

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Формалев, Численное исследование сопряженного теплообмена в условиях фильтрации и пленочного охлаждения затупленных анизотропных тел, *ТВТ*, 1992, том 30, выпуск 2, 334–344

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

17 января 2025 г., 07:50:16



УДК 536.21 © 1992 г.

Формалев В.Ф.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА В УСЛОВИЯХ ФИЛЬТРАЦИИ И ПЛЕНОЧНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Предложены математическая модель и метод численного решения сопряженных задач тепломассообмена по определению теплового состояния затупленных тел в условиях многомерной анизотропной теплопроводности фильтрации и пленочного охлаждения. Получены численные результаты, даны практические рекомендации.

В данной работе исследуется сопряженный теплообмен на поверхности носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА) с тепловой защитой, использующей анизотропную фильтрацию капельной жидкости через организованные поры с образованием защитной жидкой пленки, ее течением и испарением.

Оригинальность этого способа тепловой защиты заключается в использовании таких жидких охладителей, динамическая вязкость которых существенно уменьшается при умеренном возрастании температур, что позволяет автоматически регулировать подачу охладителя в местах локального изменения тепловых потоков и температур при одном и том же перепаде давления [1]. К таким жидкостям относится, например, глицерин, вязкость которого уменьшается в 10^4 раз при нагревании от 288 до 473 К [2]. Кроме этого, достоинством такого способа тепловой защиты является сохранение первоначальной геометрии затупленного тела при гиперзвуковых скоростях.

На рис. 1 представлена схема тепловой защиты, на которой изображены просверленные для большей равномерности охлаждения фильтрационные отверстия в различных направлениях. В каждой точке коэффициенты теплопроводности и проницаемости в различных направлениях различны и тело становится анизотропным.

При моделировании предлагаемого способа тепловой защиты необходимо совместно решать следующие задачи:

теплообмена между охладителем, находящимся под постоянным давлением p_{w2} , и внутренней границей тела $w2$;

анизотропной теплопроводности с учетом фильтрации;

анизотропной фильтрации капельной жидкости под действием перепада давления $\Delta p = p_{w2} - p_e(x, \tau)$ и уменьшающейся вязкости жидкости;

образования и течения жидкой пленки с сопряженным теплообменом на наружной границе тела $w1$;

теплообмена, трения, испарения жидкой пленки и диффузии паров в сжимаемом градиентном газодинамическом пограничном слое.

Опуская систему уравнений газодинамического пограничного слоя, математическую модель всего процесса можно описать следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных (системы координат представлены на рис. 2).

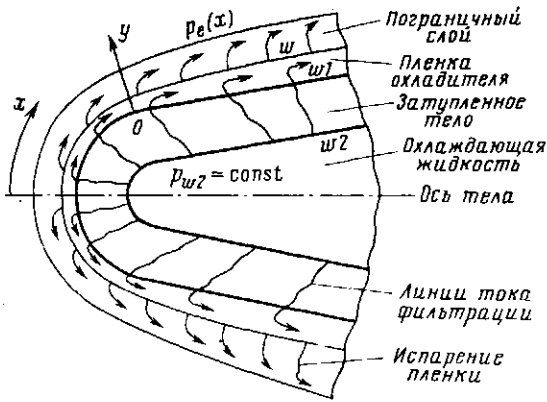


Рис. 1. Схема тепловой защиты

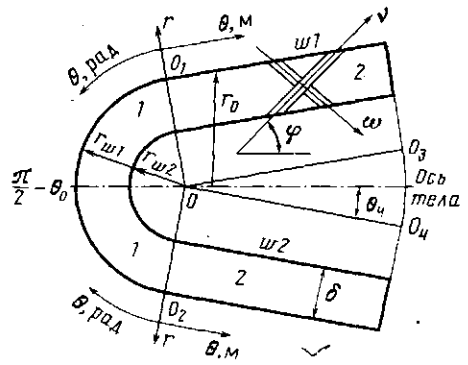


Рис. 2. Расчетная геометрия и системы криволинейных координат

1. Уравнения, описывающие течение и теплообмен в жидкой пленке в приближении теории пограничного слоя

$$\frac{\partial(ur\delta'_0)}{\partial x} + \frac{\partial(vr\delta''_0)}{\partial y} = 0, \quad s = \begin{cases} 1 - \text{для осевого тела,} \\ 0 - \text{для плоского тела;} \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho_f u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_f \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho_f u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_f v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_f}{(c_p)_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$\text{при } y=0: u(x, 0) = 0, \quad (4)$$

$$v(x, 0) = v_{w1}(x), \quad (5)$$

$$T(x, 0) = T_{w1}(x), \quad (6)$$

$$\text{при } y=\delta_f: (\partial u/\partial y)_w = \tau_{g-f}/\mu_f, \quad (7)$$

$$v(x, \delta_f) = v_{ev}(x), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &[(\alpha/c_p)_w (I_e - I_w) - \beta(\rho v)_{ev} (I_e - I_w)] (1 + \bar{q}_c) - \lambda_f (\partial T/\partial n)_w = (\rho v)_{ev} Q_{ev}^*, \\ &\bar{q}_c = Q_c / (I_e - I_w). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Задача теплопроводности в анизотропном теле с учетом фильтрации

$$\begin{aligned} c(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\kappa \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\kappa-1} \lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2 \cos^{\kappa-1} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos^{\kappa-1} \theta' \times \right. \\ &\times \lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial r} \left. \right) + \frac{1}{r^2 \cos^{\kappa-1} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos^{\kappa-1} \theta' \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \\ &- \Pi (c\rho)_f (\bar{V}_f, \text{grad } T), \quad \theta' = \theta + \theta_0, \kappa = \begin{cases} 2 - \text{для осевого тела,} \\ 1 - \text{для плоского тела;} \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$c(T) \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta}) - \Pi(\rho c)_f (\bar{V}_f, \text{grad } T) + \chi \frac{\partial T}{\partial r} + \chi_1 \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

$$\chi = \frac{\lambda_{rr} \cos \theta_0 + \lambda_{\theta r} \sin \theta_0}{r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0},$$

$$\chi_1 = \frac{\lambda_{r\theta} \cos \theta_0 + \lambda_{\theta\theta} \sin \theta_0}{r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0}. \quad (11)$$

Уравнение (10) выведено для области 1, уравнение (11) — для области 2

$$\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial n} \Big|_{w1}^- = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{w1}^+, \quad T_f|_{w1}^- = T|_{w1}^+, \quad (12)$$

если граница $w1$ закрыта пленкой, и

$$\left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_{w1} (I_e - I_{w1}) - \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{w1} - \epsilon_{w1} \sigma T_{w1}^4 = 0, \quad (13)$$

если пленка полностью испарилась;

$$\alpha_{w2} (T_{e2} - T_{w2}) + \lambda_n (\partial T / \partial n)_{w2} = 0, \quad (14)$$

$$T(r, \theta, 0) = \Phi(r, \theta). \quad (15)$$

Компоненты тензора теплопроводности Λ определяются соотношениями [3]

$$\lambda_{rr} = \lambda_\nu(T) \sin^2(\theta' - \varphi) + \lambda_\omega(T) \cos^2(\theta' - \varphi),$$

$$\lambda_{\theta\theta} = \lambda_\nu(T) \cos^2(\theta' - \varphi) + \lambda_\omega(T) \sin^2(\theta' - \varphi), \quad (16)$$

$$\lambda_{r\theta} = \lambda_{\theta r} = [\lambda_\nu(T) - \lambda_\omega(T)] \sin(\theta' - \varphi) \cos(\theta' - \varphi),$$

где φ — угол между осью ν и продольной осью тела.

3. Задача фильтрации в анизотропном теле

$$\text{div } \bar{V}_f = 0, \quad |\bar{V}_f| = \sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}, \quad (17)$$

$$\bar{V}_f = -K \text{grad } p / \mu_f(T), \quad (18)$$

$$p(r_{w1}, \theta) = p_e(\theta), \quad (19)$$

$$p(r_{w2}, \theta) = p_{w2} = \text{const}. \quad (20)$$

Компоненты тензора проницаемости K — k_{rr} , $k_{r\theta}$, $k_{\theta r}$, $k_{\theta\theta}$ в законе Дарси (18) получаются подстановкой в (16) главных коэффициентов проницаемости k_ν , k_ω вместо главных коэффициентов теплопроводности λ_ν , λ_ω .

4. Теплообмен на границе $w2$. В соответствии с [4] коэффициент теплоотдачи α_{w2} в условиях естественной конвекции определяется по следующим критериальным соотношениям:

$$\alpha_{w2} = \frac{\epsilon_k \lambda_f}{r_{w2}}; \quad \epsilon_k = \begin{cases} 1, & (\text{GrPr})_f \leq 10^3 \\ 0,105 (\text{GrPr})_f^{0,3}, & 10^3 < (\text{GrPr})_f \leq 10^6 \\ 0,4 (\text{GrPr})_f^{0,2}, & 10^6 < (\text{GrPr})_f \leq 10^{10}, \end{cases} \quad (21)$$

$$(\text{GrPr})_f = 9,8 (T_{w2} - T_{e2}) r_{w2}^3 (c\rho^2)_f / (\mu\lambda)_f,$$

а температура жидкости T_{e2} — из интегро-дифференциального уравнения

$$(c\rho G)_f \frac{\partial T_{e2}}{\partial \tau} = \int_F [\alpha_{w2}(T_{w2} - T_{e2}) - c_f(\rho|\bar{V}|)_f \times \\ \times (T_{e2} - \Phi(r_{w2}, \theta))] dF. \quad (22)$$

5. Тепло- и массообмен на границе w . На непроницаемой границе w параметры теплообмена $(\alpha/c_p)_w$ и I_e определяются по формулам [5], а трение и диффузия — по аналогии между трением, теплообменом и бинарной диффузией частиц газа испарившейся пленки. Таким образом, если известны $(\alpha/c_p)_w$ и I_e , то касательное напряжение τ_{g-f} , входящее в (7), определяется из равенства

$$\tau_{g-f} = \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_w \frac{du_e}{dx} \times \text{Pr}^{2/3}, \quad (23)$$

а производная скорости вязкого газодинамического потока — из уравнения Бернулли (распределение давления по переменной x заимствовано из [6])

$$dp_e/dx = -\rho_e u_e du_e/dx, \quad du_e/dx = \beta_e. \quad (24)$$

Известно, что массовая скорость испарения $(\rho v)_{ev}$ зависит от концентрации пара на испаряющейся границе и, следовательно, от парциального давления пара и температуры на этой границе. Связь между парциальным давлением пара $(p_{ev})_w$ и температурой T_w границы испаряющейся жидкости устанавливается с помощью уравнения [1]

$$\ln \frac{(p_{ev})_w}{p_e} = \frac{Q_{ev}^* M_{ev}}{R} \left(\frac{1}{T_{ev}^*} - \frac{1}{T_w} \right), \quad (25)$$

а связь между парциальным давлением пара и его концентрацией — равенствами

$$(p_{ev})_w = p_e (c_{ev})_w \frac{\bar{M}}{M_{ev}}, \quad \frac{1}{\bar{M}} = \frac{(c_{ev})_w}{M_{ev}} + \frac{1 - (c_{ev})_w}{M_e}. \quad (26)$$

Исключая из равенств

$$q_w = -\lambda_f \frac{I_e - I_w}{c_p} \left(\frac{\partial \bar{I}_e}{\partial y} \right)_w, \quad (27)$$

$$(\rho v)_{ev} = (\rho v)_{ev} (c_{ev})_w - \rho D [(c_{ev})_e - (c_{ev})_w] \frac{\partial \bar{c}_{ev}}{\partial y} \Big|_w \quad (28)$$

производную $\frac{\partial \bar{I}_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{I}_e}{\partial y} \Big|_w = \frac{\partial \bar{c}_{ev}}{\partial y} \Big|_w \right)$, $\rho D = \frac{\lambda}{c_p}$ в соответствии с аналогией между теплообменом и массообменом) и положив $(c_{ev})_e = 0$, получим выражение

$$(c_{ev})_w = (\rho v)_{ev} [(\rho v)_{ev} + (\alpha/c_p)_w]^{-1}, \quad (29)$$

подставив которое в (26), найдем связь между парциальным давлением пара и массовой скоростью испарения

$$(p_{ev})_w = p_e \left[1 + \frac{M_{ev}}{M_e} \frac{(\alpha/c_p)_w}{(\rho v)_{ev}} \right]^{-1}. \quad (30)$$

Уравнения (25) и (30) устанавливают связь между массовой скоростью испарения $(\rho v)_{ev}$ и температурой T_w наружной границы пленки (достаточно (30) подставить в (25)), т.е. из (25) можно определить температуру T_w по известной $(\rho v)_{ev}$.

Таким образом математическая модель (1)–(25), (30) замкнута. Ее решение определяет следующие характеристики: $T(r, \theta, \tau)$, $p(r, \theta, \tau)$, $u_r(r, \theta, \tau)$, $u_\theta(r, \theta, \tau)$, $(\rho v)_w(x, \tau)$, $(\rho v)_{ev}(x, \tau)$, $u(x, y, \tau)$, $v(x, y, \tau)$, $T(x, y, \tau)$.

Метод решения. При решении комплексной проблемы (1)–(30) о тепловом состоянии затупленного тела, в силу существенной нелинейности системы, необходимо использовать итерационные процедуры. В этой связи должны быть разработаны алгоритмы определения теплового состояния системы вне итерационного цикла и процедуры их уточнения в итерационном цикле.

С этой целью задачу (1)–(9) рассмотрим в переменных Дородницына–Лиза

$$\xi = \rho_f \int_0^x u_e \mu_{fw2} r^{2s} dx, \quad \eta = \frac{\rho_f u_e r^s}{\sqrt{2\xi}} y \quad (31)$$

с введением функции тока $\psi(\xi, \eta)$, безразмерной функции тока $f(\xi, \eta)$, относительной скорости $f'_\eta(\xi, \eta)$ и относительной температуры $\vartheta(\xi, \eta)$

$$\psi = \sqrt{2\xi} f(\xi, \eta), \quad f'_\eta = \frac{u(\xi, \eta)}{u_e(\xi)}, \quad \vartheta(\xi, \eta) = \frac{T - T_{w2}}{T_{w2}}, \quad (32)$$

причем уравнение неразрывности (1) удовлетворяется автоматически, так как $\partial\psi/\partial y = \rho_f u r^s$, $\partial\psi/\partial x = -\rho_f v r^s$.

Тогда задача (1)–(9) будет иметь вид

$$(\bar{\mu} f''_\eta)_\eta + f f''_\eta + \beta_e \left(\frac{\rho_e}{\rho_f} - f'^2_\eta \right) = 2\xi f'_\eta f''_\eta, \quad (33)$$

$$\text{Pr}_{w2}^{-1} \vartheta''_\eta + f \vartheta'_\eta = 2\xi f'_\eta \vartheta'_\xi, \quad (34)$$

$$f'_\eta(\xi, 0) = 0, \quad (35)$$

$$f(\xi, 0) \equiv f_{w1}(\xi) = \frac{v_{w1}(\xi) \sqrt{2\xi}}{u_e(\xi) \mu_{w2} r^s(\xi)}, \quad (36)$$

$$\vartheta(\xi, 0) = \vartheta_{w1}(\xi), \quad (37)$$

$$f''_\eta(\xi, \bar{\delta}) = \frac{\tau_{g-f}(\xi) \sqrt{2\xi}}{u_e^2(\xi) \mu_{w2} r^s(\xi)} \equiv t(\xi), \quad (38)$$

$$\bar{\delta} f'_\eta(\xi, \bar{\delta}) - f(\xi, \bar{\delta}) = \frac{v_{ev}(\xi) \sqrt{2\xi}}{u_e(\xi) \mu_{w2} r^s(\xi)}, \quad (39)$$

$$\left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_w [\bar{T}_e - \vartheta(\xi, \bar{\delta})] (1 + \bar{q}_c) - \frac{\rho u_e r^s \lambda_f}{c_f \sqrt{2\xi}} \sqrt{1 + \epsilon_n^2} \times \\ \times \frac{\partial \vartheta(\xi, \bar{\delta})}{\partial \eta} = (\rho v)_{ev} [Q_{ev}^*/I_{w2} + \beta(\bar{T}_e - \vartheta(\xi, \bar{\delta})) (1 + \bar{q}_c)], \quad (40)$$

где

$$\bar{\delta} = \eta(\delta_f), \quad \epsilon_n = \frac{\partial T}{\partial x} / \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \text{Pr}_{w2} = \left(\frac{\mu c}{\lambda} \right)_{w2f}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_f}{\mu_{w2f}}$$

Гидродинамические и тепловые характеристики жидкой пленки на нулевой итерации определяются следующим образом:

1) массовая скорость испарения – из понятия эффективной энтальпии жидкости с использованием баланса тепла (9) или (40), в котором I_w заменена на I_{ev}^*

$$(\rho v)_{ev} = \frac{(\alpha/c_p)_w (I_e - I_{ev}^* + 0,21 Q_c) - \lambda_f (\partial T/\partial n)_w}{Q_{ev}^* + \beta(I_e - I_{ev}^* + 0,21 Q_c) + c_f T_{ev}^*}; \quad (41)$$

2) распределение относительной функции тока $f(\xi, \eta)$ и относительной скорости

$f'_\eta(\xi, \eta)$ – из решения автомодельного приближения задачи (33), (35), (36), (38), т.е. правая часть в (33) принимается равной нулю, а коэффициент $f(\xi, \eta)$ во втором слагаемом – значению

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= c \exp[a(\bar{\delta} - \eta)] - \eta^2 b / 2a + ac \exp(a\bar{\delta}) \eta - c \exp(a\bar{\delta}) + f_{w1}, \\ a &= f_{w1}(\xi) / \bar{\mu}, \\ b &= -\beta_e \rho_e / \bar{\mu} \rho_f, \quad c = (at + b) / a^3, \end{aligned} \quad (42)$$

полученному из аналитического решения уравнения (33) без правой части и линеаризованного заменой $f(\xi, \eta) = f_{w1}(\xi)$;

3) массовая скорость расхода охладителя на границе $w1$ – из выражения

$$\begin{aligned} \rho_f v_{w1} &= \frac{\Pi^{1,5}}{2\sqrt{k_{rr}}} \int_0^1 \mu_f d\bar{r} \left[\frac{\Pi^3}{4k_{rr}} \left(\int_0^1 \mu_f d\bar{r} \right)^2 + \rho_f \sqrt{k_{rr}} \Pi^{1,5} (p_{w2} - p_e) / \bar{\delta} \right]^{1/2}, \\ \bar{r} &= (r - r_{w2}) / (r_{w1} - r_{w2}), \end{aligned} \quad (43)$$

полученного из одномерного нелинейного закона фильтрации [7]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu_f}{k_{rr}} v_{w1} - \frac{1}{\sqrt{k_{rr}} \Pi^{1,5}} \rho_f v_{w1}^2;$$

4) толщина пленки в точке $x = x_i$ – из баланса массы в каждом сечении, начиная от точки полного торможения

$$\delta_{fi} = \left\{ [2\mu_{fi} \int_0^{x_i} (v_{w1} - v_{ev}) dx] / (\tau_{g-f})_i \right\}, \quad (44)$$

$$(\tau_{g-f})_i = \left\{ \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_{wi} (1 + \bar{q}_c) - (\rho v)_{evi} \left[\frac{Q_{ev}^*}{I_e - I_{wi}} + \beta(1 + \bar{q}_c) \right] \right\} u_{ei} \text{Pr}^{1/3};$$

5) температура пленки принимается постоянной и равной температуре T_w наружной границы пленки, определяемой из соотношения

$$-\ln \left[1 + \frac{M_{ev}}{M_e} \frac{(\alpha/c_p)_w}{(\rho v)_{ev}} \right] = \frac{Q_{ev}^* M_{ev}}{R} \left(\frac{1}{T_{ev}^*} - \frac{1}{T_w} \right), \quad (45)$$

полученного подстановкой (30) в (25).

Уточнение всех перечисленных характеристик связано с уточнением расхода $\rho_f v_{w1}$ охладителя на границе $w1$, определяемого из решения задач фильтрации и теплопроводности в теле, а также массовой скорости испарения $(\rho v)_{ev}$, определяемой из решения задачи (33) – (40) относительно функций f, f'_η, ϑ с последующей подстановкой f и f'_η в (39).

Для решения задачи фильтрации подставим закон Дарси (18) в уравнение неразрывности (17), получим уравнение фильтрации относительно давления с краевыми условиями (19), (20). Для области 1 это уравнение имеет вид ($\epsilon_f \approx 10^{-20}$)

$$\begin{aligned} \epsilon_f \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} (r^\kappa k_{rr} \frac{\partial p}{\partial r}) + \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\kappa-1} k_{r\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta}) + \\ &+ \frac{1}{r^2 \cos^{\kappa-1} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos^{\kappa-1} \theta' k_{r\theta} \frac{\partial p}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \cos^{\kappa-1} \theta'} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos^{\kappa-1} \theta' k_{\theta\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta}). \end{aligned} \quad (46)$$

Численное решение задачи (46), (19), (20) осуществляется так же, как и численное решение соответствующей задачи теплопроводности. Поля компонентов вектора ско-

рости $\bar{V}_f \{u_r, u_\theta\}$ определяются из анизотропного закона фильтрации (18) по определенному ранее полю давления $p(r, \theta, \tau)$

$$\begin{aligned} -u_r &= (k_{rr} \frac{\partial p}{\partial r} + k_{r\theta} \frac{\partial p}{r \partial \theta}) / \mu_f(T), \\ -u_\theta &= (k_{\theta r} \frac{\partial p}{\partial r} + k_{\theta\theta} \frac{\partial p}{r \partial \theta}) / \mu_f(T). \end{aligned} \quad (47)$$

После определения компонентов u_r, u_θ , параметров теплообмена α_{w2}, T_{e2} с помощью соотношений (21), (22) и параметров теплообмена $(\alpha/c_p)_w$ и I_e или температуры T_w в соответствии с (45) появляется возможность численно решить задачу теплопроводности в теле с учетом фильтрации и теплообмена в жидкой пленке, причем если граница $w1$ не закрыта пленкой, то решается задача (10), (11), (13)–(16), (21), (22). Если граница $w1$ закрыта пленкой, то решается задача (10)–(12), (14)–(16), (21), (22). Для аппроксимации нормальная составляющая $\lambda_n \partial T / \partial n$ теплового потока на границах анизотропного тела представляется следующим образом (\bar{n}_0 – орт вектора нормали к границе тела, описываемой уравнением $r = F(\theta)$):

$$\begin{aligned} \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} &= (\bar{n}^0, \Lambda \text{grad } T) = [(\lambda_{rr} - \lambda_{\theta r}) \frac{dF}{rd\theta}] \frac{\partial T}{\partial r} + \\ &+ (\lambda_{r\theta} - \lambda_{\theta\theta} \frac{dF}{rd\theta}) \frac{\partial T}{r \partial \theta} \left[1 + \left(\frac{dF}{rd\theta} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Численное решение многомерных задач теплопроводности и фильтрации осуществляется методом расщепления с экстраполяцией [3]

$$\tilde{T}^{k+1/2} = (E + A \Delta \tau / 2 + A^2 \Delta \tau^2 / 4) T^k, \quad (49)$$

$$\frac{T^{k+1/2} - T^k}{\Delta \tau / 2} = a_{11} B_{11} T^{k+1/2} + (A - a_{11} B_{11}) \tilde{T}^{k+1/2}, \quad (50)$$

$$\tilde{T}^{k+1} = (E + A \Delta \tau / 2 + A^2 \Delta \tau^2 / 4) T^{k+1/2}, \quad (51)$$

$$\frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\Delta \tau / 2} = a_{22} B_{22} T^{k+1} + (A - a_{22} B_{22}) \tilde{T}^{k+1}, \quad (52)$$

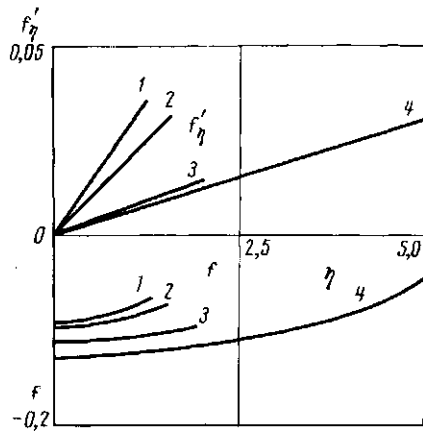
где $A = \sum_{m,n=1}^2 a_{mn} B_{mn}$, $B_{mn} \sim \partial^2 / \partial \alpha_m \partial \alpha_n$, $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{r, \theta\}$.

Численные эксперименты показывают, что физическая толщина пленки имеет порядок 10^{-4} м и решение уравнения энергии (34) с краевыми условиями (37), (45) в направлении переменной η практически постоянно (при уровне температур в 700 К перепад составляет $\sim 0,1$ К). Следовательно, при решении задачи теплопроводности в условиях, когда граница $w1$ закрыта пленкой, на ней задается граничное условие первого рода, определенное из (45), т.е. $T_{w1} = T_w$ (баланс энергии (40) в этом случае используется для определения касательного напряжения τ_{g-f}).

Кроме этого, в силу той же причины распределение по толщине пленки продольной составляющей вектора относительной скорости $f'_\eta(\xi, \eta)$ линейно, что подтверждают результаты численного решения задачи (33), (35), (36), (38), представленные на рис. 3. Таким образом, $f''_\eta(\xi, \eta)$ постоянна по толщине и в соответствии с (38) $f''_\eta(\xi, \eta) = f''_\eta(\xi, \bar{\delta}) = t(\xi)$. Этот факт в существенной степени упрощает определение относительной функции тока $f(\xi, \eta)$, относительной скорости $f'_\eta(\xi, \eta)$ и относительной толщины пленки.

Действительно, в силу линейности f'_η из задачи (33), (35), (36), (38) имеем (\bar{x} вы-

Рис. 3. Распределение функций $f(\theta, \eta)$ и $f'_\eta(\theta, \eta)$ в жидкой пленке: 1 - $\theta = \pi/3$; 2 - $2\pi/9$; 3 - $\pi/9$; 4 - $\theta = 0$



носится за знак производной по η в силу постоянства относительной температуры $\vartheta(\xi, \eta)$, от которой она зависит)

$$f''_{\eta} = 0, \quad f'_{\eta}(\xi, 0) = 0, \quad f(\xi, 0) = f_{w1}(\xi), \quad f''_{\eta}(\xi, \bar{\delta}) = t(\xi), \quad (53)$$

$$ff''_{\eta} + \beta_e \left(\frac{\rho_e}{\rho_f} - f'^2_{\eta} \right) = 2\xi f'_{\eta} f''_{\xi\eta}. \quad (54)$$

Решением задачи (53) являются соотношения

$$f(\xi, \eta) = t(\xi) \eta^2 / 2 + f_{w1}(\xi). \quad (55)$$

$$f'_{\eta}(\xi, \eta) = t(\xi) \eta. \quad (56)$$

Подставляя (55), (56) для $\eta = \bar{\delta}$ в (54), получим выражение для определения относительной толщины пленки $\bar{\delta}(\xi)$ (величина $f(\xi, \eta) < 0$)

$$\bar{\delta}(\xi) = \left[\frac{-t(\xi) f_{w1}(\xi) - \beta_e(\xi) \rho_e / \rho_f}{(0,5 - \beta_e(\xi)) [t(\xi)]^2 - 2\xi t(\xi) t'(\xi)} \right]^{1/2}. \quad (57)$$

Таким образом, при известных касательном напряжении $t(\xi, \bar{\delta})$ на наружной границе пленки и относительной скорости расхода жидкости $f_{w1}(\xi)$ выражения (55)–(57) и (45) полностью определяют гидродинамические и тепловые характеристики пленки. Производная $t'(\xi)$ известна, так как известно распределение коэффициента теплоотдачи $(\alpha/c_p)_w$ (аналогия (23)).

Результаты численного исследования. Поскольку в рассматриваемом способе тепловой защиты тепловое состояние затупленного тела в значительной степени зависит от полей давления и скорости фильтрации, проанализируем вначале результаты численных расчетов фильтрации капельной жидкости. Такие результаты, полученные при решении всей комплексной проблемы сопряженного теплообмена, приведены на рис. 4–7 для следующих входных данных: $r_{w1} = 0,018$ м; $r_{w2} = 0,01$ м; $\theta_0 = 10^\circ$; $\varphi = 30^\circ$; $\rho_f = 1200$ кг/м³; $c_f = 2,52$ кДж/(кг · К); $p_{w2} = 5 \cdot 10^5$ Па; $M_{ev} = 29$ кг/моль; $Q_{ev}^* = 2100$ кДж/кг; $T_{ev}^* = 700$ К; $Q_c = 420$ кДж/кг; $\Pi = 0,4$; $\mu_f = 10^{-4} - 0,2 \cdot 10^{-7}$ Т кг/м · с; $\lambda_v = 0,084$ кВт/(м · К); $\lambda_\omega = 0,336$ кВт/(м · К); $k_v = k_\omega = 10^{-14}$ м² (для изотропной фильтрации, рис. 4–6); $k_v = 4 \cdot 10^{-14}$ м², $k_\omega = 10^{-14}$ м² (для анизотропной фильтрации, рис. 7).

На рис. 4 представлено поле давления фильтрации. Непосредственно на затуплении (до $\theta \geq 0$ рад) давление фильтрации монотонно падает вдоль переменной r . В конической области ($\theta > 0$ м) функция давления фильтрации (кривая б для $\theta = 0,2$ м) имеет точки перегиба. Это связано с тем, что в условиях изотропной фильтрации продольная компонента вектора скорости фильтрации u_θ на затуплении положительна, т.е. про-

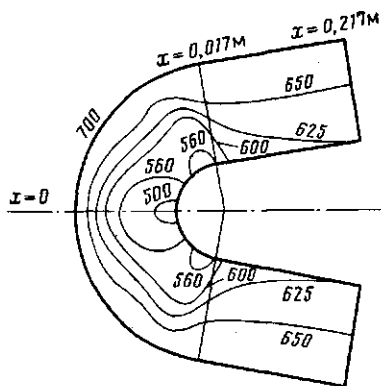


Рис. 10. Поле температур в теле с учетом анизотропной теплопроводности, фильтрации и теплообмена в жидкой пленке с испарением

расход и толщина пленки значительно увеличиваются по сравнению с областью затупления. Это объясняется большим перепадом давления и меньшей скоростью испарения за счет резкого падения тепловых потоков.

Отсюда следует практическая рекомендация: для боковой поверхности нецелесообразно использовать рассматриваемую систему тепловой защиты, поскольку требуется достаточно большой расход охладителя при незначительном уровне температур. В этой области можно использовать традиционные способы тепловой защиты. Непосредственно для области затупления фильтрационно-пористый метод тепловой защиты с автоматической регулировкой подачи охладителя, вязкость которого уменьшается с температурой, эффективен, так как максимальная температура не превышает температуры испарения охладителя T_{ev}^* .

Это подтверждают и результаты расчета двумерного температурного поля внутри пористого затупленного тела с учетом теплообмена на границе w_2 , анизотропной фильтрации, образования жидкой пленки и теплообмена в ней, представленные на рис. 10. Действительно, максимальная температура тела $T_{w1}(\theta, \tau)$, достигаемая на наружной границе тела, не превышает температуры $T_{ev}^* = 700$ К испарения охладителя.

Обозначения: u, v – продольная и поперечная компоненты вектора скорости течения жидкой пленки; λ, c, ρ, T – соответственно теплопроводность, теплоемкость, плотность, температура; x, y – система координат для жидкой пленки; r, θ – система координат для тела; G – объем жидкости со смачиваемой поверхностью F ; $\tau_{g-f}, \alpha, c_p, I, Q_c$ – соответственно касательное напряжение на границе газ-жидкость, коэффициент теплоотдачи, теплоемкость при постоянном давлении, энтальпия, теплота горения; β, β_f – коэффициенты вдува и объемного расширения; u_r, u_θ – компоненты вектора скорости фильтрации; $\Lambda, K, p, \mu, \epsilon$ – соответственно тензоры теплопроводности и проницаемости, давление, вязкость, степень черноты; M, Q_{ev}, c_{ev}, D – молярная масса, теплота испарения, концентрация, коэффициент диффузии; ν, ω – главные оси тензоров теплопроводности и проницаемости; $\bar{\delta}$ – относительная толщина пленки.

И н д е к с ы: f – жидкость; w – граница газ-жидкость; w_1, w_2 – наружная и внутренняя границы тела; ev – пар; e – наружная граница пограничного слоя; * – фазовые превращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровой В.Я. //Тр. ЦАГИ. 1969. Вып. 1108.
2. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
3. Формалев В.Ф. //ТВТ. 1988, Т. 26, № 6. С. 1122.
4. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. //Под ред. Кошкина В.К. М.: Машиностроение, 1975.
6. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1979.
7. Формалев В.Ф. Численное моделирование процессов нелинейной анизотропной теплопроводности при сложном теплообмене. М.: ВИНТИ, № 712-В89, 1989.

УДК 533.72 © 1992 г.

И.А. Кузнецова, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОТТ-СМИТА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ИСПАРЕНИИ С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Методом Мотт-Смита решена задача об интенсивном испарении с плоской поверхности в собственный пар. Показано, что число Маха, равное единице, является для этого метода предельным для случая стационарного испарения. Получены граничные значения параметров пара в зависимости от числа Маха и коэффициента испарения.

Большой интерес к задаче о сильном испарении с плоской поверхности вызван как ее теоретической нетривиальностью, так и возросшей практической потребностью в описании процессов, протекающих под воздействием мощных потоков энергии (например, лазерного излучения) на конденсированную фазу [1–12].

Возникающий при этом вопрос о предельных скоростях испарения многократно обсуждался в литературе [1–9], в результате чего утвердилась точка зрения, что предельная скорость испарения соответствует числу Маха M , равному единице ($M = u/c$, где u — средняя скорость газа, c — скорость звука в газе). Однако свидетельства в пользу этого утверждения носят, в основном, косвенный характер, прямого же теоретического (аналитического) обоснования до сих пор не проводилось. Исключением можно считать работу [7], в которой предельное значение M , равное единице, получено для весьма специфического случая одномерного газа в квазилинейном приближении (в БГК-модели). Аналогичное рассмотрение проводилось в [8] и для случая трехмерного газа (тоже в квазилинейном приближении), но общего аналитического решения получено не было. При обсуждении этого вопроса в [9] сделано утверждение о выделенности числа Маха M , равного единице. Однако в [10] показано, что в рамках используемой в [9] модели это значение хотя и близко, но все же отлично от единицы. Кроме того, предельное значение числа Маха M_{\max} для этой модели оказывается сильно зависящим от выбора моментов Q_i : так, моменту $Q_4 = v_x^2$ соответствует $M_{\max} = 0,9940$, а моменту $Q_4 = v_x^3$ — $M_{\max} = 0,8660$ [10].

Цель данной работы — более детальное описание процесса интенсивного испарения с плоской поверхности в собственный пар с помощью метода, впервые предложенного Мотт-Смитом при изучении структуры ударных волн [13].

Как известно, вблизи поверхности существует область размером в несколько длин свободного пробега, так называемый слой Кнудсена, в котором распределение молекул по скоростям существенно отличается от равновесного. Исследование течения в этом слое позволяет связать параметры внешнего потока со свойствами конденсированной фазы. Для нахождения этой связи необходимо решать уравнение Больцмана внутри слоя Кнудсена. Использование метода Мотт-Смита для этой цели является вполне оправданным, поскольку аналогия процессов в ударной волне и при сильном испарении отмечалась неоднократно [1–4].

Будем рассматривать случай установившегося одномерного течения простого газа вдоль оси x , перпендикулярной поверхности испарения. Функцию распределения молекул газа в области формирования течения запишем, согласно методу Мотт-Смита, в следующем виде:

$$f(x, v) = \sum_{i=1}^2 a_i(x) \left(\frac{m}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m(v - u_i)^2}{2k T_i} \right\}, \quad (1)$$

где m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана. В задаче об ударной волне величины с индексом $i = 1$ соответствуют параметрам газа перед ударной волной (сверхзвуковой поток), а величины с индексом $i = 2$ — за ударной волной. В данном случае, как будет видно из дальнейшего, параметры с индексом $i = 2$ описывают состояние газа за Кнудсеновским слоем (n_2 , T_2 и u_2 — соответственно концентрация, температура и средняя скорость газа), а величины с индексом $i = 1$ носят вспомогательный характер и описывают изменение параметров газа в самом слое Кнудсена.

Граничное условие на поверхности испарения $x = 0$ запишем с учетом коэффициента испарения α [14]

$$f^+(v) = \alpha f_s(v) + (1 - \alpha) f'(v), \quad v_x > 0, \quad (2)$$

где

$$f_s(v) = n_s \left(\frac{m}{2\pi k T_s} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT_s} \right\},$$

$$f'(v) = n' \left(\frac{m}{2\pi k T_s} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT_s} \right\},$$

n_s — концентрация насыщенного пара при температуре поверхности T_s , n' — концентрация диффузно-отраженных молекул, α — коэффициент испарения ($0 < \alpha \leq 1$).

Кроме того, коэффициенты $a_i(x)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям на бесконечности:

$$x \rightarrow \infty: \quad a_1(x) = 0, \quad a_2(x) = n_2. \quad (3)$$

Поскольку точного решения уравнения Больцмана для такого класса задач не существует, приближенное решение ищется моментным методом.

Для произвольной функции $Q_i(v)$ уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int v_x Q_i f dv = \iiint (Q'_i - Q_i) f f_1 |g| d\Omega dv_1 dv, \quad (4)$$

где g — величина изменения скорости в результате парного соударения: $|g| = |v_1 - v|$; через f_1 обозначена $f(v_1)$, а через Q'_i — функция $Q_i(v')$, где v' — скорость первой молекулы после соударения; $d\Omega$ — элемент поперечного сечения.

Естественно, что в качестве первых трех моментов $Q_i(v)$ берутся инварианты соударения 1 , v_x , $v^2/2$, для которых правая часть (4) обращается в нуль. При этом полученные уравнения представляют собой условия баланса потоков массы, импульса и энергии. Два из них оказываются линейно-зависимыми, если выполняются следующие соотношения связи величин u_1 , T_1 , n_1 с параметрами u_2 , T_2 , n_2 (так называемые условия Рэнкина—Гюгонно) [13]:

$$n_2 = n_1 \frac{4M_1^2}{M_1^2 + 3}, \quad (5)$$

$$M_2 = \left(\frac{M_1^2 + 3}{5M_1^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

$$T_2 = T_1 \frac{(M_1^2 + 3)(5M_1^2 - 1)}{16M_1^2}. \quad (7)$$

Поэтому для нахождения двух неизвестных $a_1(x)$ и $a_2(x)$ необходимо образовать еще одно дополнительное моментное уравнение. Наиболее простым представляется выбор $Q_4 = v_x^2$, для которого интегрирование правой части (4) в случае максвелловских молекул может быть выполнено сравнительно легко. Таким образом, коэффициенты $a_i(x)$ будут определяться из решения нелинейного дифференциального уравнения (для момента $Q_4 = v_x^2$) совместно с алгебраическим уравнением (для первых трех моментов). Это решение получается аналогично решению Мотт—Смита задачи об ударной волне [13].