_k e^{\lambda_k z}, \tag{8}$$

но каждой функции f из $H(\mathcal{G})$ можно сопоставить ряд вида (8), некоторая подпоследовательность $\{S_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ частных сумм которого абсолютно сходится к f в $H(\mathcal{G})$.

При этом индексы $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$ не зависят от f и определяются функцией L.

Приведенные выше доказательства теорем 1—3 позволяют эффективно строить разложения любой функции $f \in H(\mathscr{G})$ в сходящийся или абсолютно сходящийся ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ $(y_n \in H_n$ или $y_n \in \tilde{H}_n)$. Однако способ определения «координатных функций» y_n довольно сложен. В случае, когда $f(z) \in H(\overline{\mathscr{G}})$ (т. е. когда f аналитична на $\overline{\mathscr{G}}$), координатные функции можно определить довольно просто, не пользуясь «промежуточной» а.п.с. $\{e^{\tau_m z}\}_{m=1}^{\infty}$ и не привлекая леммы 1 и 2. Этот случай был исследован ранее А. Ф. Леонтьевым, получившим представление f в виде ряда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ с помощью введенной им интерполирующей функции (см. [4, с. 300—307]).

§ 6. Представляющие системы подпространств можно исследовать методами, развитыми в [1, 3, 5] применительно к представляющим системам элементов. Например, можно получить результаты, аналогичные изложенным в § 1—2 [5]. Однако при переходе от п.с. элементов к п.с. подпространств возникают значительные трудности. В частности, пока не удается получить для п.с. подпространств квазиполиномов (рассмотренных в теоремах 1—3 вида) критерий в терминах нетривиального разложения нуля, аналогичный следствию 2 теоремы 12 [3]. В последующей части настоящей работы излагаются некоторые из результатов общего характера, полученных для п.с. подпространств в пространстве $H(\mathscr{G})$ аналитических и выпуклой области $\mathscr{G}$ функций. Предварительно условимся говорить, как в [1], что выпуклая область $\mathscr{G}_1$ дополнима к выпуклой области $\mathscr{G}$, если найдется ограниченное замкнутое выпуклое множество $\mathscr{F}$, такое, что $\mathscr{G}_1 + \mathscr{F} = \mathscr{G}$ (как обычно, $\mathscr{G}_1 + \mathscr{F}$ — арифметическая сумма множеств $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{F}$). Пусть M_n, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность подмножеств комплексной плоскости $\mathbf{C}$, p_α — натуральные числа и

$$\mathscr{E}_n = \operatorname{span}\{z^s e^{\lambda_\alpha z} : s = 0, 1, \ldots p_\alpha - 1;\ \lambda_\alpha \in M_n\}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Замыкание $\mathscr{E}_n$ в топологии $H(\mathscr{G})$ обозначим символом $\mathscr{E}_n^0$, а в топологии $H(\mathscr{G}_1)$ — символом $\mathscr{E}_n^1$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\mathscr{G}$ *и* $\mathscr{G}_1$ — *произвольные выпуклые области (не обязательно ограниченные) и пусть* $\mathscr{G}_1$ *дополнима к* $\mathscr{G}$. *Тогда если* $\{\mathscr{E}_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ — *п. с. (или а.п.с.) подпространств в* $H(\mathscr{G})$, *то* $\{\mathscr{E}_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ — *п.с. (соответственно а.п.с.) подпространств в* $H(\mathscr{G}_1)$.

Доказательство. Проведем его методом, примененным в [8] для п.с. элементов. Именно: пусть $L(\lambda)$ — целая функция вполне регулярного роста (при показателе 1) с сопряженной диаграммой $\mathscr{F}$ (такая функция всегда найдется, см. [4, с. 79, 100; 5, с. 124]). Пусть M — оператор свертки с характеристической функцией $L(\lambda)$. Тогда (см. [9]) M — эпиморфизм $H(\mathscr{G})$ на $H(\mathscr{G}_1)$ и $\forall f \in H(\mathscr{G}_1)\, \exists g \in H(\mathscr{G})$: $(Mg)(z) = f(z)$, $\forall z \in \mathscr{G}_1$. По условию $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$, $\forall z \in \mathscr{G}$, где $y_n \in \mathscr{E}_n^0$ и ряд сходится (соответственно, абсолютно сходится) в $H(\mathscr{G})$. Отсюда $\forall z \in \mathscr{G}_1\; f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (My_n)(z)$. Используя $M(z^p e^{\beta z}) = \sum_{s=0}^{p} C_p^s L^{(p-s)}(\beta) z^s e^{\beta z}$ и непрерывность M как оператора из $H(\mathscr{G})$ в $H(\mathscr{G}_1)$, находим, что $My_n \in \mathscr{E}_n^1$. При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (My_n)(z)$ сходится (соответственно абсолютно сходится) в $H(\mathscr{G}_1)$.

Заметим, что в случае, когда все множества M_n одноточечны, а $p_\alpha = 1$, $\forall \alpha$, теорема 4 была получена ранее А. Ф. Леонтьевым (см. [8]).

Рассматривая в качестве $\mathscr{G}$ выпуклые многоугольники, и используя рассуждения, [8, с. 245—246] нетрудно показать, что если отбросить условие дополнимости $\mathscr{G}_1$ к $\mathscr{G}$, то теорема 4 в общем случае уже неверна.

§ 7. В [1] было введено понятие представительного подпространства для данной п.с. элементов. Действуя по аналогии, назовем подпространство H_0 пространства H $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$-представительным (или абсолютно представительным) для H, если из того, что любой элемент x из H_0 можно представить в виде ряда (2), сходящегося (абсолютно сходящегося) в H, следует, что $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — п.с. (соответственно, а.п.с.) в H. Представительное подпространство H_0 называется $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — эффективно представительным для H, если из того, что известен эффективный способ определения «координатных» функций y_n для любого элемента x из H_0 следует возможность эффективного их определения для любого элемента x_∞ из всего пространства H. Аналогично определяются $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$-эффективно абсолютно представительные подпространства для H.

Обозначим символом $A_\infty(\mathscr{G})$ пространство всех функций, аналитических в ограниченной области $\mathscr{G}$ и бесконечно-дифференцируемых на множестве $\overline{\mathscr{G}}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\mathscr{G}$ — ограниченная выпуклая область и H_n — замкнутые инвариантные относительно дифференцирования подпространства $H(\mathscr{G})$ ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда $A_\infty(\mathscr{G})$ — $\{H_n\}$ — эффективно-представительное (и эффективно абсолютно представительное) подпространство для $H(\mathscr{G})$.*

Замечание 3. В случае, если H_n — одномерные пространства: $H_n = \{be^{\lambda_n z}: b \in \mathbf{C}\}$, теорема 5 фактически была получена ранее Ю. И. Мельником (см. [2, а также 1, гл. II, § 4]).

ЛЕММА 3. *Пусть $\mathscr{G}$ — произвольная область и H_0 — произвольное замкнутое подпространство $H(\mathscr{G})$, инвариантное относительно дифференцирования. Тогда пространство H_0 инвариантно относительно любого оператора M типа свертки с характеристической функцией из класса* $[1, 0]$.

Действительно, любой такой оператор M имеет вид

$$(Mg)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{(k)}(z), \quad g \in H(\mathscr{G}), \quad z \in \mathscr{G},$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \in [1, 0].$$

Тогда M — непрерывный оператор в $H(\mathscr{G})$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ сходится в $H(\mathscr{G})$, $\forall y \in H(\mathscr{G})$. Так как $a_k y^{(k)}(z) \in H_0$, $\forall y \in H_0$, и H_0 — замкнутое подпространство $H(\mathscr{G})$, то $My \in H_0$, $\forall y \in H_0$.

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathscr{G}$ — ограниченная выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$. Для любой функции f из $H(\mathscr{G})$ найдутся функции g из $A_\infty(\mathscr{G})$ и $L(\lambda)$ из* $[1, 0]$ *такие, что $f(z) = (Mg)(z)$, $\forall z \in \mathscr{G}$, где M — оператор типа свертки с характеристической функцией $L(\lambda)$.*

Эта лемма фактически имеется (в неявной форме) в [2]. Для доказательства леммы возьмем а. п. с. экспонент в $H(\mathscr{G})$ $\{e^{\tau_m z}\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\tau_k} = 0$ и $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty} \cap \cap U_{Q,c} = \varnothing$, где множество $U_{Q,c}$ определено в лемме 1.

Тогда

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\tau_k z},$$

где

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left[\frac{1}{|\tau_k|}\ln|c_k|+h(\arg\tau_k)\right]\leqslant 0.$$

Положим $d_k=|c_k|\,|\tau_k|^{p_k}\exp[h(\arg\tau_k)|\tau_k|]$, где $p_k\uparrow\infty$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k\ln|\tau_k|}{\tau_k}=0.$$

Тогда

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{|\tau_k|}\ln|d_k|\leqslant 0.$$

Найдем по лемме 2 функцию $L(\lambda)$ из $[1,0]$ так, чтобы $\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{d_m}{L(\tau_m)}\right|<\infty$. Рассмотрим функцию $f_1(z)=$ $=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m e^{\tau_m z}}{L(\tau_m)}$. Очевидно, что $f_1\in A_\infty(\mathcal{G})$ и что $\forall z\in\mathcal{G}$ $(Mf_1)(z)=f(z)$, где M — оператор типа свертки с характеристической функцией $L(\lambda)$.

Доказательство теоремы 5. Пусть f — произвольная функция из $H(\mathcal{G})$. По лемме 4 $\exists g\in A_\infty(\mathcal{G})$,

$$\exists My=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z):\ \sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\in[1,0]$$

и $(Mg)(z)=f(z)$, $\forall(z)\in\mathcal{G}$. Если $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$, где $u_n\in H_n$ и ряд сходится (абсолютно сходится) в $H(\mathcal{G})$, то $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(z)$, где $v_n=Mu_n\in H_n$ и ряд сходится (соответственно, абсолютно сходится) в $H(\mathcal{G})$.

При этом, если мы умеем эффективно определять «координатные функции» u_n для любой g из $A_\infty(\mathcal{G})$, то мы сумеем эффективно определить и «координаты» $v_n=$ $=Mu_n$ любой функции f из $H(\mathcal{G})$.

В связи с теоремой 5 нам представляется весьма интересным выяснить, будет ли пространство $H(\overline{\mathcal{G}})$ функций, аналитических на $\overline{\mathcal{G}}$, $\{H_n\}$-представительным подпространством для $H(\mathcal{G})$, где H_n — замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство $H(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$ — ограниченная выпуклая область). Ответ на этот вопрос неизвестен даже в случае, если все H_n одномерны.

Ростовский государственный
университет

Поступило
08.06.83

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы.— Успехи мат. наук, 1981, т. 36, вып. 1, с. 73—126.

[2] Мельник Ю. И. К вопросу о представлении регулярных функций рядами Дирихле.— Математические заметки, 1977, т. 21, вып. 5, с. 641—652.

[3] Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1980, т. 44, № 5, с. 1066—1114.

[4] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.

[5] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.

[6] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1978, т. 42, № 2, с. 325—355.

[7] Valiron G. Sur les solutions des equations differentielles lineares d'ordre infini et a coefficients constants.— Ann. Ec. Norm. Sup., 1929, t. 46, p. 25—53.

[8] Коробейник Ю. Ф., Леонтьев А. Ф. О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент.— Математические заметки, 1980, т. 28, вып. 2, с. 243—253.

[9] Коробейник Ю. Ф. Об одном функциональном уравнении.— Математические заметки, 1969, т. 5, вып. 6, с. 733—742.