А. В. Гришин, О конечной базируемости абстрактных T-пространств, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 669–700

О конечной базируемости абстрактных Т-пространств*

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет

УДК 519.48

Ключевые слова: проблема Шпехта, T-идеал, T-пространство, конечная базируемость, тождество Гамильтона–Кэли, многочлен Капелли, радикал, квазимногочлен.

Аннотация

Пусть $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счетно-порожденная алгебра над полем k характеристики 0. Векторное подпространство V алгебры F называется T-пространством, если оно замкнуто относительно подстановок. Ясно, что идеал I алгебры F является T-идеалом в том и только том случае, когда I — T-пространство в F. Цель настоящей статьи — ввести определение абстрактного T-пространства и доказать конечную базируемость широкого класса T-пространств.

Основным результатом является

Теорема. *Пусть I — T-идеал алгебры F, содержащий некоторый многочлен Капелли. Тогда каждое T-пространство в F/I конечно базируемо.*

Теорема позволяет положительно решить локальную проблему Шпехта (А. Р. Кемер дал положительное решение проблемы Шпехта, используя другой подход) и проблему представимости.

Abstract

A. V. Grishin, On the finite basis property of abstract T-spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 669–700.

Let $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ be the free countably generated algebra over a field k of the characteristic 0. A vector subspace V of the algebra F is called a T-space of F if it is closed under substitutions. It is clear that an ideal I of F is a T-ideal if and only if I is a T-space of F. The aim of this paper is to introduce the definition of the abstract T-space and to prove the finite basis property for some large class of T-spaces.

The main result of this paper is the following

Theorem. *Let I be a T-ideal of algebra F which contains a Capelly polynomial. Then every T-space of F/I is finitely based.*

The statement of this theorem allows us to give a positive answer to the local Specht's problem (A. Kemer gave a positive answer to Specht's problem using another approach) and to the representability problem.

---

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований. Грант № 95-01-01185.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 669–700.

После положительного решения А. Р. Кемером проблемы Шпехта и доказательства автором некоторого аналога этого результата для обобщенных многочленов окончательно сформировалось следующее направление исследований. В работе [1] при доказательстве конечной базируемости систем обобщенных многочленов определенного типа по существу использовались только линейные действия и подстановки (умножения оказались не нужны), что привело к понятию T-пространства в алгебре обобщенных многочленов. Представляет интерес изучение аналогичных объектов в свободной (относительно свободной) ассоциативной алгебре. Цель настоящей работы — ввести понятие абстрактного T-пространства, рассмотреть ряд важных для этой теории примеров и доказать конечную базируемость широкого класса T-пространств, из которой следует положительное решение проблемы Шпехта в ее локальном варианте (к которому, как показал А. Р. Кемер, сводится общий случай).

Пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ — свободная счетнопорожденная ассоциативная алгебра над полем k нулевой характеристики, T — полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры F. Подстановкой τ типа $(x_1, \dots, x_i, \dots) \mapsto (g_1, \dots, g_i)$, где $g_i \in F$, назовем эндоморфизм алгебры F, определяемый этим соответствием. Образ многочлена f из F относительно действия подстановки τ обозначим через f^τ. В дальнейшем в некоторых случаях для удобства часть из переменных алгебры F будет обозначаться другими буквами, иногда снабженными одиночными или двойными индексами. Следуя [1], назовем *T-пространством* алгебры F любое ее линейное подпространство, устойчивое относительно действия полугруппы T. В частности, T-идеалы алгебры F это ее идеалы, являющиеся одновременно и T-пространствами.

Полугруппа T очевидным образом действует справа на любых относительно свободных алгебрах, что позволяет на этих алгебрах ввести понятия T-пространства и T-идеала аналогично. Ясно, что любое T-пространство в относительно свободной алгебре естественным образом наделяется структурой унитарного правого kT-модуля (kT — полугрупповая k-алгебра). Это приводит к следующему определению, существенно обобщающему предыдущее определение T-пространства.

Назовем *T-пространством (абстрактным)* над полем k любой унитарный правый kT-модуль. Соответственно, морфизмами T-пространств являются гомоморфизмы их как kT-модулей. Через S^T будем обозначать T-пространство, порожденное подмножеством S в некотором T-пространстве.

Для весьма широкого класса T-пространств удается доказать их конечную порожденность как kT-модулей.

Теорема. *Пусть F/I — относительно свободная алгебра, причем T-идеал I содержит некоторый стандартный многочлен (или, что равносильно, многочлен Капелли). Тогда F/I — нетеров kT-модуль.*

Из этой теоремы следует конечная базируемость T-идеалов (впервые доказанная А. Р. Кемером в [2]), а также многих других конкретных T-пространств, например, T-пространства многочленов из алгебры F, принимающих значения в центре некоторой алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству. Ясно, что утверждение теоремы равносильно утверждению о конечной базируемости любого T-пространства в алгебре F/I.

Работа содержит три параграфа. В § 1 приводится серия T-пространств, участвующих в доказательстве теоремы, а также дана схема доказательства. Доказательство предложений 2 и 3, а также довольно сложная конструкция отображения $f \mapsto f^Z$ содержатся в § 2 и § 3. Читатель, желающий иметь общее представление о методах доказательства теоремы, может ограничиться только § 1.

Автор выражает глубокую благодарность В. Н. Латышеву, А. В. Михалёву и всем участникам руководимых ими семинаров, на которых в разные годы докладывались приводимые здесь результаты. Особенно признателен автор В. Т. Маркову за полезные замечания.

§ 1 Основные определения и примеры. Схема доказательства теоремы

I. *Матричные T-пространства.* Пусть k_r — алгебра $(r\times r)$-матриц, M_r — T-идеал тождеств алгебры k_r в алгебре F и $\mathrm{GM}(r,X) \cong F/M_r$ — алгебра общих $(r\times r)$-матриц, обычным образом вложенная в алгебру $k[X]_r$, т. е. алгебру $(r\times r)$-матриц над кольцом (с единицей) коммутативных многочленов $k[X]$ от счетного множества переменных $X = \{x_i^{(\alpha,\beta)} \mid 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant r,\ i = 1,2,\ldots\}$, $\bar{x}_i = \sum x_i^{(\alpha,\beta)} e_{\alpha\beta}$, где $e_{\alpha\beta}$ — матричные единицы алгебры k_r, $\bar{x}_i$ — образ переменной x_i (см. [1]). Рассмотрим в алгебре $k[X]$ подалгебру $\mathrm{Tr}(r,X) = k[\mathrm{tr}\,(\mathrm{GM}(r,X))]$, порожденную единицей и следами всех общих матриц, а в алгебре $k[X]_r$ — подалгебру $\mathrm{TrGM}(r,X)$, порожденную алгебрами $\mathrm{GM}(r,X)$, $\mathrm{Tr}(r,X)$ и единичной матрицей. Алгебра $\mathrm{TrGM}(r,X)$ естественным образом наделяется структурой T-пространства.

Пусть теперь имеется s натуральных чисел $r_1,\ldots,r_s$ (не обязательно различных) и s счетных множеств коммутативных переменных $X_1,\ldots,X_s$, причем $X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Рассмотрим алгебры $\mathrm{Tr}(r_i,X_i)$ и порожденную ими всеми подалгебру R в алгебре $k[X]$, где $X = \bigcup_{i=1}^s X_i$. Алгебры $\mathrm{TrGM}(r_i,X_i)$ можно рассматривать как подалгебры в алгебрах матриц $k[X]_{r_i}$. Пусть $\Phi_i = R\,\mathrm{GM}(r_i,X_i)$ — алгебра, порожденная алгебрами R и $\mathrm{TrGM}(r_i,X_i)$. Ясно, что на алгебре Φ_i корректно вводится T-структура, превращающая алгебры $\mathrm{GM}(r_i,X_i)$ и $\mathrm{TrGM}(r_i,X_i)$ в T-подпространства в алгебре Φ_i.

В дальнейшем будет использоваться следующая R-алгебра, наделенная T-структурой:

$$\Phi(r_1,\ldots,r_s) = \Phi_1 \oplus\cdots\oplus \Phi_s.$$

II. *Алгебра квазимногочленов.* Пусть $\overline{F} = F_1^e \oplus \dots \oplus F_s^e$ — прямая сумма алгебр $F_i^e = F_i + ke_i$, где F_i — относительно свободная алгебра, e_i — формально присоединенная к алгебре F_i единица, если F_i не является алгеброй общих матриц, или соответствующая единичная матрица в противном случае, $\bar{x}_i = x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(s)}$, где $x_i^{(\alpha)}$ — образ переменной x_i в алгебре F_i, $k\langle \theta_1, \dots, \theta_i, \dots \rangle$ — свободная счетнопорожденная ассоциативная алгебра.

Назовем *алгеброй $\overline{F}$-квазимногочленов с коэффициентами в поле k* следующее свободное произведение над k:

$$Q(\overline{F}) = \overline{F} *_k k\langle \theta_1, \dots, \theta_i, \dots \rangle.$$

В алгебре $Q(\overline{F})$ каждый элемент (квазимногочлен) является линейной комбинацией выражений следующего вида (квазиодночленов):

$$u_0\theta_{i_1}u_1 \dots \theta_{i_n}u_n, \tag{1}$$

где u_i — одночлен из одной из алгебр $F_1, \dots, F_s$ или одна из единиц $e_1, \dots, e_s$. Число n назовем θ-степенью квазиодночлена (1), а число $n + \sum_{i=0}^{n} \deg u_i$ назовем степенью этого квазиодночлена. Очевидным образом определяется θ-степень и степень любого квазимногочлена из $Q(\overline{F})$.

Скажем, что переменная x_i входит в квазиодночлен (1) в степени $m = p+q$, если суммарная степень вхождения образов переменной x_i в одночлены $u_0, \dots, u_n$ равна p, а среди элементов $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_n}$ ровно q совпадают с θ_i. В силу однородности по каждой переменной соотношений в алгебре $Q(\overline{F})$ это определение корректно переносится на любые ненулевые квазимногочлены, однородные по x_i.

Обозначим через $\Theta(\overline{F})$ идеал алгебры $Q(\overline{F})$, порожденный всеми элементами θ_i. Пространство, порожденное всеми одночленами θ-степени n очевидным образом отождествляется с фактор-алгеброй $Q_n(\overline{F}) = \Theta(\overline{F})/\Theta(\overline{F})^{n+1}$; при этом $\Theta(\overline{F})^0 = Q(\overline{F})$, $Q_0(\overline{F}) = \overline{F}$.

Положим $x_i = \bar{x}_i + \theta_i$. Ясно, что элементы x_i порождают свободную ассоциативную алгебру, являющуюся подалгеброй алгебры $Q(\overline{F})$, и мы имеем вложение алгебры $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ в алгебру $Q(\overline{F})$. Введем действие полугруппы T на алгебре $Q(\overline{F})$ таким образом, чтобы оно продолжало уже имеющееся действие этой полугруппы на алгебрах F и $\overline{F}$. Ясно, что достаточно определить это действие на элементах θ_i. Пусть τ — подстановка типа $x_i \mapsto g_i$. Положим

$$\theta_i^\tau = x_i^\tau - \bar{x}_i^\tau = g_i(x_1, \dots, x_d) - g_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d),$$

то есть θ_i^τ — это $g_i(x_1, \dots, x_d)$ без компоненты θ-степени нуль. Из этого определения действия полугруппы T следует, что идеал $\Theta(\overline{F})$ и все его степени являются T-идеалами алгебры $Q(\overline{F})$.

III. *Алгебра матричных квазимногочленов.* Рассмотрим теперь алгебру $\Phi(r_1,\dots,r_s)$-квазимногочленов с коэффициентами в поле k, обозначаемую через $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$, с действием полугруппы T, аналогичным введенному выше: $\theta_i^\tau = x_i^\tau - \bar{x}_i^\tau$.

Аналогичным образом, имеется разложение квазимногочленов из $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$ на квазиодночлены (1) и вводятся понятия степени, θ-степени и степени вхождения переменной x_i в квазиодночлен (1), идеалов $(\Theta(\Phi(r_1,\dots,r_s)))^m$ и T-пространств $Q_n(\Phi(r_1,\dots,r_s))$. Ясно, что при $\overline{F} = \mathrm{GM}(r_1,X_1)^e \oplus \dots \oplus \mathrm{GM}(r_s,X_s)^e$ алгебра квазимногочленов $Q(\overline{F})$ является T-подалгеброй в $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$, причем объекты типа Θ^m, Q_n первой алгебры являются T-подпространствами аналогичных объектов второй алгебры.

Особую роль играет алгебра квазимногочленов $Q(\mathrm{GM}(r,X)^e)$, которая, по сути дела, и рассматривалась в [1], где доказано следующее, связанное с включением $\overline{F} \subset Q(\mathrm{GM}(r,X)^e)$,

Предложение 1. *$F \cap (\Theta(\mathrm{GM}(r,X)^e))^m = M_r^m$.*

Следствие 1. *F/M_r^m — T-подпространство в*

$$Q(\mathrm{GM}(r,X)^e)/(\Theta(\mathrm{GM}(r,X)^e))^m.$$

Следствие 2. *M_r^n/M_r^{n+1} — T-подпространство в $Q_n(\mathrm{GM}(r,X)^e)$.*

IV. *Алгебра матричных квазимногочленов со следом.* Пусть теперь $R = k[\mathrm{Tr}(r_1,X_1),\dots,\mathrm{Tr}(r_s,X_s)]$ — введенная выше алгебра следов. Рассмотрим R-алгебру $Q^R(\Phi(r_1,\dots,r_s)) = \Phi(r_1,\dots,r_s) *_R R\langle\theta_1,\dots,\theta_i,\dots\rangle$, на которой аналогично предыдущему вводятся понятия степени, θ-степени, действие полугруппы T, T-пространства $\Theta^R(\Phi(r_1,\dots,r_s))^m$, $Q_n^R(\Phi(r_1,\dots,r_s))$. Отличие алгебры $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$ от алгебры $Q^R(\Phi(r_1,\dots,r_s))$ состоит в том, что в последней следы коммутируют с элементами θ_i.

Сопоставим каждому квазимногочлену первой алгебры точно такое же полиномиальное выражение от элементов $x_i^{(j)}, \theta_i$ и следов из алгебры R, но уже рассмотренное во второй алгебре. Ясно, что такое сопоставление задает сюръективный гомоморфизм

$$\pi\colon Q(\Phi(r_1,\dots,r_s)) \to Q^R(\Phi(r_1,\dots,r_s)).$$

V. *Полное пространство квазимногочленов θ-степени n.* Пусть $\overline{F} = F^{(1)} \oplus F^{(2)}$, где $F^{(1)} = \bigoplus_{i=1}^p F_i^e$, $F^{(2)} = \bigoplus_{i=1}^q F_{p+i}^e$, а F_i — относительно свободные алгебры. Произвольный элемент из T-пространства $Q_n(F^{(1)})$ является линейной комбинацией выражений (1), где u_i — одночлен одной из алгебр $F_1^e,\dots,F_p^e$. Но точно такие же линейные комбинации образуют, очевидно, T-подпространство в пространстве $Q_n(\overline{F})$. Таким образом, можно говорить о вложении в качестве T-подпространств $Q_n(F^{(1)})$ и $Q_n(F^{(2)})$ в T-пространство $Q_n(\overline{F})$. Это позволяет рассмотреть T-пространство $Q_n = \varinjlim Q_n(\overline{F})$, где индуктивный предел берется по всем конечным прямым суммам $\bigoplus_{i=1}^{s} F_i^e$. Все рассматриваемые ниже T-пространства $Q_n(\overline{F})$ удобно считать погруженными в Q_n.

VI. *Элементарные пространства.* Пусть $F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e$ — алгебры из числа прямых слагаемых $F_1^e,\dots,F_s^e$, составляющих алгебру $\overline{F}$ (числа $i_0,\dots,\ i_n$ не обязательно попарно различны и не обязательно среди них есть все натуральные числа от 1 до s). Назовем *элементарным пространством* следующее T-подпространство пространства $Q_n(\overline{F})$:

$$Q_n\langle F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e\rangle = \bigoplus_{(j_1,\dots,j_n)} F_{i_0}^e\theta_{j_1}F_{i_1}^e\dots\theta_{j_n}F_{i_n}^e.$$

Из определения следует, что $Q_n(\overline{F})$ является конечной прямой суммой элементарных пространств, т. е.

$$Q_n(\overline{F}) = \bigoplus_{(i_0,\dots,i_n)} Q_n\langle F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e\rangle.$$

Пусть $V_{i_0},\dots,V_{i_n}$ — T-идеалы в алгебрах $F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e$ (возможно совпадающие с F_{i_α} или $F_{i_\alpha}^e$ или нулевые). Ясно, что пространство

$$Q_n\langle V_{i_0},\dots,V_{i_n}\rangle = \bigoplus_{(j_1,\dots,j_n)} V_{i_0}\theta_{j_1}V_{i_1}\dots\theta_{j_n}V_{i_n}$$

является T-подпространством соответствующего элементарного пространства. Обозначим через $Q_n\langle F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e\rangle(d,c)$ линейное подпространство в $Q_n\langle F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e\rangle$, порожденное квазиодночленами, зависящими только от переменных $x_1,\dots,x_d,\dots,x_{d+c}$, причем переменные $x_{d+1},\dots,x_{d+c}$ входят в них в степени $\leqslant 1$. Аналогичным образом определяются линейные подпространства $Q_n\langle V_{i_0},\dots,V_{i_n}\rangle(d,c)$.

Дословно так же вводятся матричные элементарные пространства $Q_n(\Phi_{i_0},\dots,\Phi_{i_n})$ и $Q_n^R(\Phi_{i_0},\dots,\Phi_{i_n})$ и их подпространства

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0},X_{i_0})^e,\dots,\mathrm{GM}(r_{i_n},X_{i_n})^e\rangle$$

и $V^R = Q_n^R\langle \mathrm{GM}(r_{i_0},X_{i_0})^e,\dots,\mathrm{GM}(r_{i_n},X_{i_n})^e\rangle$, а также их аналоги типа $V(d,c)$, $V^R(d,c)$.

Предложение 2. *Если множества $X_{i_1},\dots,X_{i_n}$ попарно различны, то ограничение отображения π (см. п.* IV*) на T-пространство V является изоморфизмом T-пространств V и V^R.*

Доказательство в § 2.

Предложение 2 позволяет использовать следующую схему для доказательства конечной базируемости T-пространств. Ясно, что достаточно доказать конечную базируемость любого T-пространства в

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle,$$

где $X_{i_\alpha} \neq X_{i_\beta}$ при $\alpha \neq \beta$, так как имеется сюръективный морфизм его на аналогичное T-пространство с повторяющимися множествами X_{i_α}. Согласно предложению 2 это T-пространство изоморфно соответствующему T-пространству V^R, которое лежит в $Q_n^R\langle \Phi_{i_0}, \ldots, \Phi_{i_n}\rangle$. В последнем уже можно эффективно использовать технику следов.

Обозначим через $[\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e]_{r_\alpha}$ алгебру $r_\alpha^2 \times r_\alpha^2$-матриц вида

$$[f^{(\alpha)}]_{r_\alpha} = \begin{pmatrix} f^{(\alpha)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f^{(\alpha)} \end{pmatrix},$$

где $f^{(\alpha)}$ — образ многочлена f из алгебры $F^e = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ в алгебре $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e$. Алгебры $[\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e]_{r_\alpha}$ и $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e$, очевидно, изоморфны и могут быть естественным образом отождествлены. То же самое можно сказать о R-алгебрах $R[\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e]_{r_\alpha}$ и $R\,\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e$. Единичные матрицы этих алгебр будем отождествлять и обозначать через e_α.

Пусть Δ — подалгебра в прямой сумме

$$[\mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e]_{r_{i_0}} \oplus \ldots \oplus [\mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e]_{r_{i_n}},$$

состоящая из элементов вида $[f^{(i_0)}]_{r_{i_0}} + \cdots + [f^{(i_n)}]_{r_{i_n}}$.

Ясно, что $[\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e]_{r_\alpha} = e_\alpha\Delta$, причем алгебра Δ, очевидно, изоморфна алгебре $\mathrm{GM}(r_{i_m}, X_{i_m})^e$, где r_{i_m} — наибольшее из чисел $r_{i_0}, \ldots, r_{i_n}$. С другой стороны, алгебру Δ можно рассматривать как алгебру блочно-диагональных $r \times r$-матриц вида

$$\widetilde{f} = \begin{pmatrix} [f^{(i_0)}]_{r_{i_0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [f^{(i_n)}]_{r_{i_n}} \end{pmatrix},$$

где $r = r_{i_0}^2 + \cdots + r_{i_n}^2$. Рассмотрим подалгебру $L = k[\mathrm{tr}(\Delta)]$ алгебры R, порожденную следами матриц . Порождающие ее элементы имеют вид $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} \mathrm{tr}\, r_{i_\alpha} f^{(i_\alpha)}$.

Через $L(d)$ обозначим алгебру, аналогичную L, но состоящую из элементов, зависящих только от переменных $x_1, \ldots, x_d$, а через $\Delta(d, c)$ — подпространство в Δ, состоящее из элементов, зависящих от переменных

$x_1, \dots, x_d, \dots, x_{d+c}$, причем переменные $x_{d+1}, \dots, x_{d+c}$ входят в эти элементы в степени $\leqslant 1$. Как нетрудно заметить, $L(d)$ — конечно порожденная k-алгебра, а

$$H_{d,c} = L(d) Q_n^R \langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \dots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e \rangle (d, c)$$

является нетеровым $L(d)$-модулем. В самом деле, очевидно, достаточно доказать это утверждение для каждого из $L(d)$-модулей

$$L(d) e_{i_0} \Delta(d,c) \theta_{j_1} e_{i_1} \Delta(d,c) \dots \theta_{j_n} e_{i_n} \Delta(d,c).$$

Стандартные соображения, связанные с теоремой Ширшова о высоте и тождествами типа Гамильтона–Кэли (см. [1]) показывают, что $L(d)$ — конечно порожденная k-алгебра, а $L(d)\Delta(d,c)$ — конечно порожденный $L(d)$-модуль. Следовательно, $L(d)$-модуль $H_{d,c}$ нетеров. Для дальнейшего понадобится

Предложение 3. *Пусть $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}$ — образы переменных $x_1, \dots, x_{r^2}, y$ алгебры F в алгебре общих матриц $\mathrm{GM}(r, X)$. Тогда*

$$\mathrm{tr}\, \bar{y}\, \mathrm{tr}\, \bar{x}_1 \dots \mathrm{tr}\, \bar{x}_{r^2} \in \{\mathrm{tr}\, \bar{x}_1, \mathrm{tr}\, \bar{x}_1\, \mathrm{tr}\, \bar{x}_2, \dots,\ \mathrm{tr}\, \bar{x}_1 \dots \mathrm{tr}\, \bar{x}_{r^2}\}^T.$$

Доказательство этого предложения (см. § 2) основано на одном важном свойстве многочленов Капелли c_n, т. е. многочленов из алгебры F вида

$$c_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \dots x_{\sigma(n)} y_n.$$

Хорошо известно, (см. [3], стр. 25) следующее свойство многочленов Капелли: в алгебре $\mathrm{TrGM}(r, X)$ имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{r^2} c_{r^2}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i \bar{z}, \dots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{r^2}) = r\, \mathrm{tr}\, \bar{z}\, c_{r^2}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{r^2}). \qquad (2)$$

Следствие 1. *T-пространство $k[\mathrm{tr}(\mathrm{GM}(r, X))]$ порождается элементами $\mathrm{tr}\, \bar{x}_1,\ \mathrm{tr}\, \bar{x}_1\, \mathrm{tr}\, \bar{x}_2, \dots,\ \mathrm{tr}\, \bar{x}_1 \dots \mathrm{tr}\, \bar{x}_{r^2}$.*

Следствие 2. *Пусть $\widetilde{x}_j, \widetilde{y}$ — блочно-диагональные матрицы вида*

$$\widetilde{x}_j = \begin{pmatrix} [x_j^{(i_0)}]_{r_{i_0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [x_j^{(i_n)}]_{r_{i_n}} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{pmatrix} [y^{(i_0)}]_{r_{i_0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [y^{(i_n)}]_{r_{i_n}} \end{pmatrix},$$

где $x_j^{(i_\alpha)}, y^{(i_\alpha)}$ — образы переменных x_j, y алгебры F в алгебре $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$. Тогда

$$\mathrm{tr}\, \widetilde{y}\, \mathrm{tr}\, \widetilde{x}_1 \dots \mathrm{tr}\, \widetilde{x}_{r^2} \in \{\mathrm{tr}\, \widetilde{x}_1,\ \mathrm{tr}\, \widetilde{x}_1\, \mathrm{tr}\, \widetilde{x}_2, \dots, \mathrm{tr}\, \widetilde{x}_1 \dots \mathrm{tr}\, \widetilde{x}_{r^2}\}^T,$$

где $r = r_{i_0}^2 + \dots + r_{i_n}^2$.

Это утверждение получается применением предложения 3 к общим $r\times r$-матрицам и последующей специализацией части коммутативных переменных в нуль и приравнивания друг другу некоторых из оставшихся коммутативных переменных таким образом, чтобы из общих $r \times r$-матриц получились матрицы $\widetilde{x}_j, \widetilde{y}$.

VII. *Пространства Капелли.* Пусть $r \geqslant 2$ и $C(r,X)$ — T-идеал в алгебре $\mathrm{GM}(r,X)$, порожденный многочленом Капелли c_{r^2} (идеал Капелли). Хорошо известно (см. [3]), что этот идеал отличен от нуля и относительно свободная алгебра $\mathrm{GM}(r,X)/C(r,X)$ накрывается (в силу нильпотентности ее радикала, доказанной в [4]) алгеброй F/M_{r-1}^m для некоторого m. По определению положим $C(1,X)=0$. Назовем *пространством Капелли* в элементарном пространстве $Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0},X_{i_0})^e,\dots,\mathrm{GM}(r_{i_n},X_{i_n})^e\rangle$ его T-подпространство, имеющее вид $V=Q_n\langle V_0,\dots,V_n\rangle$, где V_α это T-идеал $C(r_{i_\alpha},X_{i_\alpha})$ алгебры $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha},X_{i_\alpha})$ (в случае $r_{i_\alpha}\geqslant 2$) или алгебра $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha},X_{i_\alpha})^e$. Заметим, что элементарное пространство является частным случаем пространства Капелли (когда все V_α совпадают с алгебрами $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha},X_{i_\alpha})^e$). Назовем *сложностью* пространства Капелли V число $r(V)$, равное максимуму всех r_{i_α}, для которых V_α совпадает с алгеброй $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha},X_{i_\alpha})^e$. Если таких пространств V_α нет, то положим $r(V)=0$. Таким образом, неравенство $r(V)\leqslant 1$ означает, что каждое пространство V_α является либо идеалом Капелли, либо кольцом коммутативных многочленов. Отметим еще, что пространство $Q_0(V_0)$ это $C(r_{i_0},X_{i_0})$ или $\mathrm{GM}(r_{i_0},X_{i_0})^e$.

Так как T-пространство $Q_n(\mathrm{GM}(r,X))$, содержащее T-подпространство M_r^n/M_r^{n+1} (см. предл. 1 сл. 2) является элементарным и, следовательно, пространством Капелли, то для доказательства основного результата достаточно доказать, что любое T-подпространство в любом пространстве Капелли конечно базируемо.

Ясно, что при надлежащей перенумерации достаточно рассмотреть элементарное пространство вида

$$Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0,X_0)^e,\dots,\mathrm{GM}(r_n,X_n)^e\rangle,$$

где $X_i\neq X_j$ при $i\neq j$. Кроме того, можно считать, что пространство Капелли V имеет вид

$$V=Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0,X_0)^e,\dots,\mathrm{GM}(r_p,X_p)^e,C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,$$

где $0\leqslant p\leqslant n$, и тогда $r(V)=\max\{r_0,\dots,r_p\}$ или (полагая формально $p=-1$)

$$V=Q_n\langle C(r_0,X_0),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,$$

если $r(V)=0$. Учитывая, что все множества X_i попарно различны, можно считать, что V — T-подпространство в $Q_n^R(\Phi(r_0,\dots,r_n))$.

Каждый элемент из пространства V является по модулю $\Theta^{n+1}(\Phi(r_0,\dots,r_n))$ линейной комбинацией элементов вида

$$f_0\theta_{i_1}f_1\dots\theta_{i_p}f_p\theta_{i_{p+1}}f_{p+1}\dots\theta_{i_n}f_n, \tag{3}$$

где $f_0, \ldots, f_p$ — одночлены из алгебр $\mathrm{GM}(r_0, X_0), \ldots, \mathrm{GM}(r_p, X_p)$ или единичные элементы соответствующих алгебр, а $f_{p+1}, \ldots, f_n$ — многочлены из T-идеалов $C(r_{p+1}, X_{p+1}), \ldots, C(r_n, X_n)$.

Пусть $n \geqslant 1$. Скажем, что на позиции с номером α (где $0 \leqslant \alpha \leqslant p$) в выражении (3) имеется *пробел*, если f_α — единичный элемент алгебры $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e$. Если число α отлично от 0 и n, то элементы θ_{i_α} и $\theta_{i_{\alpha+1}}$ будем называть *крайними элементами пробела*. Если же $\alpha = 0$ или $\alpha = p = n$, то крайний элемент пробела θ_{i_1} или θ_{i_n}.

Рассмотрим теперь следующую цепочку T-подпространств пространства Капелли V

$$V_{p+1} \subset V_p \subset \ldots \subset V_0 = V,$$

где V_q — подпространство пространства V, порожденное квазимногочленами (3), у которых не более, чем $p+1-q$ пробелов (в случае $r(V) = 0$ пространство V_{p+1} совпадает с V). Ясно, что в случае $r(V) \geqslant 1$ T-пространство V_q/V_{q+1} распадается в прямую сумму T-пространств

$$V_q/V_{q+1} = \bigoplus (V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} + V_{q+1})/V_{q+1},$$

где $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ — подпространство пространства V_q, порожденное квазимногочленами (3), имеющими пробелы на позициях с номерами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (оно, очевидно, не является T-подпространством).

В пространствах V_q и $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ аналогично выше изложенному вводятся подпространства $V_q(d,c)$, $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(d,c)$ (переменные $x_1, \ldots, x_d$ входят в любой степени, а переменные $x_{d+1}, \ldots, x_{d+c}$ в степени $\leqslant 1$).

Введем на пространстве $V(d,0)$ следующее действие. Для любого элемента $f(x_1, \ldots, x_d)$ из $V(d,0)$ положим $f^{\langle x_{d+1}\rangle} = f(x_{d+1}x_1x_{d+1}, \ldots, x_{d+1}x_dx_{d+1})$ и, соответственно, для любого подмножества S в пространстве $V(d,0)$ положим

$$S^{\langle x_{d+1}\rangle} = \{f^{\langle x_{d+1}\rangle} \mid f \in S\}.$$

Ясно, что если квазимногочлен f вида (3) на позиции с номером α не имел пробела, то его не будет на этой позиции и у квазимногочлена $f^{\langle x_{d+1}\rangle}$.

В силу равенства (по модулю $\Theta^2(\Phi(r_0, \ldots, r_n))$)

$$x_{d+1}x_ix_{d+1} - \bar{x}_{d+1}\bar{x}_i\bar{x}_{d+1} = \theta_{d+1}\bar{x}_i\bar{x}_{d+1} + \bar{x}_{d+1}\theta_i\bar{x}_{d+1} + \bar{x}_{d+1}\bar{x}_i\theta_{d+1}$$

имеет место включение

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(d,0)^{\langle x_{d+1}\rangle} \subset W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(d+1,0) \oplus V_{q+1}, \tag{4}$$

где $W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(d+1,0)$ — подпространство в пространстве $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(d+1,0)$, порожденное квазимногочленами (3), у которых *все* крайние элементы равны θ_{d+1}, а элемент f_α является либо единицей соответствующей алгебры (если $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, либо многочленом вида $ug(x_{d+1}^{(\alpha)}x_1^{(\alpha)}x_{d+1}^{(\alpha)}, \ldots, x_{d+1}^{(\alpha)}x_d^{(\alpha)}x_{d+1}^{(\alpha)})v$, где g — либо одночлен степени $\geqslant 1$, либо многочлен из соответствующего идеала Капелли, а u и v — некоторые одночлены степени $\leqslant 2$ или единицы. Отметим, что по очевидным причинам, если хотя бы в одном месте пробелы идут подряд, т. е. $a_{i+1} = a_i + 1$, то проекция любого элемента из пространства $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d,0)^{\langle x_{d+1}\rangle}$ на компоненту $W_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+1,0)$ равна нулю.

В дальнейшем будет предполагаться, что рассматриваемые квазимногочлены (3) имеют степень $> n$ и, следовательно, множество $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ отлично от $\{0,1,\dots,n\}$.

По аналогии с алгеброй L из п. VI рассмотрим коммутативную k-алгебру $L_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$, порожденную элементами $\sum\limits_{\alpha\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}} r_\alpha \operatorname{tr} f^{(\alpha)}$ (в сумме учитываются только те элементы $f^{(\alpha)}$, которые отвечают местам без пробелов). В алгебре $L_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ рассмотрим подалгебру $L_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d)$, состоящую из элементов, зависящих только от переменных $x_1,\dots,x_d$.

Аналогично тому, как в п. VI было показано, что $H_{d,c}$ — нетеров $L(d)$-модуль, показывается, что $L_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d)$ — конечно порожденная коммутативная k-алгебра, а $L_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d)$-модуль $L_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d)V_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d,c)$ нетеров.

Для дальнейшего нам понадобится следующее понятие. Назовем подстановку τ из полугруппы T регулярной, если она имеет тип: $(x_1,\dots,x_i,\dots)\mapsto \mapsto(g_1x_1h_1,\dots,g_ix_ih_i,\dots)$, где $g_i,h_i\in k\langle 1,x_1,\dots,x_i,\dots\rangle$. Ясно, что регулярные подстановки образуют подполугруппу T^* полугруппы T. Если S — подмножество в некотором T-пространстве, то через S^{T^*} обозначим kT^*-модуль, порожденный этим множеством (T^*-подпространство, порожденное множеством S).

В дальнейшем будет использоваться следующий очевидный факт, называемый нами *унитарным принципом.*

Пусть S — некоторое множество квазимногочленов, зависящих от переменных $x_1,\dots,x_d$ и g — квазимногочлен из T^*-пространства $\{S\}^{T^*}$, в который входят еще и дополнительные переменные $x_{d+1},\dots,x_{d+c}$. Тогда квазимногочлен $g|_{x_{d+1}=\ldots=x_{d+c}=1}$ принадлежит T^*-пространству $\{S\}^{T^*}$.

Специализация переменной $x_i = x_i + \theta_i$ в единицу означает замену $\bar{x}_i$ на e, а θ_i на 0.

Рассмотрим теперь следующее отображение (его конструкция, использующая соотношение (2) и некоторую специальную линеаризацию, приводится в § 3). Для описания его свойств нам понадобится матрица

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1r^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{N1} & \dots & z_{Nr^2} \end{pmatrix},$$

составленная из переменных z_{ij} алгебры F, занумерованных для удобства двойными индексами, $r = r_0^2 + \dots + r_n^2$, N — некоторое натуральное число.

В случае, когда $r(V) \leqslant 1$ и N больше некоторого числа, определяемого по $r_0,\dots,r_n$ и d, существует отображение $f\mapsto f^Z$, действующее из $V_{p+1}(d,0)$ в $V_{p+1}(d,Nr^2)$, обладающее следующими свойствами:

1) если f — однородный элемент пространства $V(d,0)$, то
$f^Z = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} f^{[i]}$, *где*

$$\widetilde{z}_{ij} = \begin{pmatrix} [z_{ij}^{(0)}]_{r_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [z_{ij}^{(n)}]_{r_n} \end{pmatrix},$$

$z_{ij}^{(\alpha)}$ *— образ переменной z_{ij} в алгебре общих матриц $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_0)$, причем квазимногочлен $\operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} f^{[i]}$ линеен по каждой из Nr^2 переменных z_{ij} и $f^{[i]}|_{z_{ij}=1} = tf$ для некоторого натурального числа t;*

2) $f^Z \in \{f\}^{T^*}$ и, следовательно, любой квазимногочлен, получающийся из квазимногочлена f^Z с помощью подстановки, оставляющей переменные $x_1, \dots, x_d$ на месте, а переменные z_{ij} переводящей в элементы из алгебры $k\langle 1, x_1, \dots, x_d, \{z_{\alpha\beta}\}\rangle$, лежит в T^*-пространстве $\{f\}^{T^*}$.

В случае, когда $r(V) \leqslant 1$ и N больше некоторого числа, определяемого по $r_0, \dots, r_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ и d, существует отображение $f \mapsto f^Z$, действующее из $W_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+1,0)$ в $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+1, Nr^2)$, обладающее следующими свойствами:

1) $f^Z = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} z_{i1}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} \dots \operatorname{tr} z_{ir^2}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} f^{[i]}$, где матрица $z_{ij}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}$ получается из матрицы $\widetilde{z}_{ij}$ с помощью специализации в нуль тех из "коммутативных блоков" $[z_{ij}^{(\alpha)}]_1$, для которых $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Кроме того, аналогично предыдущему свойству 1), квазимногочлен $\operatorname{tr} z_{i1}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} \dots \operatorname{tr} z_{ir^2}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} f^{[i]}$ линеен по каждой из переменных z_{ij} и $f^{[i]}|_{z_{ij}} = tf$ для некоторого натурального числа t;

2) дословно повторяет предыдущее свойство 2).

Квазимногочлен f^Z при $f \in W_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+1,0)$ строится при помощи регулярных подстановок в переменные $x_1, \dots, x_d$ и линеаризацией. Следовательно, он состоит из слагаемых, имеющих пробелы на тех же позициях $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

VIII. *Доказательство основного результата.*

Лемма 1. *Пусть $r(V) \leqslant 1$. Тогда любое T-пространство в пространстве V конечно базируемо.*

Доказательство. На алгебре $Q^R(\Phi(r_0, \dots, r_s))/(\Theta^R(\Phi(r_0, \dots r_s)))^{n+1}$, очевидно, выполняется тождество Капелли некоторого порядка. Следовательно, с помощью теории представлений симметрической группы, доказательство сводится к квазимногочленам от d переменных для некоторого натурального d, т. е. к пространству $V(d,0)$.

Таким образом, достаточно доказать, что в любом подмножестве S пространства $V(d,0)$ имеется такое конечное подмножество G, из которого все квазимногочлены множества S получаются с помощью регулярных подстановок и линейных действий.

Докажем сначала этот факт для подмножества S из пространства $V_{p+1}(d,0)$ (нет ни одного пробела). Положим

$$S^Z = \{f^Z \mid f \in S\}, \quad S^{[i]} = \{f^{[i]} \mid f \in S\}.$$

Согласно свойствам отображения $f \mapsto f^Z$, имеет место включение $V(d,0)^Z \subset \subset \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} V(d,0)^{[i]}$. Поэтому для любого подмножества $S \subset V(d,0)$ имеем

$$S^Z \subset \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} S^{[i]} \subset \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} S_i,$$

где S_i — подпространство в пространстве $V(d, Nr^2)$, получающееся из множества $S^{[i]}$ с помощью всевозможных подстановок типа $z_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}$, где $\alpha \neq i$, $g_{\alpha\beta} \in k\langle 1, x_1, \dots, x_d, \{z_{\alpha\beta} \mid \alpha \neq i\}\rangle$, причем таких, что результат подстановки является снова квазимногочленом, линейным по всем переменным $z_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq i$. В силу нетеровости $L(d)$-модуля H_{d,Nr^2} (см. п. VI) модуль $L(d) \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} S_i$ нетеров, а в силу предложения 3 умножение на элементы из алгебры $L(d)$ можно заменить на подстановки в переменные $z_{i1}, \dots, z_{ir^2}$ и линейные действия. Следовательно, для любого подмножества P_i в пространстве $\operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \dots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} S_i$ существует такое конечное подмножество $G_i \subset P_i$, что каждый элемент из P_i может быть получен из элементов множества G_i с помощью подстановок в переменные $z_{i1}, \dots, z_{ir^2}$ и линейных действий. Ясно, что тогда существует конечное подмножество G множества S^Z, порождающее S^Z с помощью тех же действий. Осталось заметить, что любой элемент f^Z из S^Z при специализации $z_{ij} \mapsto 1$ переходит в элемент, кратный f, воспользоваться свойством 2) и унитарным принципом.

Доказательство аналогичного утверждения для любого подмножества S из пространства $W_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+1,0)$ проводится с использованием отображения $f \mapsto f^Z$ дословно так же.

Учитывая, что пространство $V_q(d,0)^{\langle x_{d+1}\rangle}$ распадается по модулю V_{q+1} в сумму пространств $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+0)^{\langle x_{d+1}\rangle}$, а для каждого из них имеет место включение (4), получаем, что для любого подмножества S пространства $V(d,0)$ найдется такое конечное подмножество G^* пространства $\{S\}^{T^*}$, что

$$(\ \dots\ (S)^{\langle x_{d+1}\rangle}\ \dots\ )^{\langle x_{d+p}\rangle} \subset \{G^*\}^{T^*}.$$

Специализируя переменные $x_{d+1}, \dots, x_{d+p}$ в единицу и используя унитарный принцип, получаем множество $G^*|_{x_{d+1}=\dots=x_{d+c}=1}$, из которого уже очевидным образом находится конечное подмножество G множества S, для которого $S \subset \{G\}^{T^*}$. Лемма доказана.

Замечания. (1) Специализация части переменных z_{ij} в единицу нужна, как нетрудно видеть, для того, чтобы наряду с произведением $\operatorname{tr}\widetilde{z}_{i1}\dots\operatorname{tr}\widetilde{z}_{ir^2}$ получать произведения $\operatorname{tr}\widetilde{z}_{i1}\dots\operatorname{tr}\widetilde{z}_{ir^2-1}$, $\dots$, $\operatorname{tr}\widetilde{z}_{i1}$, а затем из них уже получать произведение r^2+1 следов.

(2) Отображение $f\mapsto f^Z$ позволяет реализовать нетеровость $L(d)$-модуля $H_{d,c}$, не используя при этом умножения на следы, но действуя только подстановками и линейными операциями, т. е. с помощью алгебры kT.

Лемма 2. *Любое T-пространство в пространстве Капелли V конечно базируемо.*

Доказательство. Индукция по $(r(V),p+1)$. Базис индукции — лемма 1. Пусть теперь $r(V)>1$ и, следовательно, $p+1>0$. Рассмотрим морфизм T-пространств

$$\begin{aligned}\varphi\colon V\to Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0,X_0)^e/C(r_0,X_0),\dots,\mathrm{GM}(r_p,X_p)^e/C(r_p,X_p),\\ C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,\end{aligned}$$

индуцированный каноническими гомоморфизмами

$$\varphi_i\colon \mathrm{GM}(r_i,X_i)\to \mathrm{GM}(r_i,X_i)/C(r_i,X_i).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\ker\varphi=\sum_{i=1}^{p}Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0,X_0)^e,\dots,C(r_i,X_i),\dots,\mathrm{GM}(r_p,X_p)^e,\\ C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,\end{aligned}$$

то есть $\ker\varphi$ является суммой пространств Капелли, у которых число $p+1$ на единицу меньше, чем у пространства V и, следовательно, в $\ker\varphi$ утверждение леммы выполнено по индуктивному предположению. С другой стороны, в силу наличия сюръективных морфизмов T-пространств

$$\psi_i\colon F^e/M_{s_i}^{m_i}\to \mathrm{GM}(r_i,X_i)^e/C(r_i,X_i),$$

где $s_i=\begin{cases} r_i-1, & \text{если } r_i>1,\\ 1, & \text{если } r_i=1,\end{cases}$ m_i — некоторое натуральное число (см. п. VII), имеется сюръективный морфизм T-пространств

$$\begin{aligned}\psi\colon Q_n\langle F^e/M_{s_0}^{m_0},\dots,F^e/M_{s_p}^{m_p},C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle\to\\ \to Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0,X_0)^e/C(r_0,X_0),\dots,\mathrm{GM}(r_p,X_p)^e/C(r_p,X_p),\\ C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle.\end{aligned}$$

В такой ситуации, очевидно, достаточно доказать конечную базируемость любого T-подпространства в любом из T-пространств

$$\Lambda=Q_n\langle \Lambda_0,\dots,\Lambda_p,C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,$$

где $\Lambda_i = \mathrm{GM}(1, X_i)$, если $r_i = 1$, а при $r_i > 1$ $\Lambda_i = M_{r_{i-1}}^{t_i}/M_{r_{i-1}}^{t_i+1}$, где $0 \leqslant t_i < m_i$. Так как при $r_i > 1$ T-пространство Λ_i вкладывается в $Q_{t_i}\langle \mathrm{GM}(r_i-1, Y_i)^e, \dots, \mathrm{GM}(r_i-1, Y_i)^e\rangle$ (см. предл. 1, сл. 2), то Λ вкладывается как T-подпространство в T-пространство

$$W = Q_{n+t}\Big\langle \underbrace{\mathrm{GM}(s_0, Y_0)^e, \dots, \mathrm{GM}(s_0, Y_0)^e}_{t_0+1}, \dots, \underbrace{\mathrm{GM}(s_p, Y_p)^e, \dots, \mathrm{GM}(s_p, Y_p)^e}_{t_p+1}, \\ C(r_{p+1}, X_{p+1}), \dots, C(r_n, X_n)\Big\rangle,$$

где $t = t_0 + \dots + t_p$, причем $t_i = 0$, если $r_i = 1$. Остается заметить, что $r(W) = r(V) - 1$ и воспользоваться индуктивным предположением. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы остается заметить, что ее, в силу нильпотентности радикала алгебры F/I (см. [4]), достаточно доказать для алгебры F/M_r^m для некоторых r и m, что сводится к аналогичному утверждению для $M_r^n/M_r^{n+1} \subset Q_n(\mathrm{GM}(r, X))$, т. е. к элементарным пространствам и, следовательно, к лемме 2.

Замечания. (1) Нетеровость kT-модуля F/I позволяет в формулировке теоремы заменить основное поле k на произвольную коммутативную k-алгебру конечного типа.

(2) Приведенные в настоящей работе методы и результаты приводят к существенным обобщениям результатов работы [1], относящихся к конечной базируемости систем обобщенных многочленов.

(3) Используя методы, аналогичные вышеизложенным, можно доказать нетеровость тензорного произведения над полем k конечного числа алгебр F/I как модуля над kT. Интересным на наш взгляд следствием из этого факта и предложения 3 является конечная базируемость любого T-пространства в алгебре $\mathrm{TrGM}(r, X)$. В самом деле, согласно предложению 3 эта алгебра как kT-модуль порождается следующим конечным набором своих элементов

$$\operatorname{tr} \bar{x}_1, \dots, \operatorname{tr} \bar{x}_1 \dots \operatorname{tr} \bar{x}_{r^2}, (\operatorname{tr} \bar{x}_1)\bar{y}, \dots, (\operatorname{tr} \bar{x}_1 \dots \operatorname{tr} \bar{x}_{r^2})\bar{y}, \bar{y},$$

где $\bar{x}_i$, $\bar{y}$ — образы переменных из алгебры F.

(4) Полученные результаты позволяют аналогично тому, как это сделано в [1], положительно решить вопрос о представимости алгебры F/I, после чего с помощью результатов работы [6] может быть вычислен ее показатель роста.

§ 2 Доказательство предложений 2 и 3. Оператор $\mathrm{S_a}$

I. *Доказательство предложения 2.* Обозначим алгебру $\mathrm{TrGM}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$ через $\widetilde{\Phi}_{i_\alpha}$ (напомним, что $\Phi_i = R\,\mathrm{GM}(r_i, X_i)$, см. § 1 п. 1). Морфизм π индуцирует морфизмы T-пространств

$$\pi\colon Q_n\langle\Phi_{i_0},\dots,\Phi_{i_n}\rangle \to Q_n^R\langle\Phi_{i_0},\dots,\Phi_{i_n}\rangle,$$

$$\widetilde{\pi}\colon Q_n\langle\widetilde{\Phi}_{i_0},\dots,\widetilde{\Phi}_{i_n}\rangle \to Q_n^R\langle\Phi_{i_0},\dots,\Phi_{i_n}\rangle.$$

Ясно, что достаточно доказать, что $\widetilde{\pi}$ — инъективный морфизм T-пространств, т. е. что $\operatorname{Ker}\widetilde{\pi} = \operatorname{Ker}\pi\cap Q_n\langle\widetilde{\Phi}_{i_0},\dots,\widetilde{\Phi}_{i_n}\rangle = 0$, а этот вопрос сводится к аналогичному вопросу для подпространств $\widetilde{\Phi}_{i_0}\theta_{j_1}\widetilde{\Phi}_{i_1}\dots\theta_{j_n}\widetilde{\Phi}_{i_n}$ в T-пространствах $Q_n\langle\widetilde{\Phi}_{i_0},\dots,\widetilde{\Phi}_{i_n}\rangle$ и $Q_n^R\langle\widetilde{\Phi}_{i_0},\dots,\widetilde{\Phi}_{i_n}\rangle$ соответственно (не являющихся, очевидно, T-подпространствами). Интерпретируя рассматриваемые подпространства как тензорные произведения, получаем k-линейное отображение

$$\pi\colon \Phi_{i_0}\otimes_k\dots\otimes_k\Phi_{i_n}\to\Phi_{i_0}\otimes_R\dots\otimes_R\Phi_{i_n}$$

и его ограничение

$$\widetilde{\pi}\colon \widetilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\dots\otimes_k\widetilde{\Phi}_{i_n}\to\Phi_{i_0}\otimes_R\dots\otimes_R\Phi_{i_n}.$$

Нужно доказать, что $\operatorname{Ker}\pi\cap\widetilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\dots\otimes_k\widetilde{\Phi}_{i_n}=0$.

Для удобства доказательства введем следующую терминологию. Элемент $f_0\otimes f_1\otimes\dots\otimes f_n$ из пространства $\Phi_{i_0}\otimes_k\Phi_{i_1}\otimes_k\dots\otimes_k\Phi_{i_n}$ будем называть *правильным по α-й компоненте* тензорного произведения, если при $\beta\ne\alpha$ элемент f_β не зависит от переменных множества X_{i_α}. Линейные комбинации над полем k таких элементов также будем называть *правильными по α-й компоненте*. Правильные по всем компонентам элементы и только они, очевидно, составляют пространство $\widetilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\dots\otimes_k\widetilde{\Phi}_{i_n}$.

Подпространство $\operatorname{Ker}\pi$ в пространстве $\Phi_{i_0}\otimes_k\dots\otimes_k\Phi_{i_n}$, как нетрудно заметить, порождается над полем k элементами следующих $n+1$ типов:

$$b_0=a_{00}f_0\otimes a_{01}f_1\otimes\dots\otimes a_{0n}f_n-a_{00}a_{01}\dots a_{0n}f_0\otimes f_1\otimes\dots\otimes f_n,$$

где $a_{00},a_{01},\dots,a_{0n}$ — однородные элементы из алгебры $\operatorname{Tr}(r_{i_0},X_{i_0}) = k\,[\operatorname{tr}(\mathrm{GM}(r_{i_0},X_{i_0}))]$, $f_0\otimes f_1\otimes\dots\otimes f_n$ — правильный по 0-й компоненте элемент, а первое слагаемое элемента b_0 не является правильным по 0-й компоненте тензорного произведения (хотя бы один из элементов a_{00}, $a_{01},\dots$, a_{0n} не является константой из поля k);

$$b_1=a_{10}f_0\otimes a_{11}f_1\otimes\dots\otimes a_{1n}f_n-f_0\otimes a_{10}a_{11}\dots a_{1n}f_1\otimes\dots\otimes f_n,$$

где $a_{10},a_{11},\dots,a_{1n}$ — однородные элементы из алгебры $\operatorname{Tr}(r_{i_1},X_{i_1})$, $f_0\otimes f_1\otimes\dots\otimes f_n$ — правильный по 0-й, 1-й компоненте элемент, b_1 — правильный по нулевой компоненте элемент, а его первое слагаемое не является правильным по 1-й компоненте;

. . .

$$b_\alpha = a_{\alpha 0} f_0 \otimes a_{\alpha 1} f_1 \otimes \ldots \otimes a_{\alpha\alpha} f_\alpha \otimes a_{\alpha n} f_n - \\ - f_0 \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes a_{\alpha 1} \ldots a_{\alpha n} f_\alpha \otimes \ldots \otimes f_n,$$

где $a_{\alpha 0}, \ldots, a_{\alpha n}$ — элементы из алгебры $\mathrm{Tr}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$, $f_0 \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ — правильный по 0-й, 1-й,…, α-й компоненте элемент, b_α — правильный по 0-й, 1-й,…, $(\alpha - 1)$-й компонентам элемент, а его первое слагаемое не является правильным по α-й компоненте;

. . .

$$b_n = a_{n0} f_0 \otimes a_{n1} f_1 \otimes \ldots \otimes a_{nn} f_n - f_0 \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes a_{n0} \ldots a_{nn} f_n,$$

где $a_{n0}, a_{n1}, \ldots, a_{nn}$ — элементы из алгебры $\mathrm{Tr}(r_{i_n}, X_{i_n})$, $f_0 \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ — правильный по всем компонентам элемент, b_n — правильный по 0-й, 1-й,…, $(n-1)$-й компонентам элемент, а его первое слагаемое не является правильным по n-й компоненте.

В самом деле, ясно, что элементы типов $b_0, \ldots, b_n$ лежат в пространстве $\mathrm{Ker}\,\pi$. С другой стороны, очевидно, что любая "переброска следов" через элементы θ_i (а именно такими "перебросками" порождается пространство $\mathrm{Ker}\,\pi$) может быть получена как сумма "перебросок следов" типов $b_0, \ldots, b_n$ (по модулю этих соотношений любой элемент сравним с правильным по всем компонентам элементом).

Первые слагаемые элементов b_α обозначим через $p(b_\alpha)$, а вторые — через $c(b_\alpha)$. Заметим, что если некоторая линейная комбинация элементов типов $b_0, b_1, \ldots, b_n$ лежит в $\widetilde{\Phi}_{i_0} \otimes_k \ldots \otimes_k \widetilde{\Phi}_{i_n}$, то ее часть, составленная только из элементов типа b_0, равна нулю. Действительно, пусть $\lambda_1 b_0^{(1)} + \cdots + \lambda_s b_0^{(s)}$ — рассматриваемая часть линейной комбинации. Тогда ясно, что $\lambda_1 p(b_0^{(1)}) + \cdots + \lambda_s p(b_0^{(s)}) = 0$, так как остальные элементы линейной комбинации являются правильными по 0-й компоненте и, следовательно, не могут "уничтожить" элементы $p(b_0^{(i)})$. Но тогда в силу самой конструкции элементов b_k имеет место равенство $\lambda_1 c(b_0^{(1)}) + \cdots + \lambda_s c(b_0^{(s)}) = 0$, т. е. $\lambda_1 b_0^{(1)} + \cdots + \lambda_s b_0^{(s)} = 0$.

Точно также последовательно показывается, что элементы типа b_1, типа b_2,…, типа b_n могут давать только нулевой вклад в рассматриваемую линейную комбинацию. Отсюда следует, что $\mathrm{Ker}\,\pi \cap \widetilde{\Phi}_{i_0} \otimes_k \ldots \otimes_k \widetilde{\Phi}_{i_n} = 0$. Предложение доказано.

II. *Доказательство предложения 3.* Основным инструментом, используемым в доказательстве, служит соотношение (2) из § 1. Из него очевидным образом следует, что многочлен $\mathrm{tr}\,\bar{z}_1 \ldots \mathrm{tr}\,\bar{z}_n c_{\bar{r}^2}$ с точностью до множителя из поля k совпадает с многочленом

$$P_n(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{u \in U} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(r^2)} c_{r^2}(\bar{x}_1 u_{\sigma(1)}, \ldots, \bar{x}_{r^2} u_{\sigma(r^2)}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{r^2}), \qquad (5)$$

где U — множество наборов $u = (u_1, \ldots, u_{r^2})$, в которых u_i — одночлен от переменных из множества $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n\}$, причем

1) элемент u_i равен произведению $\bar{z}_{i_1} \ldots \bar{z}_{i_m}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m$, или $u_i = 1$;

2) неединичные одночлены из набора зависят от непересекающихся множеств переменных;

3) $\sum_{i=1}^{r^2} \deg u_i = n$.

В левой части равенства (5) отмечена зависимость только от переменных $z_1, \ldots, z_n$. Дело в том, что в приводимых ниже рассуждениях существенную роль играют только переменные $\bar{z}, \bar{z}_i$, и поэтому на зависимость рассматриваемых многочленов от остальных переменных мы не будем обращать внимания.

Пусть теперь $u = (u_1, \ldots, u_{r^2})$ — произвольный набор одночленов от переменных $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ (некоторые из u_i могут быть равны единице). Положим

$$S(u) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(r^2)} c_{r^2}(\bar{x}_1 u_{\sigma(1)}, \ldots \bar{x}_{r^2} u_{\sigma(r^2)}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{r^2}).$$

Тогда (5) можно переписать в виде

$$P_n(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{u \in U} S(u). \tag{6}$$

Обозначим через V_n подпространство в алгебре $\mathrm{GM}(r, X)$, порожденное всевозможными многочленами $S(u)$, в которых набор $u = (u_1, \ldots, u_{r^2})$ удовлетворяет условию: элемент u_i равен произведению $z_{i_1} \ldots z_{i_m}$ (не требуется, чтобы $i_1 < \ldots < i_m$) или единице, а также условиям 2) и 3), приведенным выше.

Рангом набора u назовем количество $\rho(u)$ его неединичных компонент. Ясно, что $1 \leqslant \rho(u) \leqslant r^2$.

Для любого натурального числа l обозначим через $V_{n,l}$ подпространство в V_n, порожденное многочленами $S(u)$, у которых $\rho(u) = l$. Легко видеть, что если $2 \leqslant l \leqslant r^2$, $\rho(u) = l$ и $u_1, \ldots, u_l$ — неединичные одночлены набора u, то многочлен $S(u) - P_l(u_1, \ldots, u_l)$ лежит в подпространстве $V_{n,l-1}$. Это соображение и будет использовано ниже.

Пусть $P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z)$ — многочлен из алгебры $\mathrm{GM}(r, X)$, задаваемый формулой (5) и с точностью до множителя из поля k совпадающий с многочленом $\operatorname{tr} \bar{z}_1 \ldots \operatorname{tr} \bar{z}_{r^2} \operatorname{tr} \bar{z}\bar{c}_{r^2}$. В силу (6) его можно представить в виде

$$P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z) = \sum_{\rho(u) = r^2} S(u) + \Delta_1,$$

где Δ_1 — линейная комбинация многочленов $S(u)$, в которых $\rho(u) \leqslant r^2 - 1$. Таким образом, в силу сказанного выше, для подходящих одночленов u_{ij} разность $d_1 = P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z) - \sum_i P_{r^2}(u_{i1}, \ldots, u_{ir^2})$ лежит в пространстве

V_{r^2+1,r^2-1}. Многочлен d_1 опять имеет вид

$$d_1 = \sum_{\rho(u)=l} \alpha_u S(u) + \Delta_2,$$

где $\alpha_u \in k$, $l \leqslant r^2 - 1$, а Δ_2 — линейная комбинация многочленов $S(u)$, в которых $\rho(u) \leqslant l-1$. После этого можно составить аналогичную разность d_2 многочлена d_1 и подходящей линейной комбинации выражений $P_l(u_{i1}, \ldots, u_{il})$, которая уже лежит в V_{r^2+1,r^2-2}.

Продолжая таким образом процесс понижения ранга, в итоге получим, что многочлен $P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z)$ есть линейная комбинация выражений $P_n(u_1, \ldots, u_n)$, где u_i — одночлены от $\bar z_1, \ldots, \bar z_{r^2}, \bar z$, $1 \leqslant n \leqslant r^2$.

Таким образом, многочлен со следом $\operatorname{tr} \bar z_1 \ldots \operatorname{tr} \bar z_{r^2} \operatorname{tr} \bar z \bar c_{r^2}$ получается из многочлена со следом $\operatorname{tr} \bar z_1 \ldots \operatorname{tr} \bar z_{r^2} \bar c_{r^2}$ с помощью подстановок вместо переменных $\bar z_i$ единицы или одночленов от переменных $\bar z_1, \ldots, \bar z_{r^2}, \bar z$ и линейных действий. Учитывая, что многочлен $\bar c_{r^2}$ в алгебре $\mathrm{TrGM}(r, X)$ не является делителем нуля, после сокращения получаем утверждение предложения 3.

Замечание. В доказательстве предложения 3 использовался многочлен Капелли c_{r^2}, не связанный непосредственно с утверждением предложения. Автору не известно простое доказательство этого предложения, не использующее свойств многочлена c_{r^2}.

III. *Оператор S_a на пространстве Капелли сложности* $\leqslant 1$. Пусть V — пространство Капелли сложности 1 (случай сложности 0 рассматривается аналогично), т. е.

$$V = Q_n \langle \mathrm{GM}(1, X_0)^e, \ldots, \mathrm{GM}(1, X_p)^e, C(r_{p+1}, X_{p+1}), \ldots, C(r_n, X_n) \rangle.$$

Обозначим часть переменных алгебры F двойными индексами и рассмотрим переменные $x_{01}, \ldots, x_{p1}, x_{p+11}, \ldots, x_{p+1 r_{p+1}^2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{n r_n^2}, y_{p+10}, \ldots, y_{p+1 r_{p+1}^2}, \ldots, y_{n0}, \ldots, y_{n r_n^2}, z, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ алгебры F. Зафиксируем набор элементов $\theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_n}$ (напомним, что $x_i = \bar x_i + \theta_i$) и рассмотрим *полилинейный* квазимногочлен $c = c_0 \theta_{i_1} \ldots \theta_{i_n} c_n$, в котором $c_\alpha = c_{r_\alpha^2}(x_{\alpha 1}^{(\alpha)}, \ldots x_{\alpha r_\alpha^2}^{(\alpha)}, y_{\alpha 0}^{(\alpha)}, \ldots y_{\alpha r_\alpha^2}^{(\alpha)})$, где $x_{\alpha i}^{(\alpha)}$, $y_{\alpha i}^{(\alpha)}$ — образы переменных $x_{\alpha i}$, $y_{\alpha i}$ алгебры F в алгебре $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)$, если $\alpha \geqslant p+1$, и $c_\alpha = x_{\alpha 1}^{(\alpha)}$, где $x_{\alpha 1}^{(\alpha)}$ — образ переменной $x_{\alpha 1}$ алгебры F в алгебре $\mathrm{GM}(1, X_\alpha)$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant p$. Пусть $\widetilde z$ — образ переменной z_n в алгебре Δ (см. п. VI). Положим

$$S_z(c) = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{i=1}^{r_\alpha^2} c_0 \theta_{i_1} c_1 \ldots \theta_{i_\alpha} c_\alpha \Big|_{x_{\alpha i} \mapsto x_{\alpha i}\, z} \theta_{i_{\alpha+1}} c_{\alpha+1} \ldots \theta_{i_n} c_n.$$

Пусть $\widetilde a$ — матрица из алгебры Δ, $u_{\alpha 1}^{(\alpha)}, \ldots, u_{\alpha r_\alpha^2}^{(\alpha)}$, $v_{\alpha 0}^{(\alpha)}, \ldots, v_{\alpha r_\alpha^2}^{(\alpha)}$ — матрицы из алгебр $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)$, $\alpha = 0, \ldots, n$. Положим

$$c' = c|_{x_{\alpha i} \mapsto u_{\alpha i},\, y_{\alpha j} \mapsto v_{\alpha j},\, i=1,\ldots,r_\alpha^2,\, j=0,\ldots,r_\alpha^2,\, \alpha=0,\ldots,n},$$

$$S_a(c') = S_z(c)\Big|_{z\mapsto a,\, x_{\alpha i}\mapsto u_{\alpha i},\, y_{\alpha j}\mapsto v_{\alpha j},\, i=1,\dots,r_\alpha^2,\, j=0,\dots,r_\alpha^2,\, \alpha=0,\dots,n}.$$

В силу соотношения (2) и по определению элементов $\widetilde{a}$ из алгебры Δ для любого натурального N имеет место соотношение

$$S_a^N(c') = (\operatorname{tr}\widetilde{a})^N c' \tag{7}$$

и, в частности, $S_a^N(c_\alpha) = (r_\alpha \operatorname{tr} a^{(\alpha)})^N c_\alpha$ (напомним, что $\operatorname{tr}\widetilde{a} = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} r_\alpha \operatorname{tr} a^{(\alpha)}$).

Таким образом, для любого элемента a из алгебры F на пространстве V определено действие оператора S_a (являющееся по сути дела интерпретацией умножения на след $\operatorname{tr}\widetilde{a}$ на языке сумм $\sum\limits_{\alpha=0}^{n}\sum\limits_{i=1}^{r_\alpha^2}\dots$).

§ 3 Пространства Капелли сложности $\leqslant 1$

Цель настоящего параграфа — построение для пространства Капелли сложности $\leqslant 1$ отображения $f\mapsto f^Z$, используемого в § 1 (см. п. VII).

I. *Предварительные преобразования.* Как уже отмечалось, не теряя общности, можно считать, что рассматриваемое пространство Капелли, если его сложность равна 1, имеет вид

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(1,X_0)^e,\dots,\mathrm{GM}(1,X_p)^e, C(r_{p+1},X_{p+1}),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,$$

где $X_i\neq X_j$ при $i\neq j$. $\mathrm{GM}(1,X_i)^e = k[X_i]$ — алгебра коммутативных многочленов. Если же $r(V)=0$, то

$$V = Q_n\langle C(r_0,X_0),\dots,C(r_n,X_n)\rangle,$$

где $r_i\geqslant 2$. Таким образом, любой элемент f из пространства $V(d,0)$ в случае $r(V)=1$ является по модулю идеала $\Theta^{n+1}(\Phi(r_0,\dots,r_s))$ линейной комбинацией элементов вида

$$f_0\theta_{i_1}f_1\dots\theta_{i_p}f_p\theta_{i_{p+1}}\dots\theta_{i_n}f_n, \tag{8}$$

где $1\leqslant i_\alpha\leqslant d$, $f_0,\dots,f_p$ — одночлены от непересекающихся множеств коммутирующих переменных, являющихся образами переменных $x_1,\dots,x_d$ из алгебры F, или единичные элементы соответствующих алгебр, а при $\alpha=p+1,\dots,n$ многочлен f_α принадлежит T-идеалу $C(r_\alpha,X_\alpha)(d,0)$ и зависит от переменных $x_1^{(\alpha)},\dots,x_d^{(\alpha)}$. В случае $r(V)=0$ коммутативные одночлены отсутствуют.

Всюду ниже для определенности рассматривается случай $r(V)=1$ (случай $r(V)=0$ рассматривается аналогично). При этом квазимногочлен f^Z будет строится для определенности на пространстве $V_{p+1}(d,0)$ (нет ни одного пробела). Аналогично может быть построен квазимногочлен f^Z на любом из подпространств $W_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(d+1,0)$.

Все дальнейшие рассмотрения идут по модулю идеала $\Theta^{n+1}(\Phi(r_0,\dots,r_s))$ и это специально не оговаривается.

Используя стандартным образом теорему Ширшова о высоте и тождества типа Гамильтона–Кэли, квазимногочлен (8) (следовательно, и квазимногочлен f) можно представить в виде линейной комбинации квазимногочленов со следом вида

$$\operatorname{tr}\widetilde{a}_1\dots\operatorname{tr}\widetilde{a}_s g_0\theta_{i_1}g_1\dots\theta_{i_p}g_p\theta_{i_{p+1}}g_{p+1}\dots\theta_{i_n}g_n, \tag{9}$$

где $\widetilde{a}_i$ — одночлены из алгебры Δ (образы некоторых одночленов a_i из алгебры F), $g_0,\dots,g_p$ — коммутативные одночлены положительной степени, ограниченной числом $d\cdot r$ (где $r=r_0^2+\dots+r_n^2$), а $g_{p+1},\dots,g_n$ — многочлены вида

$$c_{r_\alpha^2}(u_1^{(\alpha)},\dots,u_{r_\alpha^2}^{(\alpha)},v_0^{(\alpha)},\dots,v_{r_\alpha^2}^{(\alpha)}),$$

где $u_i^{(\alpha)},v_j^{(\alpha)}$ — одночлены от элементов $x_1^{(\alpha)},\dots,x_d^{(\alpha)}$, степень которых ограничена числом, зависящим от r и d.

Пусть L — произвольное натуральное число и y — одна из переменных свободной алгебры F, отличная от переменных $x_1,\dots,x_d,x_{d+1}$. Рассмотрим квазимногочлен $f^*=f(x_1y^L,\dots,x_dy^L)$ (в случае пространства $W_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ нужно рассматривать квазимногочлен $f(x_1y^L,\dots,x_dy^L,x_{d+1})$). Преобразуем его к виду, удобному для дальнейших действий.

Будем говорить, что одночлен $u^*=x_{i_1}y^{l_1}x_{i_2}\dots x_{i_q}y^{l_q}$, где $0\leqslant l_i\leqslant r-1$, получается из одночлена $u=x_{i_1}\dots x_{i_q}$ из алгебры F *с помощью y-прокладки*. Аналогичный термин будет использован и в относительно свободных алгебрах.

Используя выражение (9) и тождество Гамильтона–Кэли, получаем, что квазимногочлен f^* является линейной комбинацией выражений

$$\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_1}\dots\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_l}\operatorname{tr}\widetilde{a}_1^*\dots\operatorname{tr}\widetilde{a}_s^* g_0^*y^{(0)^L}\Delta_{i_1}g_1^*y^{(1)^L}\dots\Delta_{i_p}g_p^*y^{(p)^L}\Delta_{i_{p+1}}g_{p+1}^*\dots\Delta_{i_n}g_n^*, \tag{10}$$

где $\widetilde{a}_1^*,\dots,\widetilde{a}_s^*$, $g_1^*,\dots,g_p^*$ — одночлены, получающиеся из одночленов $\widetilde{a}_1,\dots,\widetilde{a}_s$, $g_1,\dots,g_p$ с помощью y-прокладки, а при $\alpha>p$ многочлен g_α^* имеет вид

$$g_\alpha^*=c_{r_\alpha^2}(u_1^{*(\alpha)}y^{(\alpha)^L},\dots,u_{r_\alpha^2}^*y^{(\alpha)^L},v_0^{*(\alpha)},\dots,v_{r_\alpha^2}^{*(\alpha)}),$$

где $u_i^{*(\alpha)},v_i^{*(\alpha)}$ — одночлены, получающиеся из одночленов $u_i^{(\alpha)},v_i^{(\alpha)}$ с помощью y-прокладки, а элемент Δ_{i_α} равен $\theta_{i_\alpha}y^{(\alpha)^l}$ или $x_{i_\alpha}^{(\alpha-1)}y^{(\alpha-1)^{l_1}}\theta y^{(\alpha)^{l_2}}$, где $\theta=y-\bar{y}$, $0\leqslant l,l_1,l_2\leqslant r-1$.

С произвольным набором одночленов $a=(\widetilde{a}_1,\dots,\widetilde{a}_s)$ можно связать следующее множество $B(a)$ наборов $b=(b_0,\dots,b_n)$:

1) если $0\leqslant\alpha\leqslant p$, то $b_\alpha=b_{\alpha1}$, если $\alpha\geqslant p+1$, то $b_\alpha=(b_{\alpha1},\dots,b_{\alpha r_\alpha^2})$, где $b_{\alpha\beta}$ — единица алгебры $\mathrm{GM}(r_\alpha,X_\alpha)^e$ или образ в этой алгебре произведения $\widetilde{a}_{j_1}\dots\widetilde{a}_{j_k}$ элементов из набора a , причем $1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant s$;

2) каждый из одночленов a_j из набора a входит в некоторую компоненту $b_{\alpha\beta}$ набора b и при этом не может входить в две разные компоненты, т. е. неформально говоря, набор $(b_0, \ldots, b_n)$ полилинеен по элементам $a_1, \ldots, a_s$.

С выражением (10) и набором b из $B(a)$ однозначно связан квазимногочлен

$$g(b) = g_0(b)\Delta_{i_1} g_1(b) \ldots \Delta_{i_n} g_n(b),$$

где $g_\alpha(b) = g^*_\alpha b_{\alpha 1} {y^{(\alpha)}}^L$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant p$, а при $\alpha \geqslant p+1$

$$g_\alpha(b) = c_{r^2_\alpha}({u_1^*}^{(\alpha)} b_{\alpha 1} {y^{(\alpha)}}^L, \ldots, {u^*_{r^2_\alpha}}^{(\alpha)} b_{\alpha r^2_\alpha} {y^{(\alpha)}}^L, {v_0^*}^{(\alpha)}, \ldots, {v^*_{r^2_\alpha}}^{(\alpha)}).$$

В силу соотношения (7) по аналогии с (6) из § 2 выражение (10) с точностью до ненулевого коэффициента из поля k совпадает с квазимногочленом

$$h(a^*) = \operatorname{tr} \widetilde{y}^{p_1} \ldots \operatorname{tr} \widetilde{y}^{p_l} \sum_{b \in B(a^*)} g(b),$$

где $a^* = (\widetilde{a}^*_1, \ldots, \widetilde{a}^*_s)$.

Назовем *c-преобразованием набора* a набор $a' = (\widetilde{a}'_1, \ldots, \widetilde{a}'_s)$, получающийся из набора a с помощью некоторой перестановки компонент $\widetilde{a}_j$ и последующими циклическими перестановками в одночленах $\widetilde{a}_j$ (перестановка компонент и циклические перестановки в одночленах могут быть, в частности, и тождественными).

В силу перестановочности следов и независимости их от циклических перестановок сомножителей под знаком следа для любого c-преобразования a' набора a имеет место равенство

$$h(a) = h(a'), \tag{11}$$

которое и будет использовано ниже.

Будем считать в дальнейшем, что $L \geqslant 2r \deg f$, и, исходя из этого, преобразуем каждый из квазимногочленов $g(b)$ следующим образом. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant p$, то представим каждый из многочленов $g_\alpha(b)$ в виде $g_\alpha(b) = g^*_\alpha b_{\alpha 1} y^{L_{\alpha 1}}$, а если $\alpha \geqslant p+1$, то в виде

$$g_\alpha(b) = c_{r^2_\alpha}({u_1^*}^{(\alpha)} \dot{b}_{\alpha 1} {y^{(\alpha)}}^{L_{\alpha 1}}, \ldots, {u^*_{r^2_\alpha}}^{(\alpha)} \dot{b}_{\alpha r^2_\alpha} {y^{(\alpha)}}^{L_{\alpha r^2_\alpha}}, {v_0^*}^{(\alpha)}, \ldots, {v^*_{r^2_\alpha}}^{(\alpha)}),$$

где $\dot{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} {y^{(\alpha)}}^{L - L_{\alpha\beta}}$, причем степень по y одночлена $\dot{b}_{\alpha\beta}$ равна $\sum\limits_{i=1}^{s} \deg_y a^*_i +$ $+ L'$, где $L' = r^2 + r \max\left\{\deg_y {u_i^*}^{(\alpha)}, \deg {v_i^*}^{(\alpha)}\right\} + 2\sum_{\alpha=1}^n \deg_y \Delta_{i_\alpha}$. Назовем одночлен $\dot{a}_i = y^{\deg_y a^*_i}$ и образы его в относительно свободных алгебрах *y-моделью* одночлена a^*_i. Ясно, что $\dot{b}_{\alpha\beta}$ является произведением образов одночленов $\widetilde{a^*}_{j_1} \ldots \widetilde{a^*}_{j_l}$, y-моделей одночленов из множества $\{\widetilde{a^*}_1, \ldots, \widetilde{a^*}_m\} \setminus \{\widetilde{a^*}_{j_1} \ldots \widetilde{a^*}_{j_l}\}$ и элемента $y^{L'}$ в алгебре $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)^e$.

Каждую из степеней ${y^{(\alpha)}}^{L_{\alpha\beta}}$ с помощью тождества Гамильтона–Кэли можно представить в виде линейной комбинации выражений вида $\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_1}\ldots\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_l}{y^{(\alpha)}}^{l_{\alpha\beta}}$, где $0\leqslant l_{\alpha\beta}\leqslant r-1$. Следовательно, квазимногочлен $g(b)$, а вместе с ним и квазимногочлен f^*, является линейной комбинацией квазимногочленов вида

$$\dot{g}(b)=\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_1}\ldots\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_l}\dot{g}_0(b)\Delta_{i_1}\dot{g}_1(b)\ldots\Delta_{i_n}\dot{g}_n(b),$$

где $\dot{g}_\alpha(b)=g^*_\alpha\dot{b}_{\alpha1}{y^{(\alpha)}}^{l_{\alpha1}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant p$, а если $p+1\leqslant\alpha\leqslant n$, то $\dot{g}_\alpha(b)=c_{r^2_\alpha}({u^*_1}^{(\alpha)}\dot{b}_{\alpha1}{y^{(\alpha)}}^{l_{\alpha1}},\ldots,{u^*_{r^2_\alpha}}^{(\alpha)}\dot{b}_{\alpha r^2_\alpha}{y^{(\alpha)}}^{l_{\alpha r^2_\alpha}},{v^*_0}^{(\alpha)},\ldots,{v^*_{r^2_\alpha}}^{(\alpha)})$, где $0\leqslant l_{\alpha\beta}\leqslant$ $\leqslant r-1$. В силу предложения 3 можно считать, что в квазимногочлене $\dot{g}(b)$ содержится r сомножителей вида $\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_i}$ (т. е. $l=r^2$).

Скажем, что переменная y, входящая в квазимногочлен $\dot{g}(b)$, находится в нем на *активной позиции*, если она входит в один из одночленов $b_{\alpha\beta}$, т. е. входит в один из сомножителей ${a^*_j}^{(\alpha)}$, $\dot{a}^{(\alpha)}_j$ или ${y^{(\alpha)}}^{L'}$.

Скажем, что переменная y находится в квазиодночлене $\dot{g}(b)$ на *активной позиции уровня* (i,j), если она входит в один из одночленов ${a^*_j}^{(\alpha)}$ или $\dot{a}^{(\alpha)}_j$ и стоит в нем на i-м месте, считая входящие в одночлен элементы $y^{(\alpha)}$ слева направо. Если же переменная y входит в одночлен ${y^{(\alpha)}}^{L'}$ и стоит в нем на i-м месте, то скажем, что она находится на *активной позиции уровня* $(0,i)$.

Скажем, что переменная y находится на *пассивной позиции* в квазимногочлене $\dot{g}(b)$, если она входит в один из одночленов ${y^{(\alpha)}}^{l_{\alpha\beta}}$, $g^*_1,\ldots,g^*_p$, ${u^*_i}^{(\alpha)}$, ${v^*_i}^{(\alpha)}$ (если $\alpha\geqslant p+1$) или в один из элементов Δ_{i_α}. Так как совокупная степень этих элементов по y, очевидно, ограничена числом, не зависящим от степени квазимногочлена f, то количество пассивных позиций в квазимногочлене $\dot{g}(b)$ ограничено. Занумеруем пассивные позиции произвольным образом.

Скажем, что переменная y находится на *центральной позиции*, если она входит в произведение $\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_1}\ldots\operatorname{tr}\widetilde{y}^{p_l}$.

II. *Символическая степень.* В [1] было введено понятие так называемой *символической степени* квазимногочлена. Оно без труда переносится и на более общую ситуацию, рассматриваемую в настоящей работе.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_d)$ — произвольный однородный степени $\geqslant t$ квазимногочлен, зависящий от переменных $x_1,\ldots,x_d$, т. е. в его квазиодночлены входят элементы $x^{(j)}_i$, θ_i и следы от многочленов, содержащих элементы $x^{(j)}_i$, где $i=1,\ldots,d$. Подстановку $f(g_1,\ldots,g_d)$ будем понимать в смысле уже введенной на алгебре квазимногочленов T-структуры. Пусть $z_1,\ldots,z_t$ — переменные алгебры F, отличные от $x_1,\ldots,x_d$.

Обозначим через $Sf(x_1,\ldots,x_d,z_1,\ldots,z_t)$ квазимногочлен, являющийся $(z_1,\ldots,z_t)$-полилинейной частью квазимногочлена

$$f(x_1(1+z_1+\cdots+z_t),\ldots,x_d(1+z_1+\cdots+z_t))$$

(все z_i входят в Sf в первой степени). Пусть $h_1, \dots, h_t$ — произвольные многочлены из алгебры F. Положим

$$f^{(h_1,\dots,h_t)} = Sf(x_1, \dots, x_d, h_1, \dots, h_t)$$

и назовем квазимногочлен $f^{(h_1,\dots,h_t)}$ *символической степенью квазимногочлена* f.

Символическая степень обладает рядом очевидных свойств, отмеченных в [1]. Наиболее важным из них является то, что она, очевидно, не выводит за пределы T^*-пространства.

Символическая степень $f^{(h_1,\dots,h_t)}$ может быть введена еще и с помощью так называемых *α-вставок*.

Элементы $x_i^{(j)}$ и θ_i назовем Q-специализациями переменных x_i в алгебре квазимногочленов. Ясно, что всякий квазиодночлен есть произведение в некотором порядке Q-специализаций переменных x_i и еще, в некоторых местах между ними, следов от произведений элементов $x_i^{(j)}$ (представление в виде произведения может быть не единственным).

Пусть u — квазиодночлен степени $s > 0$, представленный некоторым фиксированным образом в виде такого произведения, $h_1, \dots, h_t$ — набор многочленов из алгебры F и $\alpha\colon \{1, \dots, t\} \to \{1, \dots, s\}$ — некоторое инъективное отображение ($t \leqslant s$).

Назовем *α-вставкой в квазиодночлен и набора* $(h_1, \dots, h_t)$ квазимногочлен $u^{(\alpha,h_1,\dots,h_t)}$, определяемый следующим образом. Пусть в представлении квазиодночлена u на местах с номерами $\alpha(1), \dots, \alpha(t)$ стоят Q-специализации переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$, возможно, под знаком следа. Тогда квазимногочлен $u^{(\alpha,h_1,\dots,h_t)}$ есть результат замены этих t элементов по правилу: если эта Q-специализация имеет вид $x_{i_k}^{(j)}$, то происходит замена на $x_{i_k}^{(j)} g_k^{(j)}$, если же она имеет вид θ_{i_k}, то происходит замена на $x_{i_k} g_k - \bar{x}_{i_k} \bar{g}_k$; остальные $s - t$ элементов этого квазиодночлена остаются без изменения. Ясно, что

$$u^{(h_1,\dots,h_t)} = \sum_{\alpha} u^{(\alpha,h_1,\dots,h_t)},$$

где суммирование ведется по всем α-вставкам. По линейности это определение можно распространить на любые квазимногочлены.

Замечания. (1) Ясно, что α-вставка, вообще говоря, зависит от способа записи квазиодночлена. Однако символическая степень, как это видно из первого определения, является корректно заданной операцией. Для конкретных вычислений второй подход к определению символической степени бывает более удобным.

(2) Символическую степень можно рассматривать и относительно части переменных, т. е. рассматривать однородный степени $\geqslant t$ по переменным

$x_1, \ldots, x_d$ квазимногочлен $f(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_s)$, по нему строить квазимногочлен $Sf(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t)$, являющийся $(z_1, \ldots, z_t)$-полилинейной частью квазимногочлена

$$f(x_1(1 + z_1 + \cdots + z_t), \ldots, x_d(1 + z_1 + \cdots + z_t), y_1, \ldots, y_s)$$

и т. д. В этом случае можно использовать обозначение $f^{(h_1,\ldots,h_t)_G}$, где $G = \{x_1, \ldots, x_d\}$. Например, если $c = c_0\theta_{i_1}c_1 \ldots \theta_{i_n}c_n$ — квазимногочлен из § 2, п. III, то символическая степень $c^{(z)_G}$ по множеству переменных $G = \{x_{ij}\}$, как легко видеть, равна

$$c^{(z)_G} = S_z(c) = \operatorname{tr} \widetilde{z}c.$$

В дальнейшем будет использоваться следующая операция (и некоторые ее модификации), основанная на символической степени. Для произвольного натурального числа N и произвольного подмножества G множества всех переменных, от которых зависит квазимногочлен f, положим (в предположении, что квазимногочлен f однороден по переменным из множества G)

$$f^{(z,N)_G} = (\ldots(f^{(z_1)_G})\ldots)^{(z_N)_G}\Big|_{z_1=\ldots=z_N=z}.$$

Если подмножество G не указано, то оно совпадает со множеством всех переменных, входящих в квазимногочлен f.

Введенную операцию можно интерпретировать следующим образом. Назовем *z-вставкой в квазимногочлен f относительно множества G* замену в каждом из составляющих квазимногочлен f квазиодночленов одного из элементов $x_i^{(\alpha)}$ или θ_i (где $x_i \in G$), причем только в каком-либо одном месте, если переменная x_i входит в квазиодночлен в степени > 1, т. е. появляется в нем в нескольких местах, на $x_i^{(\alpha)}z^{(\alpha)}$ или на $x_iz - \bar{x}_i\bar{z}$ соответственно. Ясно, что тогда $f^{(z,1)_G}$ — сумма всевозможных z-вставок в квазимногочлен f относительно множества G, $f^{(z,2)_G}$ — сумма всевозможных z-вставок в квазимногочлен $f^{(z,1)_G}$ относительно множества G и т. д. В частности, если $f = c$ и $G = \{x_{ij}\}$, то

$$f^{(z,N)_G} = S_z^N(c) = (\operatorname{tr} \widetilde{z})^N c.$$

Предложение 4. *Пусть y — одна из переменных алгебры F, не входящая в квазимногочлен c и $G = \{x_{ij}\} \cup \{y\}$. Тогда*

$$((\operatorname{tr} \widetilde{y}^m)c)^{(z,N)_G}\Big|_{y=1} = \gamma(\operatorname{tr} \widetilde{z})^N c,$$

где $\gamma = k \setminus \{0\}$.

Доказательство. Введем несколько обозначений. Пусть A — некоторое подмножество множества двойных индексов $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha = 0, 1, \ldots, n,$

$\beta = 1, \dots, r_\alpha^2\}$, которыми занумерованы переменные $x_{\alpha\beta}$, входящие в квазимногочлен c. Обозначим через w_A набор одночленов $(w_{\alpha\beta})$, занумерованных элементами множества A, где $w_{\alpha\beta} = z^{n_{\alpha\beta}}$, $n_{\alpha\beta}$ — натуральные числа и $\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} n_{\alpha\beta} = N$ (мы будем предполагать, что N и A таковы, что такие наборы w_A существуют; в тех случаях, когда такие наборы не существуют, можно положить формально $w_A = (0, \dots, 0)$). Положим

$$c(w_A) = c|_{x_{\alpha\beta}\mapsto x_{\alpha\beta}w_{\alpha\beta},\ (\alpha,\beta)\in A},$$

т. е. в квазимногочлене c все переменные $x_{\alpha\beta}$, имеющие индекс, принадлежащий подмножеству A, заменены на $x_{\alpha\beta}w_{\alpha\beta}$.

Пусть $(\varepsilon,\delta)\in A$. Положим $w_A(\varepsilon,\delta) = (w_{\alpha\beta}(\varepsilon,\delta))$, где $w_{\alpha\beta}(\varepsilon,\delta) = w_{\alpha\beta}$, если $(\alpha,\beta)\neq(\varepsilon,\delta)$, и $w_{\alpha\beta}(\varepsilon,\delta) = (y^m)^{(z,n_{\alpha\beta})}$, если $(\alpha,\beta) = (\varepsilon,\delta)$. По аналогии с квазимногочленом $c(w_A)$ положим

$$c(w_A(\varepsilon,\delta)) = c|_{x_{\alpha\beta}\mapsto x_{\alpha\beta}w_{\alpha,\beta}(\varepsilon,\delta),\ (\alpha,\beta)\in A}.$$

Ясно, что в силу соотношения (7), если $H = \{x_{\alpha\beta}\}$, то

$$(\operatorname{tr}\widetilde{z})^N c = c^{(z,N)_H} = S_z^N c = \sum_A \mu(w_A)c(w_A),$$

где $\mu(w_A)$ — кратность, с которой набор w_A входит в квазимногочлен $c^{(z,N)_H}$.

Положим теперь $\Gamma(w_A) = \sum\limits_{(\varepsilon,\delta)\in A} c(w_A(\varepsilon,\delta))$. Так как согласно соотношению (7) имеет место равенство

$$\operatorname{tr}\widetilde{y}^m c = S_{y^m} c = \sum_{(\alpha,\beta)} c\Big|_{x_{\alpha\beta}\mapsto x_{\alpha\beta}\,y^m},$$

то квазимногочлен $(\operatorname{tr}\widetilde{y}^m c)^{(z,N)_G}$ можно представить в виде суммы

$$(\operatorname{tr}\widetilde{y}^m)c^{(z,N)_H} + \sum_A\sum_{w_A}\mu(w_A)\Gamma(w_A). \tag{12}$$

Заметим, что $\Gamma(w_A)|_{y=1} = \prod_{(\alpha,\beta)\in A} m^{n_{\alpha\beta}}c(w_A) = m^N c(w_A)$. Следовательно, выражение (12) при специализации $y\mapsto 1$ превращается в квазимногочлен $c^{(z,N)_H} = (\operatorname{tr}\widetilde{z})^N c$, умноженный на ненулевую константу. Предложение доказано.

Рассмотрим теперь квазимногочлен $\dot g(b)$, введенный в п. I настоящего параграфа и z-вставки в этот многочлен относительно множества $\{y\}$. Как уже отмечалось, переменная y в квазимногочлене $\dot g(b)$ может занимать *активную, пассивную* или *центральную* позицию. В очевидном смысле можно рассмотреть множество *всех* позиций в квазимногочлене $\dot g(b)$. Пусть P — некоторое подмножество в множестве всех позиций квазимногочлена $\dot{g}(b)$. Обозначим через $\dot{g}(b)^{[z,1]_P}$ сумму z-вставок в квазимногочлен $\dot{g}(b)$ относительно множества $\{y\}$ по всем позициям из множества P. В очевидном смысле квазимногочлен $\dot{g}(b)^{[z,1]_P}$ имеет то же множество позиций по переменной y и к нему можно применить ту же операцию и т. д. Положим

$$\dot{g}(b)^{[z,N]_P} = (\dots \dot{g}(b)^{[z,1]_P} \dots)^{[z,1]_P}$$

и назовем эту операцию *N-кратной z-вставкой в множество позиций P.*

Замечание. Понятие позиции в квазимногочлене $\dot{g}(b)$, учитывая его очевидность, мы используем неформально. Для формализации пришлось бы ввести ряд дополнительных обозначений и определений, что сделало бы изложение более громоздким и ничего не прибавило бы по существу.

Рассмотрим в алгебре квазимногочленов идеал I, порожденный коммутаторами $[y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)}]$, где $\alpha = 0, 1, \dots, n$. В дальнейшем обозначение $f \equiv g$ означает, что $f - g \in I$, т. е. квазимногочлены рассматриваются по модулю соотношений $[y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)}] = 0$. В предлагаемой ниже конструкции будут рассматриваться квазимногочлены вида $f|_{y=1}$. Ясно, что если $f \equiv g$, то $f|_{y=1} = g|_{y=1}$.

Следующий важный для дальнейшего факт получается непосредственно из предложения 4.

Следствие. *Пусть P — множество, состоящее из всех активных позиций уровня $(0, i)$ и центральных позиций, входящих в одно из выражений $\operatorname{tr} \widetilde{y}^{p_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r^2$. Тогда*

$$\dot{g}(b)^{[z,N]_P} \equiv \gamma(\operatorname{tr} \widetilde{z})^N \dot{g}(b),$$

где $\gamma \in k$.

На пассивной позиции переменная y может присутствовать либо в виде элемента $y^{(\alpha)}$ из алгебры $\mathrm{GM}(r_\alpha, X_\alpha)$, либо в виде элемента $\theta = y - \bar{y}$. В первом случае M-кратная z-вставка на эту позицию имеет вид $y^{(\alpha)} {z^{(\alpha)}}^M$, а во втором

$$\theta {z^{(\alpha)}}^M + \sum_{M_1 + M_2 + 1 = M} y^{(\alpha-1)} {z^{(\alpha-1)}}^{M_1} \zeta {z^{(\alpha)}}^{M_2},$$

где $\zeta = z - \bar{z}$. Во втором случае M-кратная z-вставка, очевидно, представляется в виде суммы M-кратной z-вставки после элемента θ и суммы композиций M_1-кратной z-вставки после элемента $y^{(\alpha-1)}$ и M_2-кратной z-вставки после элемента ζ. Таким образом, с пассивной позицией второго типа связано две позиции (слева и справа от элемента ζ) и одна позиция после элемента θ, на которые фактически и происходят вставки переменной z. Эти позиции будем называть *виртуальными пассивными позициями* (ассоциированными с исходной пассивной позицией второго типа). К виртуальным пассивным позициям будем относить и все пассивные позиции первого типа.

Количество всех виртуальных пассивных позиций в квазимногочлене $\dot{g}(b)$, как легко видеть, ограничено числом

$$r \cdot \max\Big\{\deg_y u_i^{*^{(\alpha)}}, \deg_y v_i^{*^{(\alpha)}}\Big\} + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \deg_y \Delta_{i_\alpha}.$$

Занумеруем множество всех виртуальных позиций произвольным образом.

Пусть P — множество, состоящее из виртуальной позиции с номером j и всех активных позиций уровня $(0, r^2+j)$. Для вычисления квазимногочлена $\dot{g}(b)^{[z,N]_P}$ в этой ситуации рассмотрим вспомогательный квазимногочлен

$$\widehat{g} = \operatorname{tr}\widetilde{y}_1 \ldots \operatorname{tr}\widetilde{y}_q \widetilde{g}(b),$$

где $\widetilde{g}(b)$ — квазимногочлен, который отличается от квазимногочлена $\dot{g}(b)$ только тем, что у него на j-й виртуальной пассивной позиции стоит элемент $z^{(\alpha)^m}$, где $0 \leqslant m \leqslant r-1$.

Пусть P_{ij} — множество, состоящее из всех активных позиций уровня $(0, r^2+j)$ и позиции справа от переменной y_i в выражении $\operatorname{tr}\widetilde{y}_i$, P_{0j} — множество всех активных позиций уровня $(0, r^2+j)$. Положим

$$\widehat{g}^{[z,n_0,n_1,\ldots,n_q]} = ((\ldots \widehat{g}^{[z,n_1]_{P_{1j}}} \ldots)^{[z,n_q]_{P_{qj}}} \ldots)^{[z,n_0]_{P_{0j}}}.$$

Предложение 5. *Квазимногочлен $\dot{g}(b)^{[z,N]_P}$ является линейной комбинацией квазимногочленов вида*

$$\widehat{g}^{[z,n_0,\ldots,n_q]}\Big|_{y_1=\ldots=y_q=1},$$

где $N - \sum\limits_{i=0}^{q} n_i \leqslant (r-1)$, т. е. величина, ограниченная числом, не зависящим от квазимногочлена f.

Доказательство. Квазимногочлен $\dot{g}(b)^{[z,N]_P}$ является суммой квазимногочленов, получающихся из квазимногочлена $\dot{g}(b)$ вставкой на j-ю виртуальную позицию элемента вида $z^{(\alpha)^M}$ (где $M \leqslant N$) и на активные позиции некоторых степеней переменной z, причем суммарная степень вставок на активные позиции равна $N-M$. Преобразуем элемент $z^{(\alpha)^M}$ следующим образом. Рассмотрим дополнительную переменную t, отличную от переменных, входящих в квазимногочлен f, а также от y и z. Пусть $(z,\ldots,z,1,\ldots,1)$ — набор длины K, в котором первые M компонент занимает переменная z, а остальные $K-M$ компонент — единицы, $M \leqslant N < K$. Применяя символическую степень к одночлену $\widetilde{t}^K$, имеем

$$\frac{1}{K!}\,\big(\widetilde{t}^K\big)^{(z,\ldots,z,1,\ldots,1)}\Big|_{t=1} = \widetilde{z}^M.$$

В силу тождества Гамильтона–Кэли одночлен $\widetilde{t}^K$ является линейной комбинацией выражений вида

$$\operatorname{tr}\widetilde{t}^{k_1}\dots\operatorname{tr}\widetilde{t}^{k_q}\widetilde{t}^{k_{q+1}},$$

где $0\leqslant k_i\leqslant r-1$, $\sum\limits_{i=1}^{q+1}k_i=K$. Следовательно, многочлен $\dfrac{1}{K!}\,\left(\widetilde{t}^K\right)^{(z,\dots,z,1,\dots,1)}\Big|_{t=1}$ является линейной комбинацией выражений вида

$$\left(\operatorname{tr}\widetilde{t}^{k_1}\dots\operatorname{tr}\widetilde{t}^{k_q}\widetilde{t}^{k_{q+1}}\right)^{(z,\dots,z,1,\dots,1)}\Big|_{t=1}, \tag{13}$$

которые в свою очередь являются суммами выражений (взятых с некоторыми кратностями) вида

$$\operatorname{tr}\widetilde{z}^{m_1}\dots\operatorname{tr}\widetilde{z}^{m_q}\widetilde{z}^{m_{q+1}}, \tag{14}$$

где $0\leqslant m_i\leqslant k_i$, $\sum\limits_{i=1}^{q+1}m_i=M$. Заметим, что кратность вхождения выражения (14) в выражение (13) равна числу

$$C(m_1,\dots,m_{q+1})=\frac{k_1!}{(k_1-m_1)!m_1!}\dots\frac{k_{q+1}!}{(k_{q+1}-m_{q+1})!m_{q+1}!}M!(K-M)!.$$

Пусть $A(M,m_{q+1})$ — сумма взятых с соответствующими кратностями выражений (14), входящих в (13) при фиксированном m_{q+1}, причем $M\geqslant m_{q+1}$, $B(M,m_{q+1})=A(M,m_{q+1})\widetilde{z}^{-m_{q+1}}$.

Ясно, что если $m_i+1\leqslant k_i$, то

$$C(m_1,\dots,m_i+1,\dots,m_{q+1})=C(m_1,\dots,m_i,\dots,m_{q+1})\frac{(k_i-m_i)(M+1)}{(m_i+1)(K-M)},$$

т. е. если число K достаточно велико по сравнению с N (что, разумеется, и будет предполагаться), то функция $C(m_1,\dots,m_{q+1})$ монотонно убывает по каждому из своих аргументов (т. к. $\dfrac{(k_i-m_i)(M+1)}{(m_i+1)(K-M)}<1$).

Рассмотрим квазимногочлен $\widetilde{g}(b)$, отличающийся от квазимногочлена $\dot{g}(b)$ только тем, что у него на j-й виртуальной позиции стоит элемент $z^{(\alpha)^{m_{q+1}}}$, где $0\leqslant m_{q+1}\leqslant r-1$. По определению z-вставкой в выражение $B(M,m_{q+1})$ является $B(M+1,m_{q+1})$. Пусть $(B(m_{q+1},m_{q+1})\widetilde{g}(b))^{[z,1]}$ — сумма всевозможных z-вставок в $B(m_{q+1},m_{q+1})$ и в активные позиции уровня $(0,r^2+j)$. Положим

$$(B(m_{q+1},m_{q+1})\widetilde{g}(b))^{[z,M+1]}=\Big((B(m_{q+1},m_{q+1})\widetilde{g}(b))^{[z,M]}\Big)^{[z,1]}.$$

Тогда квазимногочлен $\dot{g}(b)^{[z,N]_P}$, как легко видеть, является линейной комбинацией выражений вида

$$(B(m_{q+1},m_{q+1})\widetilde{g}(b))^{[z,N-m_{q+1}]}. \tag{15}$$

Так как $C(m_1,\dots,m_{q+1})$ — убывающая по каждому из аргументов функция, то с помощью индукции по N нетрудно показать, что квазимногочлен (15) является линейной комбинацией квазимногочленов

$$\operatorname{tr}\widetilde{y}_1\dots\operatorname{tr}\widetilde{y}_q\widetilde{g}(b)^{[z,n_0,\dots,n_q]}\Big|_{y_1=\dots=y_q=1}$$

, причем $n_0+\dots+n_q+m_{q+1}=N$, что и доказывает предложение.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\dot{g}(b)^{[z,N]_P}=(\operatorname{tr}\widetilde{z})^{N'}g',$$

где $N-N'=(r-1)$, g' — некоторый квазимногочлен.

Доказательство. Согласно предложению 5 квазимногочлен $\dot{g}(b)^{[z,N]_P}$ является линейной комбинацией квазимногочленов $\widehat{g}^{[z,n_0,\dots,n_q]}\big|_{y_1=\dots=y_q=1}$, каждый из которых согласно предложению 4 сравним с $\gamma(\operatorname{tr}\widetilde{z})^{n_0+\dots+n_q}\widetilde{g}(b)$. Вынося общий множитель $(\operatorname{tr}\widetilde{z})^{N'}$, получаем утверждение следствия.

Предложение 6. *Пусть P — множество всех активных позиций фиксированного уровня. Тогда*

$$h(a^*)^{[z,N]_P}\equiv(\operatorname{tr}\widetilde{z})^N h(a^*).$$

Доказательство. После применения c-преобразования и использования равенства (11) можно считать, что активная позиция с номером (i,j) переместилась в крайнее правое положение в одночлене $\dot{b}_{\alpha\beta}$ (для любого набора b из $B(a^*)$). После этого остается применить соотношение (7). Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть количество виртуальных пассивных позиций в квазимногочленах $h(a^*)$, составляющих квазимногочлен f^*, ограничено некоторым числом D (не зависящим от выбора квазимногочлена f). Тогда*

$$(f^*)^{(z,N)_y}\Big|_{y=1}=(\operatorname{tr}\widetilde{z})^{N'}f',$$

где $N-N'\leqslant(r-1)D$, f' — некоторый квазимногочлен.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать этот факт для каждого из квазимногочленов $h(a^*)$. В свою очередь квазимногочлен $h(a^*)^{(z,N)_y}$ может быть получен по модулю $[y^{(\alpha)},z^{(\alpha)}]=0$ из квазимногочлена $h(a^*)$ с помощью композиции операций $h(a^*)^{(z,M)_P}$, где P — множество позиций одного из следующих трех типов:

1) множество всех активных позиций фиксированного уровня;

2) множество, состоящее из всех активных позиций уровня $(0, i)$ и всех центральных позиций, входящих в выражение $\operatorname{tr} \widetilde{y}^{p_i}$;

3) множество, состоящее из всех активных позиций уровня $(0, r^2 + j)$ и фиксированной виртуальной пассивной позиции с номером j.

Согласно предложению 6 и следствию из предложения 4 для множеств первых двух типов имеет место равенство

$$h(a^*)^{[z,M]_P} \equiv \gamma(\operatorname{tr} \widetilde{z})^M h(a^*),$$

где $\gamma \in k$.

Для множества третьего типа, согласно следствию из предложения 5, имеет место равенство

$$h(a^*)^{[z,M]_P} \equiv (\operatorname{tr} \widetilde{z})^{M'} h',$$

где $M - M' = (r-1)$.

Так как количество пассивных позиций ограничено числом D, то операция третьего типа применяется не более D раз. Следовательно,

$$h(a^*)^{[z,N]_y} \equiv (\operatorname{tr} \widetilde{z})^{N'} h',$$

где $N - N' \leqslant (r-1)D$. Остается положить $y = 1$. Предложение доказано.

III. *Построение отображения* $f \mapsto f^Z$. Пусть N — натуральное число, большее, чем $(r-1)D$, $M = Nr^2$ и $Z = (\widetilde{z}_{ij})$ — $N \times r^2$-матрица, введенная в § 1 п. VII. Сопоставим каждому однородному квазимногочлену f из пространства $V_{p+1}(d, 0)$ квазимногочлен $(f^*)^{(z,M)_y}\big|_{y=1}$ и обозначим через f^Z его линеаризацию по переменной z.

Предложение 8. *Квазимногочлен f^Z из пространства $V_{p+1}(d, Nr^2)$ удовлетворяет условиям 1), 2) из § 1 п. VII.*

Доказательство. Согласно предложению 7 квазимногочлен f^Z является суммой выражений вида

$$\operatorname{tr} \widetilde{z}_{i_1 j_1} \ldots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i_{M'} j_{M'}} f',$$

где f' — квазимногочлен, содержащий оставшиеся $M - M'$ переменных z_{ij}, причем $M - M' \leqslant (r-1)D$. Так как строк у матрицы Z больше, чем $(r-1)D$, то хотя бы одна из ее строк не содержит переменных z_{ij}, входящих в квазимногочлен f'. Группируя слагаемые соответственно строкам матрицы Z и вынося общий множитель, равный произведению следов $\operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \ldots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2}$, получаем равенство

$$f^Z = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} \widetilde{z}_{i1} \ldots \operatorname{tr} \widetilde{z}_{ir^2} f^{[i]},$$

выражающее первое свойство квазимногочлена f^Z. Второе свойство следует из того факта, что квазимногочлен f^Z получается из квазимногочлена f с помощью регулярных подстановок ($x_i \mapsto x_i y^L$, символическая степень,...) и специализации дополнительной переменной y в единицу. Предложение доказано.

Итак, построено отображение $f \mapsto f^Z$, применяемое в доказательстве леммы 1, на однородных квазимногочленах степени $> n$ из пространства $V_{p+1}(d,0)$. Далее оно продолжается по линейности очевидным образом. Аналогично строится отображение $f \mapsto f^Z$ на пространстве $W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(d+1,0)$.

В заключение отметим, что все условия в доказанной теореме существенны: характеристика 0, рассмотрение по модулю стандартного тождества или тождества Капелли (или, может быть, каких-то других тождеств). Без этих условий, как показывают примеры (см. [5]), основной результат места не имеет. Однако этим вопросам автор предполагает посвятить отдельную работу. Отметим еще, что если T-идеал I содержит коммутатор, то, как показано в [7], имеется полный аналог доказанной теоремы для случая бесконечного поля произвольной характеристики.

Литература

[1] Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54. — № 5. — С. 899–927.

[2] Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — № 5. — С. 597-641.

[3] Rowen L. H. Polinomial identities in Ring Theory. — New York: Academic Press, 1980.

[4] Brown A. The radical in a finitely generated PI-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 7. — № 2. — P. 385-386.

[5] Гришин А. В. Бесконечно базируемое T-пространство над полем характеристики 2 // Тезисы докл. междунар. конф. по алгебре и анализу, посвященная 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарева (5–11 июня 1994 г. г. Казань). — С. 29.

[6] Гришин А. В. Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 28. — № 5. — С. 536-557.

[7] Grishin A. V. On the finite basis property of T-spaces over field of finite characteristic. To appear in “Proc. of the Moscow-Tainan alg. workshop, 1994”.

Статья поступила в редакцию в феврале 1995 г.