V. Z. Tsalyuk, Properties of Solutions of Functional-Differential Equations with Measure,
Differ. Uravn., 2004, Volume 40, Number 3, 346–355

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 346–355

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОЙ

© 2004 г. В. З. Цалюк

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием и обобщенным входным воздействием

$$\dot{x}(t) = \int\limits_a^t d_s R(t,s)x(s) + F'(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

где $R : \Delta \to \mathbb{R}^{N\times N}$ – матрица-функция, имеющая ограниченную вариацию по второму аргументу, $\Delta = \{(t,s) : t \in [a,b], \ s \in [a,t]\}$, $F \in \mathbf{BV}[a,b]$, F' – обобщенная производная функции F, $x : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ – искомая вектор-функция ограниченной вариации.

Всюду далее будем предполагать, что функция R удовлетворяет следующим условиям:

1) функция R измерима в Δ;

2) при почти каждом $t \in [a,b]$ вариация $\bigvee_a^t R(t,\cdot) \le v(t)$, где v – суммируемая на $[a,b]$ функция; функции $R(t,\cdot)$ правильные*);

3) функции $R(\cdot,s)$ суммируемы*) на $[s,b]$ при любом $s \in [a,b]$; отображение $t \mapsto R(t,t)$ суммируемо на $[a,b]$.

Мы называем функцию $g \in \mathbf{BV}[a,b]$ правильной, если $g(t) \in [g(t-0), g(t+0)]$ для всех $t \in (a,b)$. Для таких функций для определения $\bigvee_a^b g$ можно использовать любую последовательность разбиений отрезка $[a,b]$, мелкость которых стремится к нулю; все точки разбиений, не совпадающие с концами отрезка $[a,b]$, можно считать точками непрерывности функции g. В случае $N = 1$ для функционала $Gx = \int_a^b dg\, x$ на пространстве $\mathbf{C}[a,b]$, порожденного правильной функцией g, норма $\|G\| = \bigvee_a^b g$.

Интеграл, стоящий в правой части (1), – это многозначный интеграл Стилтьеса, определенный для функции x ограниченной вариации. Такой интеграл введен и его свойства изучены в работе [1]. Ниже мы сформулируем определение и ряд утверждений о свойствах этого интеграла.

1. Вспомогательные факты, обозначения и понятия. Через $J(g)$ будем обозначать множество точек разрыва функции $g \in \mathbf{BV}[a,b]$ внутри интервала (a,b).

Через $\bar{\Gamma}(g)$ обозначим дополненный график функции g, т.е. множество, состоящее из "вертикальных отрезков" $\{a\} \times [g(a), g(a+0)]$, $\{b\} \times [g(b-0), g(b)]$ и $\{t\} \times [g(t-0), g(t+0)]$ для $t \in (a,b)$. Функции f и g назовем эквивалентными, если $\bar{\Gamma}(f) = \bar{\Gamma}(g)$.

Через $\mathrm{Comp}(\mathbb{R}^N)$ обозначим совокупность непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^N$. Для множеств A, B обозначим $\beta(A,B) = \sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} \operatorname{dist}(a,b)$ – хаусдорфово полуотклонение множеств. Справедливо "неравенство треугольника" $\beta(A,B) \le \beta(A,C) + \beta(C,B)$. Для множества $A \in \mathrm{Comp}(\mathbb{R}^N)$ обозначим $\|A\| = \sup\limits_{a\in A} |a| = \beta(A, \{0\})$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность функций $F_n \in \mathbf{BV}[a,b]$ β-сходится к $F \in \mathbf{BV}[a,b]$, и записывать это в виде $F_n \xrightarrow{\beta} F$, если 1) $\beta(\bar{\Gamma}(F_n), \bar{\Gamma}(F)) \to 0$;

*) В работе [2] условия правильности и суммируемости при любом s были пропущены по недосмотру автора. Выполнения этих условий всегда можно добиться, поправив функцию R так, что интегралы Римана–Стилтьеса от непрерывных функций x не изменятся.

2) $F_n(a) \to F(a)$ и $F_n(b) \to F(b)$. Если, кроме этого, 3) $\bigvee_a^b F_n \to \bigvee_a^b F$, то назовем последовательность функций F_n нормально сходящейся к F и такую сходимость будем обозначать следующим образом: $F_n \xrightarrow{N} F$.

Вопрос о возможности аппроксимации функции $F \in \mathbf{BV}[a,b]$ нормально сходящейся последовательностью абсолютно непрерывных функций решается положительно с помощью конструкции, которая предложена в работе [1] и понадобится нам в дальнейшем.

Предложение 1. *Для $F \in \mathbf{BV}[a,b]$ существует последовательность абсолютно непрерывных функций, нормально сходящаяся к F.*

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ рассмотрим конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ такое, что: a) $\sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| > \bigvee_a^b F - \delta$, b) $\max\limits_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1}) < \delta$, c) $\max\limits_{1 \le i \le n} \bigvee_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} F < \delta$, d) по крайней мере один из концов отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ является точкой непрерывности F.

Каждое из этих требований может быть удовлетворено добавлением конечного числа точек в разбиение без нарушения предыдущих требований.

Через $l_\delta(t)$ обозначим непрерывную кусочно-линейную функцию, построенную по узлам $(t_i, F(t_i))$. В работе [1] доказано, что функции l_δ нормально сходятся к F при $\delta \to 0$. Предложение доказано.

Многозначный интеграл определяется следующим образом [1].

Определение 2. Пусть $g, x \in \mathbf{BV}[a,b]$. Множество всех пределов вида $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b dg_n\, x$, где g_n – непрерывные функции ограниченной вариации, нормально сходящиеся к правильной функции, эквивалентной g, называется многозначным интегралом Стилтьеса от разрывной функции $x \in \mathbf{BV}[a,b]$ и обозначается $\int_a^b dg\, x$.

Пример 1. Если $g(t) = x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 1 \end{cases}$ (значение в точке 1 несущественно), то $\int_0^2 dg\, x = [x(1-0), x(1+0)] = [0,1]$.

Здесь мы приведем лишь те свойства интеграла, которые будут использованы в этой работе.

Предложение 2 [1, теорема 1, следствие 1]. *Множество $\int_a^b dg\, x$ непусто, компактно и выпукло, $\| \int_a^b dg\, x \| \le \bigvee_a^b g \cdot \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Если функции g и x не имеют общих точек разрыва в интервале (a,b), то интеграл состоит из одной точки, совпадающей со значением обычного интеграла Римана–Стилтьеса.*

Предложение 3 [1, теорема 2]. *Если в каждом из концов отрезка $[a,b]$ хотя бы одна из функций x, g непрерывна, то $\int_a^b dg\, x = g(b)x(b) - g(a)x(a) - \int_a^b g\, dx$.*

Предложение 4 [1, теорема 5]. *Для $x, y, g \in \mathbf{BV}[a,b]$ справедливо включение*

$$\int_a^b dg\,(x+y) \subset \int_a^b dg\, x + \int_a^b dg\, y,$$

причем равенство имеет место при $J(g) \cap J(x) \cap J(y) = \emptyset$.

Предложение 5 [1, теорема 7]. *Если $x_n \xrightarrow{\beta} x$ и в каждом из концов отрезка $[a,b]$ хотя бы одна из функций g, x непрерывна, то $\beta(\int_a^b dg\, x_n, \int_a^b dg\, x) \to 0$.*

Назовем многозначную функцию $X : [a,b] \to \mathrm{Comp}(\mathbb{R}^N)$ ограниченно суммируемой, если она измерима [3, 4] и существует такая суммируемая скалярная функция χ, что $\|X(t)\| \le \chi(t)$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда в силу теоремы А.А. Ляпунова (см. [4, теорема 1.7.10; 3]) множество $\int_a^b X(t)\, dt$ непусто, выпукло и компактно, причем $\int_a^b X(t)\, dt = \int_a^b \overline{\mathrm{co}\, X(t)}\, dt$ ($\mathrm{co}\, X$ – выпуклая оболочка множества X).

Предложение 6 (лемма о суммируемости [2]). *Если $x \in \mathbf{BV}[a,b]$, то функция $X(t) = \int_a^t d_s R(t,s)\, x(s)$ ограниченно суммируема на $[a,b]$.*

2. Общее понятие решения.

Определение 3. Функция ограниченной вариации x называется решением уравнения (1) с $F \in \mathbf{BV}[a,b]$ на отрезке $[a,b]$, если функция $y(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - F(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду удовлетворяет включению $\dot{y}(t) \in \int_a^t d_sR(t,s)x(s)$.

В частном случае абсолютно непрерывной функции F последнее включение превращается в уравнение, эквивалентное обычному уравнению с последействием (1) (с суммируемым свободным членом), однозначная разрешимость которого в принятых здесь условиях известна (см., например, [5]).

Замечание 1. Каждому решению $\tilde{x}$ уравнения (1) соответствует отличающееся от него только значением в точке a решение задачи

$$\dot{x}(t) = \int_a^t d_sR(t,s)x(s) + \Phi'(t), \quad x(a) = \tilde{x}(a) + (F(a+0) - F(a))$$

с непрерывной в точке a функцией Φ: $\Phi(a) = F(a+0)$, $\Phi(t) = F(t)$ для $t > a$ и обратно. Поэтому в дальнейшем при изучении свойств множеств решений мы сможем при необходимости считать функцию F непрерывной в точке a.

Далее, так как эквивалентным функциям F соответствуют эквивалентные решения x, то можно рассматривать только правильные функции F и x.

Пример 2. Рассмотрим на отрезке $[0,3]$ уравнение (1) со следующими параметрами:

$$R(t,s) = \begin{cases} 0, & s < 1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & s > 1, \quad t < 2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & s > 1, \quad t > 2, \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (1,0)^{\text{т}}, & t > 1 \end{cases}$$

(т – знак транспонирования).

Решения этого уравнения, удовлетворяющие начальному условию $x(0) = 0$, имеют вид

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \left(1 + \int_1^t \alpha(s)\,ds, 0\right)^{\text{т}}, & 1 < t < 2, \\ \left(1 + \int_1^t \alpha(s)\,ds, \int_2^t \alpha(s)\,ds\right)^{\text{т}}, & t > 2, \end{cases}$$

где α – произвольная суммируемая функция со значениями $\alpha(t) \in [0,1]$.

Замечание 2. Сечение интегральной воронки $H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{x(t) |\ x$ – решение задачи Коши$\}$ в этом примере имеет вид

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \operatorname{co}\{(1,0)^{\text{т}}, (t,0)^{\text{т}}\}, & t \in (1,2], \\ \operatorname{co}\{(1,0)^{\text{т}}, (t-1, t-2)^{\text{т}}, (2,0)^{\text{т}}, (t, t-2)^{\text{т}}\}, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим последовательность уравнений

$$\dot{x}(t) = \int_a^t d_sR(t,s)x(s) + F_n'(t). \tag{2}$$

Лемма 1. *Если функции F_n β-сходятся к F и x_n – решения уравнений (2) с ограниченной последовательностью значений $x_n(a)$, то*

a) последовательность функций $y_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_n(t) - F_n(t)$ компактна в смысле равномерной на $[a,b]$ сходимости,

b) если $y_n(t) \to y(t)$ равномерно на $[a,b]$, то функция $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) + F(t)$ является решением уравнения (1).

Доказательство. Функции y_n абсолютно непрерывны и, согласно предложению 4, почти всюду удовлетворяют включениям

$$\dot{y}_n(t) \in \int_a^t d_s R(t,s) x_n(s) = \int_a^t d_s R(t,s) y_n(s) + \int_a^t d_s R(t,s) F_n(s).$$

Отсюда

$$|\dot{y}_n(t)| \leq \int_a^t d_s r(t,s) |y_n(s)| + \varphi(t),$$

где $r(t,s) = \bigvee_a^s R(t,\cdot)$ и $\varphi(t) = \sup\limits_{s\in[a,b],n} |F_n(s)| \cdot v(t)$.

Так как функции $R(t,\cdot)$ правильные, а $R(\cdot,s)$ суммируемые, то функция r измерима по совокупности аргументов, а отображение $t \mapsto r(t,t)$ суммируемо. Кроме того, $r(t,a) = 0$ и $\bigvee_a^t r(t,\cdot) \leq v(t)$.

Поэтому (см., например, [5]) существует решение z задачи

$$\dot{z}(t) = \int_a^t d_s r(t,s) z(s) + \varphi(t), \quad z(a) = z_0,$$

где $z_0 > \sup\limits_n |y_n(a)|$. Для всех n имеем $|y_n(t)| < z(t)$, $t \in [a,b]$. В самом деле, если это не так, то $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \in [a,b] \,|\, |y_n(t)| \geq z(t)\} \in (a,b]$ и $|y_n(\tau)| = z(\tau)$. На отрезке $[a,\tau]$ имеем $|y_n(s)| \leq z(s)$ и, следовательно, $d|y_n(t)|/dt \leq \dot{z}(t)$. Отсюда

$$|y_n(\tau)| = |y_n(a)| + \int_a^\tau \frac{d}{dt}|y_n(t)|\,dt < z(a) + \int_a^\tau \dot{z}(t)\,dt = z(t),$$

и мы получили противоречие.

Таким образом, последовательность функций y_n равномерно ограничена. Из оценки

$$|\dot{y}_n(t)| \leq \sup_{s\in[a,b]} z(s) \cdot v(t) + \varphi(t) \tag{3}$$

следует равностепенная абсолютная непрерывность y_n. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Функция y абсолютно непрерывна как предел равностепенно абсолютно непрерывной последовательности функций. Будем считать F непрерывной справа в точке a, тогда решение x обладает этим же свойством. Так как функции x_n β-сходятся к x на $[a,b]$, то такая сходимость имеет место на почти каждом отрезке $[a,t]$ [1, лемма 3]. Поэтому (предложение 5) $\beta(\int_a^t d_s R(t,s)x_n(s), \int_a^t d_s R(t,s)x(s)) \to 0$.

Согласно предложению 6 (лемма о суммируемости) и теореме Лебега о предельном переходе для интеграла от многозначной функции [2, лемма 3], для $t_0, t_1 \in [a,b]$, $t_0 < t_1$,

$$\beta\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_a^t d_s R(t,s) x_n(s)\,dt, \int_{t_0}^{t_1}\int_a^t d_s R(t,s) x(s)\,dt\right) \to 0$$

и, следовательно,

$$y(t_1)-y(t_0)=\lim_{n\to\infty}(y_n(t_1)-y_n(t_0))=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^t d_sR(t,s)x_n(s)\,dt\in\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^t d_sR(t,s)x(s)\,dt.$$

Отсюда в силу леммы 4 из [2] для почти всех t имеем

$$\dot y(t)\in\int\limits_a^t d_sR(t,s)x(s).$$

А это и означает, что x является решением уравнения (1). Лемма доказана.

Отсюда следует

Теорема 1. *Пусть K – компактное подмножество $\mathbb{R}^N$. Множество всех решений x уравнения (1) с $x(a)\in K$ компактно в смысле равномерной сходимости на $[a,b]$.*

Теорема 2. *Функция $x\in\mathbf{BV}[a,b]$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда существует такая $\varphi\in\mathbf{L}_1(a,b)$, что для почти всех $t\in[a,b]$*

$$\varphi(t)\in\int\limits_a^t d_sR(t,s)F(s),$$

а $y(t)\overset{\text{def}}{=}x(t)-F(t)$ является решением уравнения

$$\dot y(t)=\int\limits_a^t d_sR(t,s)y(s)+\varphi(t).$$

Доказательство. Если x – решение, то функция $\varphi(t)\overset{\text{def}}{=}\dot y(t)-\int_a^t d_sR(t,s)\,y(s)$ принадлежит $\mathbf{L}_1(a,b)$. Далее, для почти всех $t\in[a,b]$ в силу предложения 4 имеем

$$\varphi(t)\in\int\limits_a^t d_sR(t,s)x(s)-\int\limits_a^t d_sR(t,s)y(s)=\int\limits_a^t d_sR(t,s)F(s).$$

Пусть, наоборот, функция φ удовлетворяет указанным условиям. Тогда функция y абсолютно непрерывна и для почти всех $t\in[a,b]$ имеем

$$\dot y(t)\in\int\limits_a^t d_sR(t,s)y(s)+\int\limits_a^t d_sR(t,s)F(s)=\int\limits_a^t d_sR(t,s)x(s)$$

(последнее равенство получается опять из предложения 4), т.е. x – решение уравнения (1). Теорема доказана.

Замечание 3. Иными словами, решения задачи Коши для уравнения (1) поставлены во взаимно однозначное соответствие с суммируемыми селекторами многозначной функции $\int_a^t d_sR(t,s)F(s)$.

Так как значения этой функции суть выпуклые множества (предложение 2), то из теоремы 2 легко получается

Теорема 3. *Пусть K – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$. Множество всех решений x уравнения (1) с $x(a)\in K$ выпукло.*

3. Аппроксимируемые решения и решения с памятью. Здесь мы рассмотрим некоторые более узкие классы решений уравнения (1).

Определение 4. Назовем функцию x аппроксимируемым решением уравнения (1), если существуют такие последовательности абсолютно непрерывных функций F_n и решений x_n уравнений (2), что 1) $F_n \xrightarrow{\beta} F$, 2) $x_n(t) - F_n(t) \to x(t) - F(t)$ равномерно на $[a,b]$.

Следующий пример показывает, что не всякое решение уравнения (1) является аппроксимируемым.

Пример 3. Выберем одно из множества решений примера 2, положив $\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$

Получим $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (1,0)^{\mathrm{T}}, & 1 < t < 2, \\ (t-1, t-2)^{\mathrm{T}}, & t > 2. \end{cases}$

Это решение не является аппроксимируемым. Действительно, допустим, что оно аппроксимируемое и F_n – указанные в определении 4 функции. Будем считать, что $F_n(0) = 0$, и вычислим решения x_n уравнений (2), удовлетворяющие нулевому начальному условию

$$x_n(t) = \begin{cases} F_n(t), & t \le 1, \\ F_n(t) + F_n^{(1)}(1)(t-1, 0)^{\mathrm{T}}, & t \in (1,2], \\ F_n(t) + F_n^{(1)}(1)(t-1, t-2)^{\mathrm{T}}, & t > 2, \end{cases} \tag{4}$$

где $F_n^{(1)}$ – первая компонента вектора F_n. В частности, $x_n(3) = F_n(3) + F_n^{(1)}(1)\cdot(2,1)^{\mathrm{T}}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n(3) - F_n(3)) = \lim_{n\to\infty} F_n^{(1)}(1)\cdot(2,1)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Предположение, что $x_n(3) - F_n(3) \to x(3) - F(3) = (1,1)^{\mathrm{T}}$ при покомпонентном сравнении с (5) приводит к противоречию.

Замечание 4. Этот пример также показывает, что существуют точки интегральной воронки (например, $(2,1)^{\mathrm{T}}$ при $t = 3$), недостижимые для аппроксимируемых решений. Из формулы (4) видно, что сечение интегральной воронки аппроксимируемых решений $H_a(t) \overset{\mathrm{def}}{=}$ $\overset{\mathrm{def}}{=} \{x(t) |\ x$ – аппроксимируемое решение задачи Коши$\}$ здесь имеет вид

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \mathrm{co}\,\{(1,0)^{\mathrm{T}}, (t,0)^{\mathrm{T}}\}, & t \in (1,2], \\ \mathrm{co}\,\{(1,0)^{\mathrm{T}}, (t, t-2)^{\mathrm{T}}\}, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Применяя предложение 1 и лемму 1, получаем следующие утверждения.

Теорема 4. *a) Задача Коши для уравнения (1) имеет аппроксимируемое решение;*

b) всякое аппроксимируемое решение уравнения (1) является решением.

Первое утверждение следующей теоремы получается из утверждения а) леммы 1, доказательство второго стандартно.

Теорема 5. *Пусть функции $F_n \in \mathbf{BV}[a,b]$ β-сходятся к F. Если x_n – аппроксимируемые решения уравнений (2) и последовательность $\{x_n(a)\}$ ограничена, то*

a) последовательность функций $y_n(t) \overset{\mathrm{def}}{=} x_n(t) - F_n(t)$ компактна в смысле равномерной на $[a,b]$ сходимости;

b) если $y_n(t) \to y(t)$ равномерно на $[a,b]$, то функция $x(t) \overset{\mathrm{def}}{=} y(t) + F(t)$ является аппроксимируемым решением уравнения (1).

В частности, справедлива

Теорема 6. *Пусть K – компактное подмножество $\mathbb{R}^N$. Тогда множество всех аппроксимируемых решений x уравнения (1) с $x(a) \in K$ компактно в смысле равномерной сходимости на $[a,b]$.*

Также имеет место аналог теоремы 3.

Теорема 7. *Пусть K – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$. Тогда множество всех аппроксимируемых решений x уравнения (1) с $x(a) \in K$ выпукло.*

Доказательство. Пусть x^0 и x^1 – два аппроксимируемых решения уравнения (1), получаемые из решений x_i^0 и x_i^1 уравнений со свободными членами соответственно F_i^0 и F_i^1, как указано в определении 4. Так как $F_i^0 \xrightarrow{\beta} F$ и $F_i^1 \xrightarrow{\beta} F$, то выпуклые комбинации $\lambda F_i^1 + (1-\lambda)F_i^0$ (где $\lambda \in (0,1)$) β-сходятся к F при $i \to \infty$ [1, лемма 4]. В силу непрерывности x_i^k, $k=0,1$ (и, следовательно, линейности интеграла), функции $y_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^0 - F = \lambda(x_i^1 - F) + (1-\lambda)(x_i^0 - F)$ почти всюду удовлетворяют равенству

$$\dot{y}_i(t) = \int_a^t d_sR(t,s)(x_i^1 + (1-\lambda)x_i^0)(s)$$

и $\lim\limits_{i\to\infty} y_i(t) = \lambda \lim\limits_{i\to\infty}(x_i^1(t) - F(t)) + (1-\lambda)\lim\limits_{i\to\infty}(x_i^0(t) - F(t)) = \lambda x^1(t) + (1-\lambda)x^0(t) - F(t)$ равномерно на $[a,b]$. Теорема 7 доказана.

Априори более узкое понятие решения можно ввести, если заменить в определении 4 требование β-сходимости F_n к F на более жесткое требование нормальной сходимости. Далее выяснится, что в действительности при этом сужения понятия решения не происходит.

Теперь рассмотрим одно свойство решений, которое может быть существенно для приложений. Смысл его в том, что если значение решения в момент скачка τ существенно влияет на дальнейшее поведение системы и это значение измерено в момент τ каким-то устройством, то в дальнейшем для определения поведения системы используется только это уже определенное значение $x(\tau)$. Решение, рассмотренное в примере 3, как раз этим свойством не обладает: значение $x(1)$ измерено двумя независимыми устройствами, на интервале $(1,2)$ используется результат одного измерения, а на $(2,3)$ – другого.

Далее в этом пункте будем считать, что функция F правильна и непрерывна в точке a.

Определение 5. Решение x уравнения (1) называется решением с памятью, если существует такая правильная функция $\bar{x} \in \mathbf{BV}[a,b]$, эквивалентная x, что для функции $y(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - F(t)$ почти всюду справедливо равенство

$$\dot{y}(t) = (\mathrm{S})\int_a^t d_sR(t,s)\bar{x}(s), \tag{6}$$

где символ $(\mathrm{S})\int$ означает интеграл Лебега–Стилтьеса.

Теорема 8. *Следующие утверждения относительно функции $x \in \mathbf{BV}[a,b]$ эквивалентны:*

a) x – аппроксимируемое решение уравнения (1);

b) существуют такие последовательности абсолютно непрерывных функций $F_n \xrightarrow{N} F$ и соответствующих им решений x_n уравнений (2), что $x_n(t) - F_n(t) \to x(t) - F(t)$ равномерно на $[a,b]$;

c) x – решение с памятью уравнения (1).

Доказательство. 1°. c) $\Rightarrow$ b). Пусть x – решение с памятью. Положим $y(t) = x(t) - F(t)$ и $\bar{F}(t) = \bar{x}(t) - y(t)$ (тогда $\bar{F}$ имеет в точках разрыва такое же поведение, как и $\bar{x}$). По функции $\bar{F}$ построим аппроксимации l_δ, как это сделано в доказательстве предложения 1. Тогда $l_\delta \xrightarrow{N} F$ при $\delta \to 0$. Пусть x_δ – решение уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_a^t d_sR(t,s)x(s) + l'_\delta(t) \tag{7}$$

с тем же начальным значением, что и рассматриваемое решение x, и $y_\delta = x_\delta - l_\delta$.

Пусть $\delta \to 0$, пробегая счетное множество значений. Для любой точки $\tau \in J(\bar{F})$ при достаточно малых δ имеем $l_\delta(\tau) = \bar{F}(\tau)$, поэтому $x_\delta(s) \to \bar{x}(s)$ для всех $s \in [a,b]$. Кроме того, как показано в доказательстве леммы 1, функции x_δ равномерно ограничены на $[a,b]$. Отсюда для почти всех $t \in [a,b]$

$$\dot{y}_\delta(t) = (\mathrm{S})\int_a^t d_sR(t,s)x_\delta(s) \to (\mathrm{S})\int_a^t d_sR(t,s)\bar{x}(s) = \dot{y}(t).$$

Производные $\dot{y}_\delta(t)$ имеют общую суммируемую мажоранту (см. доказательство леммы 1), поэтому в силу теоремы Лебега $y_\delta(t) \to y(t)$ для всех $t \in [a,b]$. Согласно лемме 1а), мы можем выделить такую подпоследовательность значений $\delta \to 0$, что сходимость $y_\delta(t) \to y(t)$ (вдоль этой подпоследовательности) равномерна на $[a,b]$.

2°. b) ⇒ a). Это очевидно, так как из нормальной сходимости следует β-сходимость.

3°. a) ⇒ c). Пусть x – аппроксимируемое решение. Тогда для функций F_n (определение 4) равенство $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ имеет место для всех точек непрерывности функции F. В силу леммы 2a) работы [1] для $\tau \in J(F)$ из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, для которой (после перенумерации ее элементов) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\tau) \in [F(\tau-0), F(\tau+0)]. \tag{8}$$

Применив диагональный процесс, получим (8) для всех точек $\tau \in J(F)$. Обозначим

$$\bar{F}(t) = \lim_{n\to\infty} F_n(t), \quad y(t) = x(t) - F(t), \quad \bar{x}(t) = y(t) + \bar{F}(t), \tag{9}$$

тогда $\bar{x}(t) = x(t)$ в точках непрерывности и $\bar{x}(\tau) \in [x(\tau-0), x(\tau+0)]$ для $\tau \in J(F) = J(x)$.

Пусть x_n – решения уравнений (2), о которых идет речь в определении 4. Согласно (9), $\bar{x}(s) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(s)$ для всех $s \in [a,b]$. Поэтому $\int_a^t d_sR(t,s)x_n(s) \to (\mathrm{S})\int_a^t d_sR(t,s)\bar{x}(s)$ и последний интеграл есть суммируемая функция аргумента t. Обозначим $y_n(t) = x_n(t) - F_n(t)$, тогда $y_n(t) \to y(t)$ для $t \notin J(F)$. Для $t_2 > t_1$ имеем $y(t_2) - y(t_1) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n(t_2) - y_n(t_1)) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_a^t d_sR(t,s)x_n(s)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{S})\int_a^t d_sR(t,s)\bar{x}(s)\,dt$, откуда следует справедливость равенства (6) для почти всех t. Таким образом, x – решение с памятью. Теорема доказана.

4. Формула Коши. Как известно [5, 6], для решений уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_a^t d_sR(t,s)x(s) + f(t)$$

с суммируемой функцией f справедлива формула Коши

$$x(t) = C(t,a)x(a) + \int_a^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{10}$$

где $C(t,s)$ – функция Коши.

Следуя [5, 6], опишем построение функции Коши. Интегрированием по частям уравнение (1) приводится к виду

$$\dot{x}(t) = \int_a^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + K(t,a)x(a) + f(t), \tag{11}$$

где $K(t,s) = R(t,t) - R(t,s)$. Заметим, что $K(t,t) = 0$.

Уравнение (11) решается как интегральное уравнение второго рода относительно $\dot{x}$, после чего интегрированием находим x. Таким образом получаются формула (10) и функция

$$C(t,s) = E + \int_s^t P(\tau,s)\,d\tau, \tag{12}$$

где E – единичная матрица, $P(t,s)$ – ядро вольтеррова интегрального оператора $\mathbf{P}$, $I + \mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} (I - \mathbf{K})^{-1} = I + \mathbf{K} + \mathbf{K}^2 + \ldots + \mathbf{K}^n + \ldots$, $(\mathbf{K}z)(t) = \int_a^t K(t,s)z(s)\,ds$.

Ядро P найдем, суммируя ряд Неймана

$$P(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,s), \tag{13}$$

где итерированные ядра K_n определяются равенствами

$$K_1(t,s) = K(t,s), \quad K_{n+1}(t,s) = \int_s^t K_n(t,\tau)K(\tau,s)\,d\tau, \quad n \geq 1.$$

Корректность всех выкладок обеспечивается следующими свойствами итерированных ядер, которые проверяются по индукции. Через $\mathfrak{A}$ обозначим множество полной меры, состоящее из тех $t \in [a,b]$, для которых вариация $\bigvee_a^t R(t,\cdot) \leq v(t) < \infty$.

Предложение 7. *a) Функции* K_n *суммируемы на* Δ, *а итерационная формула может быть заменена на* $K_{n+1}(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)K_n(\tau,s)\,d\tau$;

b) функции $K_n(\cdot,s)$ *суммируемы на* $[s,b]$ *при любом* $s \in [a,b]$ *(в частности, функции* $K_n(\cdot,a)$ *суммируемы на* $[a,b]$ *);*

c) $K_n(t,t) = 0$;

d) $|K_n(t,s)| \leq (v(t)/(n-1)!)(\int_s^t v(\tau)\,d\tau)^{n-1}$ *для* $t \in \mathfrak{A}$ *и* $s \in [a,b]$;

e) при $t \in \mathfrak{A}$ *вариация* $\bigvee_a^t K_n(t,\cdot) \leq (v(t)/(n-1)!)(\int_a^t v(\tau)\,d\tau)^{n-1}$.

Таким образом, при почти всех t ряд Неймана абсолютно сходится равномерно по s. Интегрируя его сумму согласно (12), получаем следующие свойства функции Коши.

Теорема 9 (см. также [5, 6]). *a) Функция* C *суммируема в* Δ;

b) функция $C(\cdot,s)$ *абсолютно непрерывна на* $[s,b]$ *при любом* $s \in [a,b]$;

c) $C(t,t) = E$;

d) для всех $(t,s) \in \Delta$ *справедлива оценка* $|C(t,s)| \leq \exp(\int_s^t v(\tau)\,d\tau)$;

e) при любом $t \in [a,b]$ *функция* $C(t,\cdot)$ *имеет конечную вариацию на* $[a,t]$ *(равномерно ограниченную по* t *):* $\bigvee_a^t C(t,\cdot) \leq \exp(\int_a^t v(\tau)\,d\tau)$.

По аналогии с (10) запишем формулу

$$X(t) = C(t,a)x(a) + \int_a^t C(t,s)\,dF(s). \tag{14}$$

Интеграл в ней, согласно теореме 9, определен как многозначный интеграл Стилтьеса, поэтому функция X многозначна и имеет непустые выпуклые компактные образы.

Интегрируя по частям (предложение 3), для почти всех $t \in [a,b]$ имеем $X(t) = C(t,a)(x(a) - F(a)) + F(t) - \int_a^t d_sC(t,s)\,F(s)$. Поэтому в силу предложения 6 многозначная функция X ограниченно суммируема.

Пусть x – аппроксимируемое решение, F_n и x_n – соответствующие последовательности абсолютно непрерывных функций и решений уравнений (2). Для них формула (10) записывается в виде

$$x_n(t) = C(t,a)x_n(a) + \int_a^t C(t,s)\,dF_n(s). \tag{15}$$

Для почти всех t (точнее, для $t \notin J(F)$), так как $F_n \xrightarrow{\beta} F$ на $[a,t]$, согласно предложению 5 $\rho(\int_a^t C(t,s)\,dF_n(s), \int_a^t C(t,s)\,dF(s)) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\rho(x_n(t), X(t)) \to 0$. В силу замкнутости множества $X(t)$ имеем $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \in X(t)$ для всех $t \notin J(x)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 10. *Аппроксимируемое решение x уравнения (1) во всех своих точках непрерывности удовлетворяет включению*

$$x(t) \in C(t,a)x(a) + \int_a^t C(t,s)\,dF(s).$$

Замечание 5. В примерах 2 и 3 функция Коши $C(t,s)$ имеет вид

$C(t,s)$	$s \le 1$	$s \in (1,2]$	$s > 2$
$t \le 1$	E		
$t \in (1,2]$	$\operatorname{diag}(t,1)$	E	
$t > 2$	$\begin{pmatrix} t & 0 \\ t-2 & 1 \end{pmatrix}$	E	E

Подставив эту функцию в (14), получим равенство $X(t) = H_a(t)$ (выражение для $H_a(t)$ см. в замечании 4). В то же время множества $H(t)$ (см. замечание 2) при $t > 2$ содержат точки, не лежащие в $X(t)$. Таким образом, включение $x(t) \in X(t)$ для решений общего вида может нарушаться.

Не всякий селектор $x(t) \in X(t)$, такой, что разность $x - F$ абсолютно непрерывна, является решением уравнения (1). Действительно, обе компоненты любого решения в примере 2 монотонно не убывают, что необязательно для селектора многозначной функции H_a.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00511).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsalyuk V.Z.* // Funct. Differ. Equat. 2002. V. 9. № 3–4. P. 551–576.
2. *Цалюк В.З.* // Вестн. ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения. 2002. С. 221–238.
3. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* // Топология, дифференциальные уравнения, динамические системы: Тр. Мат. ин-та АН СССР. Т. 169. М., 1985. С. 194–252.
4. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1982. Т. 19. С. 127–230.
5. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М., 2002.
6. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь, 2001.

Кубанский государственный университет,
г. Краснодар

Поступила в редакцию
20.09.2002 г.