

УДК 519.63.4::532.51.5

РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИЙ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ¹**В. И. Исаев, В. П. Шапеев**

Предложены и реализованы новые, более общие варианты метода коллокаций и наименьших квадратов (КНК) и ортогональный метод ускорения сходимости итераций решения системы линейных алгебраических уравнений. Применение последнего, выбор хороших значений управляющих параметров, основанный на результатах исследования зависимости от них свойств метода КНК, а также другие улучшения метода КНК, предложенные в данной работе, позволяют за приемлемое время на однопроцессорной ЭВМ численно решать задачи для уравнений Навье-Стокса на таких подробных сетках, как 1280×1280 . При этом общее число неизвестных $\sim 25 \cdot 10^6$. Результаты численного решения задачи о течении вязкой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой хорошо согласуются с известными результатами других авторов, в том числе полученными с использованием схем повышенного порядка аппроксимации с малой искусственной вязкостью. Это и некоторые другие факты свидетельствуют о том, что новые варианты метода КНК позволяют получать приближенное решение с высокой точностью.

Введение

Метод коллокаций и наименьших квадратов (КНК) [1–17] численного решения краевых задач для уравнений математической физики основан на совместном применении метода коллокаций и метода наименьших квадратов (МНК). Метод коллокаций — это проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в котором приближенное решение определяется из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках из области решения задачи. Он прост в реализации и дает хорошие результаты при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), как линейных, так и нелинейных, параболических и эллиптических задач на равномерных сетках. Этот метод интенсивно развивался во многих работах [18–20]. Однако на сетках с сильным локальным измельчением его реализация сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохо обусловленными матрицами. Поэтому в сочетании с адаптивными нерегулярными сетками он не дает более точного решения, чем в случае использования равномерных сеток.

МНК успешно применялся для улучшения свойств разностных схем решения задач аэрогидродинамики. В уравнениях моделей, используемых для решения задач из этой области, присутствуют конвективные и диффузионные члены. Конвективные члены содержат первые производные по пространственным переменным. В случае использования центральных разностей для их аппроксимации возникают большие нефизические осцилляции в численном решении. Поэтому от схем второго порядка для решения таких задач очень часто отказываются и используют схемы первого порядка, в которых первые производные аппроксимируются противопотоковыми разностями. Для уменьшения пространственных осцилляций в работе [21] предложено использовать переопределенную систему конечно-разностных уравнений с противопотоковыми и центральными разностями, под решением которой понимается сеточная функция, доставляющая минимум сумме квадратов невязок этих уравнений. Такой подход подавления осцилляций численного решения по своему результату похож в некотором отношении на внесение искусственной вязкости в исходный метод. Полученные схемы имеют второй

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-01-00080-а).

порядок аппроксимации. В ряде случаев они обладают существенными преимуществами по сравнению со схемами с противопотоковыми или центральными разностями. Таким образом, можно говорить, что МНК действует здесь как регуляризатор.

Однако МНК решения переопределенной СЛАУ имеет один существенный недостаток. Его реализация сводится к решению определенной СЛАУ (совместной системы с числом независимых уравнений равным числу неизвестных), обусловленность которой намного хуже обусловленности исходной системы. Поэтому в предложенных в данной работе вариантах метода КНК вместо МНК используются ортогональные методы линейной алгебры, основанные на QR -разложении матрицы. Такие методы решения переопределенной СЛАУ были предложены и реализованы в [22]. В случае отсутствия ошибок округления они дают то же решение, что и МНК. Основным достоинством ортогональных методов является то, что при их применении не ухудшается обусловленность СЛАУ.

В формулах метода КНК имеются параметры: координаты точек коллокаций внутри ячеек, координаты точек записи условий согласования численного решения на границе ячеек, весовые множители при отдельных слагаемых в условиях согласования и весовые множители при уравнениях в переопределенной системе. Назовем их *управляющими параметрами*. Впервые более общие варианты метода КНК за счет введения новых управляющих параметров предложены в [16] и используются в данной работе. Кроме того, подход к созданию новых вариантов метода, предложенный в [16], используется здесь в случае аппроксимации давления полиномами 2-го порядка в методе КНК для уравнений Навье — Стокса. В случае, когда метод КНК применяется для решения ОДУ, можно указать выбор хороших значений отдельных параметров при фиксированной системе базисных функций, дающий наименьшую погрешность численного решения [19]. При применении метода КНК к решению задач для уравнений с частными производными проблема выбора управляющих параметров ранее практически не исследовалась. Однако в численных экспериментах можно наблюдать, что за счет выбора значений параметров удается добиться одновременно улучшения обусловленности возникающих при использовании метода задач линейной алгебры, повышения гладкости приближенного решения дифференциальной задачи, уменьшения его погрешности и ускорения сходимости итерационного процесса его построения. Желание использовать хорошие значения управляющих параметров диктует необходимость исследования зависимости от них свойств метода. Такое исследование было проведено в [16]. Результаты исследования новых вариантов метода, предложенных в этой статье, качественно совпадают с опубликованными в [16] и здесь не приводятся.

Целью данной работы является дальнейшее развитие метода КНК. Его возможности расширялись за счет комбинированного использования качественно лучших алгоритмов (по сравнению с примененными в предыдущих реализациях). Среди них прежде всего отметим: новый метод ускорения сходимости итераций решения СЛАУ, ортогональные методы линейной алгебры вместо МНК, использование многосеточных комплексов. Кроме того, параметры метода КНК в данной работе выбирались на основе результатов исследования, приведенных в [16]. Комбинация перечисленных улучшений в реализации расширила возможности метода КНК так, что при его применении к уравнениям Навье — Стокса стало возможным за приемлемое время на однопроцессорной ЭВМ проводить расчеты на значительно более подробных сетках и в более широком диапазоне чисел Рейнольдса. В результате при расчете течения вязкой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой при $Re = 7500$ на сетке 1280×1280 наряду с угловыми вихрями первого (BR_1), второго (BR_2) и третьего (BR_3) порядков малости в данной работе был обнаружен очень слабый вихрь четвертого порядка (BR_4) из последовательности Моффата [23, 24]. Чтобы обнаружить такие вихри при численном решении, используемый метод должен обладать очень высокой точностью. При использовании сетки 1280×1280 в варианте метода КНК с аппроксимацией давления полиномами второго порядка общее число неизвестных составляет $\sim 25 \cdot 10^6$.

Среди публикаций других авторов наиболее близкие к полученным здесь результаты при-

ведены в работе [25], в которой используется схема высокого порядка с очень малой искусственной вязкостью. Эти, а также некоторые другие факты свидетельствуют о том, что метод КНК позволяет строить приближенное решение с высокой точностью.

1. Варианты метода КНК для уравнений Навье — Стокса и способы их реализации

1.1. Постановка задачи

В прямоугольной двумерной области $\Omega = [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$ рассматривается краевая задача для системы стационарных уравнений Навье — Стокса

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_j}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u_j = f_j, & (x_1, x_2) \in \Omega, \quad j = 1, 2, \\ \text{div}(\vec{v}) = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{V}, \quad p(x_1^0, x_2^0) = P_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где функции $p(x_1, x_2)$, $u_j(x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, — давление и компоненты вектора скорости \vec{v} соответственно, константа Re — число Рейнольдса, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

1.2. Аппроксимация давления полиномами первого порядка

Расчетная область Ω покрывается равномерной сеткой $\Omega_{h_1 h_2}$ с прямоугольными ячейками размера $2h_1 \times 2h_2$. В рассматриваемых здесь вариантах метода приближенное решение отыскивается в виде кусочно-полиномиальной функции на этой сетке. Для удобства реализации метода внутри каждой ячейки вводятся локальные переменные

$$y_1 = \frac{x_1 - x_{1m}}{h_2}, \quad y_2 = \frac{x_2 - x_{2m}}{h_2},$$

где точка (x_{1m}, x_{2m}) — центр m -й ячейки. Уравнения Навье — Стокса в локальных переменных записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_2} u_1 \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + \frac{1}{h_2} u_2 \frac{\partial u_j}{\partial y_2} + \frac{\partial p}{\partial y_j} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial y_2^2} \right) = f_j, & j = 1, 2, \\ \text{div}(\vec{v}) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Внутри одной ячейки сетки локальная координата $y_1 \in \left[-\frac{h_1}{h_2}, \frac{h_1}{h_2}\right]$, а $y_2 \in [-1, 1]$.

В каждой ячейке приближенное решение ищется в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{12} a_{j m} \vec{\psi}_j, \quad (1.3)$$

где m — это номер ячейки. При построении приближенного решения для уравнений Навье — Стокса компоненты вектора скорости в каждой ячейке аппроксимируем полиномами 2-го порядка, а давление — полиномами 1-го порядка. Кроме того, потребуем, чтобы каждый базисный элемент $\vec{\psi}_j$ тождественно удовлетворял уравнению неразрывности. В этом случае в

базисе остается 12 элементов [9, 14, 16]. Следовательно, получаемое здесь приближенное решение будет тождественно удовлетворять уравнению неразрывности внутри каждой ячейки.

Для определения неизвестных коэффициентов a_{jm} (1.3) в методе КНК для задачи (1.1) используются коллокации первых двух уравнений системы (1.2), умноженных на h_2^2 , в четырех внутренних точках ячейки, условия согласования на границах между ячейками, краевые условия (для ячеек, примыкающих к границе $\partial\Omega$). Условия согласования записываются в точках с локальными координатами $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \zeta\right)$ и $\left(\pm \zeta \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$, граничные условия — в точках $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \xi\right)$ и $\left(\pm \xi \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$, уравнения коллокаций — в точках $\left(\pm \omega \frac{h_1}{h_2}, \pm \omega\right)$. В данной работе $0 < \xi < 1$, $0 < \omega < 1$, $0 < \zeta < 1$.

В качестве условий согласования берутся требования непрерывности в точках с локальными координатами $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \zeta\right)$ и $\left(\pm \zeta \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$ следующих выражений:

$$\eta_1 U_n + \eta_2 \frac{\partial U_n}{\partial \vec{n}} - \eta_3 p, \quad \eta_1 U_\tau + \eta_2 \frac{\partial U_\tau}{\partial \vec{n}},$$

где \vec{n} — вектор единичной внешней нормали к границе ячейки, U_n , U_τ — нормальная и касательная компоненты скорости, η_j , $j = 1, 2, 3$, — положительные управляющие весовые параметры.

Если сторона ячейки примыкает к границе области Ω , то на ней в точках $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \xi\right)$ и $\left(\pm \xi \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$ записываются краевые условия для компонент скоростей. Соответствующие уравнения при этом выглядят следующим образом:

$$\left(\sum_{j=1}^{12} a_{jm} \vec{\psi}_j\right)_k = \left(\vec{V}\right)_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.4)$$

Здесь $(\vec{\psi}_j)_k$, $(\vec{V})_k$ — это k -е компоненты векторов $\vec{\psi}_j$ и \vec{V} . При записи переопределенной системы для задачи (1.1) каждое из уравнений вида (1.4) умножается на положительный весовой параметр η_4 . В одной ячейке сетки, содержащей точку с координатами (x_1^0, x_2^0) , записывается граничное условие для давления. Весовой множитель для этого уравнения в переопределенной системе в данной работе не вводится. Уравнения коллокаций в задаче (1.1) при записи переопределенной СЛАУ умножаются на положительный весовой параметр η_5 .

Для нахождения приближенного решения задачи (1.1) здесь используется метод итераций по подобластям (альтернирующий метод Шварца), в котором каждая ячейка сетки является подобластью. Итерации по подобластям и по нелинейности совмещаются. В данной работе линейризация уравнений (1.1) производится по Ньютону [9, 14, 16].

Таким образом, для уточнения решения задачи в каждой ячейке на итерации по подобласти здесь выписывается переопределенная локальная СЛАУ из 24 уравнений с 12 неизвестными. Локальная система для ячейки, содержащей точку (x_1^0, x_2^0) , будет состоять из 25 уравнений. Для удобства изложения будем использовать для локальных СЛАУ обозначение $L\vec{u} = \vec{b}$, где L — прямоугольная матрица, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных a_{jm} (1.3) в указанных уравнениях. Здесь компоненты вектора \vec{u} — неизвестные a_{jm} (1.3), соответствующие текущей ячейке. Под решением переопределенной системы $L\vec{u} = \vec{b}$ здесь понимается псевдорешение, получаемое методом наименьших квадратов [7].

О п р е д е л е н и е 1. *Глобальной итерацией* назовем однократное последовательное выполнение итераций по всем подобластям из Ω (итераций по всем ячейкам сетки).

Остановка итерационного процесса в рассматриваемом здесь варианте метода КНК происходила при выполнении условия

$$\max_{j,m} |a_{jm}^{n+1} - a_{jm}^n| < \varepsilon,$$

где a_{jm}^n — значение коэффициента a_{jm} на n -й глобальной итерации, ε — малая константа.

1.3. Ортогональные методы решения переопределенной СЛАУ

В предложенных ранее в других работах вариантах метода КНК для решения переопределенной СЛАУ

$$L\vec{u} = \vec{b} \quad (1.5)$$

в каждой ячейке на итерации по подобласти использовался МНК [7,8,10,14]. Для системы (1.5) с матрицей

$$L = \{l_{ij}, 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2, n_2 < n_1\}$$

реализация классического варианта метода наименьших квадратов сводится к решению определенной системы

$$L^T L\vec{u} = L^T \vec{b}, \quad (1.6)$$

где L^T — матрица, полученная транспонированием матрицы L . Уравнения (1.6) получаются из требования того, чтобы псевдорешение системы (1.5) являлось точкой минимума функционала невязки

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{n_1} ((L\vec{u})_i - b_i)^2,$$

где $(L\vec{u})_i, b_i$ — i -е компоненты векторов $L\vec{u}$ и \vec{b} соответственно.

В дальнейшем изложении нам потребуются некоторые определения, касающиеся свойств переопределенных систем.

О п р е д е л е н и е 2. Числом обусловленности прямоугольной матрицы L назовем отношение $\nu(L) = \sigma_{max}/\sigma_{min}$, где $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ — максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы L соответственно.

О п р е д е л е н и е 3. Чем больше величина $\nu(L)$, тем хуже обусловлена СЛАУ $L\vec{u} = \vec{f}$.

З а м е ч а н и е 1. $\nu(L) = \nu(QL)$, где Q — ортогональная матрица, L — прямоугольная.

З а м е ч а н и е 2. $\nu(L^T L) = (\nu(L))^2$. Поэтому применять метод наименьших квадратов в случае плохо обусловленной матрицы L нежелательно.

В работе [10] использовался вариант МНК, в котором введены два функционала Φ_1, Φ_2 . Первый из них состоял только из суммы квадратов невязок уравнений, соответствующих граничным условиям и условиям согласования. Второй — только из суммы квадратов невязок уравнений коллокаций. Определенная система для варианта метода КНК, в котором давление аппроксимировалось полиномами первого порядка, в работе [10] выведена из условий минимума функционалов Φ_1 и Φ_2 , причем минимум Φ_1 взят по коэффициентам $a_{jm}, j = 1, \dots, 10$, при фиксированных a_{11m} и a_{12m} , а минимум Φ_2 — по $a_{jm}, j = 11, 12$, при фиксированных $a_{jm}, j = 1, \dots, 10$.

Для решения локальной СЛАУ (1.5) в варианте метода КНК с аппроксимацией давления полиномами первого порядка в данной работе используется метод вращений с выбором главного элемента в столбце, обобщенный на случай переопределенной системы [16]. Такой подход был предложен в [22]. Построенное таким образом решение при отсутствии ошибок округления совпадает с тем, что получается методом наименьших квадратов при минимизации одного

функционала, составленного из квадратов невязок всех уравнений системы $L\vec{u} = \vec{b}$. После приведения матрицы L к верхнетреугольному виду преобразованиями вращения, т. е. к такому виду, что элементы $l_{ij} = 0$ при $i > j$, из первых n_2 уравнений системы $L\vec{u} = \vec{b}$ составляется определенная СЛАУ

$$M\vec{u} = \vec{d}. \quad (1.7)$$

Нетрудно показать важное свойство системы (1.7), состоящее в том, что ее решение совпадает с решением системы (1.5), полученным при помощи МНК.

В результате применения метода наименьших квадратов ухудшается обусловленность задачи линейной алгебры в сравнении с исходной СЛАУ. Преимущество подхода, основанного на применении ортогональных преобразований, заключается в том, что числа обусловленности матриц M и L совпадают.

Опишем теперь алгоритм ортогонального метода, который дает то же самое приближенное решение, что и МНК с двумя функционалами невязок при отсутствии ошибок округления. Пусть в первый функционал Φ_1 входят квадраты невязок первых p_1 уравнений системы (1.5), а во второй функционал Φ_2 — квадраты невязок оставшихся $(n_1 - p_1)$ уравнений системы, где $0 < p_1 < n_1$. Пусть минимум функционала Φ_1 взят по переменным u_1, \dots, u_{p_2} при фиксированных $u_{p_2+1}, \dots, u_{n_2}$, а минимум функционала Φ_2 взят по переменным $u_{p_2+1}, \dots, u_{n_2}$ при фиксированных u_1, \dots, u_{p_2} , где $0 < p_2 < n_2$. Разобьем систему (1.5) на две подсистемы

$$L_1\vec{u} = \vec{b}_1, \quad (1.8)$$

$$L_2\vec{u} = \vec{b}_2. \quad (1.9)$$

Подсистема (1.8) состоит из первых p_1 уравнений СЛАУ (1.5), подсистема (1.9) — из оставшихся уравнений. В (1.8) временно перенесем в правую часть выражения, зависящие от компонент вектора $\vec{u}^2 = (u_{p_2+1}, \dots, u_{n_2})$, а в (1.9) — выражения, зависящие от $\vec{u}^1 = (u_1, \dots, u_{p_2})$. В результате будут получены системы

$$L'_1\vec{u}^1 = \vec{b}'_1(\vec{u}^2), \quad (1.10)$$

$$L'_2\vec{u}^2 = \vec{b}'_2(\vec{u}^1), \quad (1.11)$$

где L'_1, L'_2 — матрицы размера $p_1 \times p_2$ и $(n_1 - p_1) \times (n_2 - p_2)$ соответственно. Приводим системы (1.10), (1.11) ортогональными преобразованиями [16, 22, 26] к такому виду, чтобы их матрицы стали верхнетреугольными. Вернем в левую часть преобразованных систем (1.10), (1.11) выражения, зависящие от компонент вектора неизвестных \vec{u} . Составим из первых p_2 уравнений системы, получившейся из (1.10), и из первых $(n_2 - p_2)$ уравнений системы, получившейся из (1.11), определенную систему. Ее решение будет совпадать с тем, что получается в МНК с использованием двух функционалов невязок Φ_1 и Φ_2 .

Для решения определенных СЛАУ в данной работе также использовался ортогональный метод линейной алгебры (метод вращений) [26].

1.4. Аппроксимация давления полиномами второго порядка

В [10, 14] был предложен и реализован вариант метода КНК решения краевых задач для уравнений Навье — Стокса, в котором давление аппроксимируется полиномами второго порядка. В отличие от варианта метода КНК, указанного в подразд. 1.2, в этом случае в базис добавляются еще 3 элемента, содержащие квадратичные члены для давления.

Условия согласования, граничные условия и уравнения коллокаций записываются здесь так же, как указано в подразд. 1.2. В работе [14] для решения локальных СЛАУ в варианте метода с аппроксимацией давления полиномами второго порядка снова использовался метод КНК с двумя функционалами невязок Φ_1, Φ_2 . В первый из них вошли квадраты невязок условий согласования и граничных условий. Во второй — квадраты невязок уравнений коллокаций. Функционал Φ_1 минимизировался по переменным $a_{jm}, j = 1, \dots, 10$, при фиксированных a_{jm} ,

$j = 11, \dots, 15$. Функционал Φ_2 — по переменным a_{jm} , $j = 11, \dots, 15$, при фиксированных a_{jm} , $j = 1, \dots, 10$.

В данной работе предпринимались попытки использовать в этом варианте метода КНК для решения переопределенной локальной СЛАУ ортогональный метод линейной алгебры, эквивалентный при отсутствии ошибок округления методу наименьших квадратов с одним функционалом невязок. Однако точность получаемого приближенного решения в численных экспериментах была существенно хуже точности, достигнутой на тех же сетках в работе [14]. Варианты метода КНК при этом отличались только способом решения переопределенных СЛАУ. При использовании ортогонального метода, эквивалентного МНК с функционалами Φ_1 , Φ_2 , здесь были получены результаты не хуже, а в некоторых случаях даже лучше по точности, чем в работе [14] на тех же сетках.

При решении краевых задач для уравнений Навье — Стокса методом конечных элементов [27] в случае полиномиальной аппроксимации решения для обеспечения устойчивости метода необходимо, чтобы порядки полиномов для компонент скорости и давления удовлетворяли определенным условиям (LBB-условию [28]). Например, в методе конечных элементов порядок полиномов, аппроксимирующих компоненты скорости, должен быть больше порядка полиномов, аппроксимирующих давление. Результаты данной работы четко свидетельствуют о том, что подобные ограничения имеют место и в вариантах метода КНК с одним функционалом невязки. Судя по результатам численных экспериментов, использование вариантов метода КНК с двумя функционалами невязок [14] позволяет ослабить эти ограничения.

1.5. Использование многосеточных комплексов в методе КНК

Все численные эксперименты, результаты которых приведены в данной работе, проводились с использованием одного цикла движения по уровням многосеточного комплекса: от самой грубой сетки к самой мелкой [32]. В [14] показано, что такой подход позволяет существенно сократить время расчета по сравнению со случаем, когда многосеточные комплексы не используются. Счет на последовательности сеток рассматривается в данном пункте на примере варианта метода КНК с аппроксимацией компонент скорости и давления полиномами второго порядка. Для других вариантов метода рассуждения аналогичны приведенным здесь.

Приближенное решение, получаемое в методе КНК, в отличие от, например, разностных методов, является функцией непрерывного аргумента. Область значений последнего совпадает с областью, в которой рассматривается исходная задача. В каждой ячейке сетки компоненты приближенного решения являются полиномами второго порядка. Этим обстоятельством можно воспользоваться в случае, когда требуется перейти от грубой сетки (сетки с меньшим числом ячеек) к мелкой (сетке с большим числом ячеек). Такой переход необходим для того, чтобы использовать приближенное решение, полученное на грубой сетке, в качестве начального приближения решения для счета на мелкой. В численных экспериментах часто используются последовательности вложенных сеток, при мельчении которых каждая ячейка мелкой сетки целиком содержится в некоторой ячейке грубой. Заметим, что в этом случае компоненты приближенного решения, полученного на грубой сетке, в каждой ячейке мелкой сетки также являются полиномами второго порядка. Кроме того, для компонент скоростей этого приближенного решения внутри ячеек мелкой сетки будет тождественно выполнено уравнение неразрывности. Следовательно, для мелкой сетки существуют значения коэффициентов a_{jm} (1.3) такие, что соответствующее им приближенное решение тождественно совпадает с решением, полученным на грубой сетке. Формулы перехода к мелкой сетке выводятся легко и достаточно просто. Здесь они не приводятся из-за недостатка места. В разностных методах для перехода от более грубой сетки к более мелкой требуется дополнительная вычислительная процедура, например, интерполяция. При этом в приближенное решение вносится погрешность. В методе КНК переход к более мелкой сетке лишен данного недостатка.

2. Ускорение сходимости итерационного процесса

Построение приближенного решения краевых задач для уравнений Навье — Стокса, имеющего необходимую точность, часто связано с большими затратами ресурсов ЭВМ. Во многих численных методах, как и в вариантах метода КНК, предложенных здесь и в других работах, для нахождения приближенного решения используются итерационные процессы. Если итерации сходятся медленно, то это сужает возможности применения метода на практике, так как из-за очень большого времени расчета вычисления на подробных сетках становятся недоступными. В настоящее время существуют различные подходы, позволяющие добиться ускорения сходимости итераций [29–34]. Так, например, в [32, 34] рассматриваются многосеточные методы. В статье Й. Саада [29] изложены алгоритмы, в которых используются подпространства Крылова. В [30, 31] описан многошаговый метод наименьших квадратов ускорения сходимости итерационного процесса \vec{x}_n ($n=0, 1, \dots$) решения СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{b}. \quad (2.1)$$

Здесь векторы $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^p$, A — матрица размера $p \times p$, $p \in \mathbb{N}$. В этом методе через каждые k шагов к текущему приближению \vec{x}_n добавляется поправка, являющаяся линейной комбинацией k векторов $\vec{r}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$, $i = (n-k), \dots, (n-1)$, $k < n$. Поправка ищется из условия минимума функционала, составленного из квадратов невязок уравнений системы, эквивалентной исходной (2.1). В [30, 31] метод ускорения реализован для $k \leq 2$. Для $k > 2$ в [30, 31] работающий алгоритм метода отсутствует. Дело в том, что СЛАУ, из которой определяется поправка для \vec{x}_n в случае сходимости итераций, начиная с некоторого n , получается либо плохо обусловленной, либо вырожденной из-за стремления \vec{r}_n к $\vec{0}$ с ростом n . В данной работе указан работающий способ реализации этого метода для произвольного k .

Применение ускорения сходимости в методе КНК позволило существенно уменьшить время, необходимое для проведения расчетов. В некоторых случаях итерационный процесс из расходящегося становился сходящимся после использования метода ускорения [30]. В [30, 31] показано, что метод позволяет добиться хорошего ускорения в случаях СЛАУ с самосопряженными и несамосопряженными матрицами.

Несмотря на то что уравнения Навье — Стокса существенно нелинейные, в случае, когда n достаточно велико, итерационный процесс метода КНК близок к итерационному процессу решения задачи с “замороженной” матрицей. Следовательно, в случае итерационного решения нелинейных задач можно при небольших k использовать алгоритм ускорения сходимости итерационного процесса решения СЛАУ.

2.1. Описание метода ускорения

Пусть задано некоторое начальное приближение \vec{x}_0 . Итерационная последовательность строится следующим образом:

$$\vec{x}_{n+1} = T\vec{x}_n + \vec{f}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Здесь T — матрица размера $p \times p$. Предположим, что итерационный процесс сходится. Тогда векторы \vec{x}_n стремятся при $n \rightarrow \infty$ к решению \vec{x} системы

$$\vec{x} = T\vec{x} + \vec{f},$$

которая получена из СЛАУ (2.1) невырожденным преобразованием. Невязкой n -й итерации назовем вектор $\vec{r}_n = T\vec{x}_n + \vec{f} - \vec{x}_n = \vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n$, погрешностью — вектор

$$\vec{y}_n = \vec{x} - \vec{x}_n = \vec{x} - \vec{x}_{n+1} + \vec{r}_n = \vec{y}_{n+1} + \vec{r}_n. \quad (2.3)$$

Невязки и погрешности удовлетворяют соотношениям

$$\vec{r}_{n+1} = T\vec{r}_n, \quad \vec{y}_{n+1} = T\vec{y}_n. \quad (2.4)$$

Из равенств (2.3) и (2.4) можно получить систему уравнений

$$(I - T)\vec{y}_n = \vec{r}_n, \quad (2.5)$$

связывающую компоненты векторов \vec{y}_n и \vec{r}_n , где I — это единичная матрица размера $p \times p$. Умножив уравнение (2.5) на T^{-1} слева и заменив вектор $T^{-1}\vec{r}_n$ на \vec{r}_{n-1} , получим

$$(T^{-1} - I)\vec{y}_n = \vec{r}_{n-1}. \quad (2.6)$$

В многошаговом методе наименьших квадратов ускорения сходимости, предложенном в [30,31], через каждые k итераций к текущему приближению \vec{x}_n добавляется поправка

$$\vec{y}_n^* = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i}. \quad (2.7)$$

Уточненный таким образом вектор \vec{x}_n используется далее для выполнения следующих k итераций. Коэффициенты α_i , $i = 1, \dots, (k-1)$, ищутся в [30,31] из условия минимума квадрата нормы невязки уравнения (2.6), возникающей при подстановке в него приближенного вектора погрешности \vec{y}_n^* вместо \vec{y}_n , т. е. из условия

$$\left\| (T^{-1} - I)\vec{y}_n^* - \vec{r}_{n-1} \right\|_2^2 \rightarrow \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}}. \quad (2.8)$$

Вторая норма вектора $\vec{v} = \{v_i, i = 1, \dots, m\}$ определяется здесь равенством $\|\vec{v}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2$.

Задача о нахождении минимума (2.8) эквивалентна решению переопределенной СЛАУ

$$(T^{-1} - I)\vec{y}_n^* = \vec{r}_{n-1}, \quad (2.9)$$

в которой неизвестными являются коэффициенты α_i , $i = 1, \dots, (k-1)$. Система (2.9) может быть записана в виде

$$\alpha_1 (\vec{r}_{n-k+1} - \vec{r}_{n-k}) + \dots + \alpha_{k-1} (\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_{n-2}) = -\vec{r}_{n-1}. \quad (2.10)$$

Для решения СЛАУ (2.10) в данной работе, в отличие от [30,31], предложено использовать ортогональный метод, эквивалентный МНК [16]. Поэтому предложенный и реализованный здесь алгоритм назовем *ортогональным методом ускорения сходимости*. При больших n в случае сходящегося итерационного процесса элементы матрицы системы (2.10) малы, так как нормы $\|\vec{r}_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Здесь $\|\vec{v}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} |v_i|$. Чтобы избежать арифметических операций с числами, близкими к машинному нулю, проводилась нормировка столбцов матрицы при помощи замены переменных

$$\alpha'_i = \alpha_i \left\| \vec{r}_{n-k+i} - \vec{r}_{n-k+(i-1)} \right\|_\infty, \quad i = 1, \dots, (k-1).$$

При этом нормы столбцов матрицы становятся равными 1. Однако такой прием не решает все проблемы, возникающие при наличии среди векторов

$$\vec{z}_i = (\vec{r}_{n-k+i} - \vec{r}_{n-k+(i-1)}), \quad i = 1, \dots, (k-1),$$

близких к линейно зависимым. В этом случае система (2.10) будет плохо обусловлена или вырождена.

О п р е д е л е н и е 4. *Близкими к линейно зависимым* называем такие векторы $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q$ ($\|\vec{v}_j\|_\infty = 1, j = 1, \dots, (k-1)$), для которых

$$\exists l(1 \leq l \leq q) \quad \forall i \neq l(1 \leq i \leq q) \quad \exists k_i \quad \max_{1 \leq i \leq q, i \neq l} |k_i| \neq 0 : \quad \left\| \vec{v}_l - \sum_{1 \leq i \leq q, i \neq l} k_i \vec{v}_i \right\|_\infty \leq \varepsilon_1,$$

где *параметр зависимости* ε_1 — фиксированная малая величина.

О п р е д е л е н и е 5. Систему (2.10) называем *вырожденной*, если из нее нельзя выделить или получить с помощью линейной комбинации уравнений невырожденную подсистему размера $(k-1)$.

В данной работе $\varepsilon_1 = 10^{-15}$. Для представления вещественных чисел использовался тип long double (C++). В качестве критерия отсутствия в матрице СЛАУ (2.10) близких к линейно зависимым столбцов здесь использовалось условие на модули ведущих элементов ортогонального исключения [16]. Все они должны быть больше ε_1 .

Рассмотрим случай, когда указанный критерий не выполняется. Пусть на некотором этапе решения переопределенной СЛАУ (2.10) при проведении ортогонального исключения в j -м столбце ее матрицы, где $1 < j \leq (k-1)$, модуль ведущего элемента стал меньше ε_1 . Из этого следует, что невязки $\{\vec{z}_i, i = 1, \dots, j\}$ близки к линейно зависимым. Несложно показать, что тогда вектор \vec{z}_{i_1} , где $j \leq i_1 \leq (k-1)$, и векторы $\{\vec{z}_i, i = 1, \dots, (j-1)\}$ близки к линейно зависимым с параметром зависимости, равным $C\varepsilon_1$, где константа C зависит от нормы матрицы T и от k . В этом случае система (2.10) будет плохо обусловлена или вырождена. Чтобы получить работающий алгоритм, необходимо уменьшить число используемых невязок. Иначе поправки будут находиться со значительными погрешностями и ускорение сходимости за счет прибавления векторов \vec{y}_n^* ухудшится. Полагая в (2.10) $\alpha_i = 0, i = j, \dots, k-1$, получим переопределенную систему для нахождения $\alpha_i, i = 1, \dots, j-1$, обусловленность которой лучше обусловленности системы (2.10). Заметим, при решении этой СЛАУ можно воспользоваться результатами ортогонального исключения в системе (2.10), уже проведенного до $(j-1)$ -го этапа. Таким образом, к вектору \vec{x}_n добавляется поправка

$$\vec{y}_n^{**} = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i},$$

т. е. вместо $(k-1)$ векторов для определения поправки (2.7) используются только первые $(j-1)$ невязок.

В методе ускорения вместо (2.2) можно использовать последовательность $\vec{\chi}_n = \vec{x}_{n,s}, n = 1, 2, \dots$, которая составлена из вычисленных по формуле (2.2) векторов \vec{x}_n , взятых через каждые s шагов. Матрица оператора перехода от приближения $\vec{\chi}_n$ к $\vec{\chi}_{n+1}$ здесь равна T^s . Как показали численные эксперименты, этот прием при $1 \leq s \leq s_0$ позволяет добиться дополнительного ускорения сходимости. Наличие верхнего предела s_0 прежде всего обусловлено нелинейностью решаемой краевой задачи.

2.2. Исследование свойств метода ускорения

Предложенный здесь вариант алгоритма ускорения сходимости был использован в методе КНК решения краевой задачи для стационарных уравнений Навье — Стокса в двумерной прямоугольной области [10, 16]. Эксперименты проводились с несколькими решениями при различных числах Рейнольдса Re . На рис. 1, 2 изображены графики, полученные для одного тестового решения при $Re = 100$. Результаты, аналогичные приведенным здесь, имели место во всех остальных экспериментах.

На рис. 1 изображен график зависимости от номера итерации n величины логарифма псевдопогрешности $\delta_n = \|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n\|_\infty$, где \vec{x}_n — n -е приближение для вектора неизвестных, который составлен из коэффициентов a_{jm} (1.3) всех ячеек используемой сетки. Кривая, име-

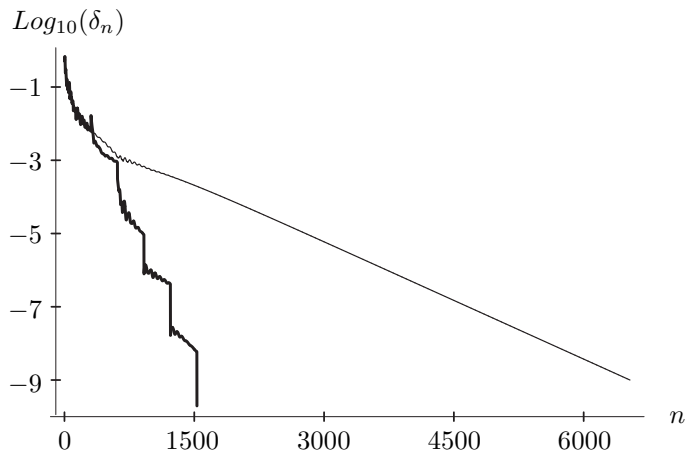


Рис. 1. Зависимость псевдопогрешности от номера итерации ($s = 5$, $k = 50$).

ющая на рис. 1 большую толщину, соответствует случаю, когда используется метод ускорения сходимости. Другая кривая — случаю, когда он не применяется. Видно, что использование ускорения позволило сократить в данном эксперименте число итераций, необходимых для получения приближенного решения, более чем в четыре раза. Также видно, что, как это было сказано ранее в начале п. 2, итерационный процесс в методе КНК, начиная с некоторого n , близок к итерационному процессу решения задачи с “замороженной” матрицей, о чем свидетельствует то, что график для случая, когда ускорение не производится, в логарифмическом масштабе мало отличается от прямой. Поэтому здесь оправдано применение методов ускорения сходимости итераций решения СЛАУ. Каждая “ступенька” на графике в случае использования метода ускорения, соответствует однократному прибавлению поправки (2.7). Видно, что при этом величина псевдопогрешности δ_n существенно уменьшается.

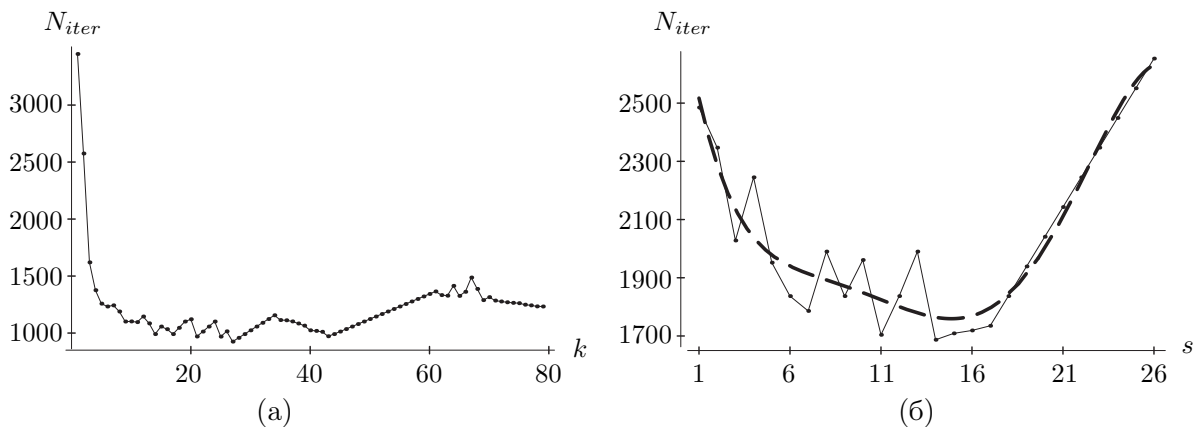


Рис. 2. Зависимость числа итераций: (а) от параметра k при $s = 10$; (б) от параметра s при $k = 50$.

На рис. 2 (а) приведен график зависимости от параметра k количества итераций N_{iter} , потребовавшихся для получения приближенного решения. Видно, что с увеличением числа невязок до 20 растет эффективность метода ускорения. Если значение параметра $k > 20$, то она практически не улучшается по сравнению со случаем $k = 20$, оставаясь примерно на одном и том же уровне. Об аналогичном результате авторам данной работы устно сообщил автор работы [35]. Таким образом, поскольку в более ранних вариантах метода ускорения

сходимости [30, 31] при вычислении поправки (2.7) использовалось не более двух невязок, предложенный здесь вариант позволяет добиться большего по сравнению с ними ускорения.

На рис. 2 (б) изображен график зависимости числа итераций от параметра s . Пунктирная линия — это усредненная кривая, полученная методом наименьших квадратов. Видно, что увеличение параметра s может привести к дополнительному уменьшению числа итераций. Из графика также видно, что нельзя использовать большие s . Причина этого, как было сказано ранее, прежде всего заключается в нелинейности задачи (1.1).

3. Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой

При исследовании свойств численных методов для уравнений Навье — Стокса в качестве тестового решения часто используется решение задачи о течении в каверне с движущейся верхней крышкой. Оно обладает особенностями в правом и левом верхних углах каверны: в них горизонтальная компонента скорости терпит разрыв. В этом решении присутствуют вихри различной интенсивности. Их количество, конфигурация и свойства существенно зависят от числа Рейнольдса. Класс течений, возникающих в каверне при различных значениях Re , достаточно широк и разнообразен для того, чтобы исследовать на нем свойства и возможности численных методов для уравнений Навье — Стокса. В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных численному решению этой задачи [10, 24, 25, 35–45]. В данной работе задача о течении в каверне играет вспомогательную роль и используется только для демонстрации возможностей метода КНК. Краткие обзоры по решению этой задачи различными численными методами приведены в сравнительно недавних публикациях [41, 44, 45].

Ввиду того, что численное решение краевых задач для уравнений Навье — Стокса предъявляет высокие требования к численным методам [34, 44, 46, 47], для построения работающих алгоритмов часто используются различные искусственные приемы: искусственная сжимаемость, искусственная вязкость, метод фиктивных областей, экстраполяция решения при реализации краевых условий и т.д. Оценка их вклада в погрешность численного решения является трудной задачей. На точность приближенного решения, кроме того, оказывают существенное влияние порядок аппроксимации уравнений в численном методе, подробность используемой сетки, разрядность арифметики вещественных чисел в ЭВМ. Одним из достоинств метода КНК является то, что в нем не используются перечисленные искусственные приемы.

Во многих работах, посвященных численному решению задачи о течении в каверне, приводятся профили скорости. При сравнении высокоточных решений графики, полученные в отдельных работах, визуально не отличаются. Поэтому здесь приводятся только таблицы, по которым можно более полно судить о достигнутой точности.

Выбор значений управляющих параметров метода производился на основе результатов исследования, проведенного в [16]. В работе [16] также подробнее, чем здесь, изложены отдельные свойства метода.

3.1. Численные расчеты

В данной работе проведены численные эксперименты с решением задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с движущейся верхней крышкой при различных числах Рейнольдса. Результаты расчетов, приведенные в данной работе для $Re \leq 1000$, получены с применением варианта метода КНК с аппроксимацией давления полиномами второго порядка. При построении приближенного решения для $Re > 1000$ использовался вариант метода КНК с аппроксимацией давления полиномами первого порядка.

На рис. 3 и 4 изображены картины линий тока и их детализированные фрагменты при $Re = 400$ и $Re = 7500$ соответственно. Знаком «+» здесь обозначаются центры вихрей. В работе [36] для вихрей в каверне предложены обозначения: BR₁ (bottom right eddy) (в данной

работе его центр обозначен буквой «*b*»), BL₁ (bottom left) («*c*»), TL₁ (top left) («*d*»), BR₂ («*e*»), BR₃ («*f*»), BR₄ («*g*»). В табл. 1 и 2 приведены координаты центров (x_{1c}, x_{2c}) этих вихрей и значения функции тока $\psi(x_{1c}, x_{2c})$.

В табл. 3 и 4 приведены характерные значения компонент скорости $u_{1\min}$, $u_{2\min}$, $u_{2\max}$, полученные для $Re = 1$, $Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$, $Re = 3200$, $Re = 5000$, $Re = 7500$. Величины $u_{2\min}$ и $u_{2\max}$ — это соответственно минимум и максимум компоненты u_2 на горизонтальной средней линии каверны. Величина $u_{1\min}$ определяется как минимум на вертикальной средней линии компоненты скорости u_1 .

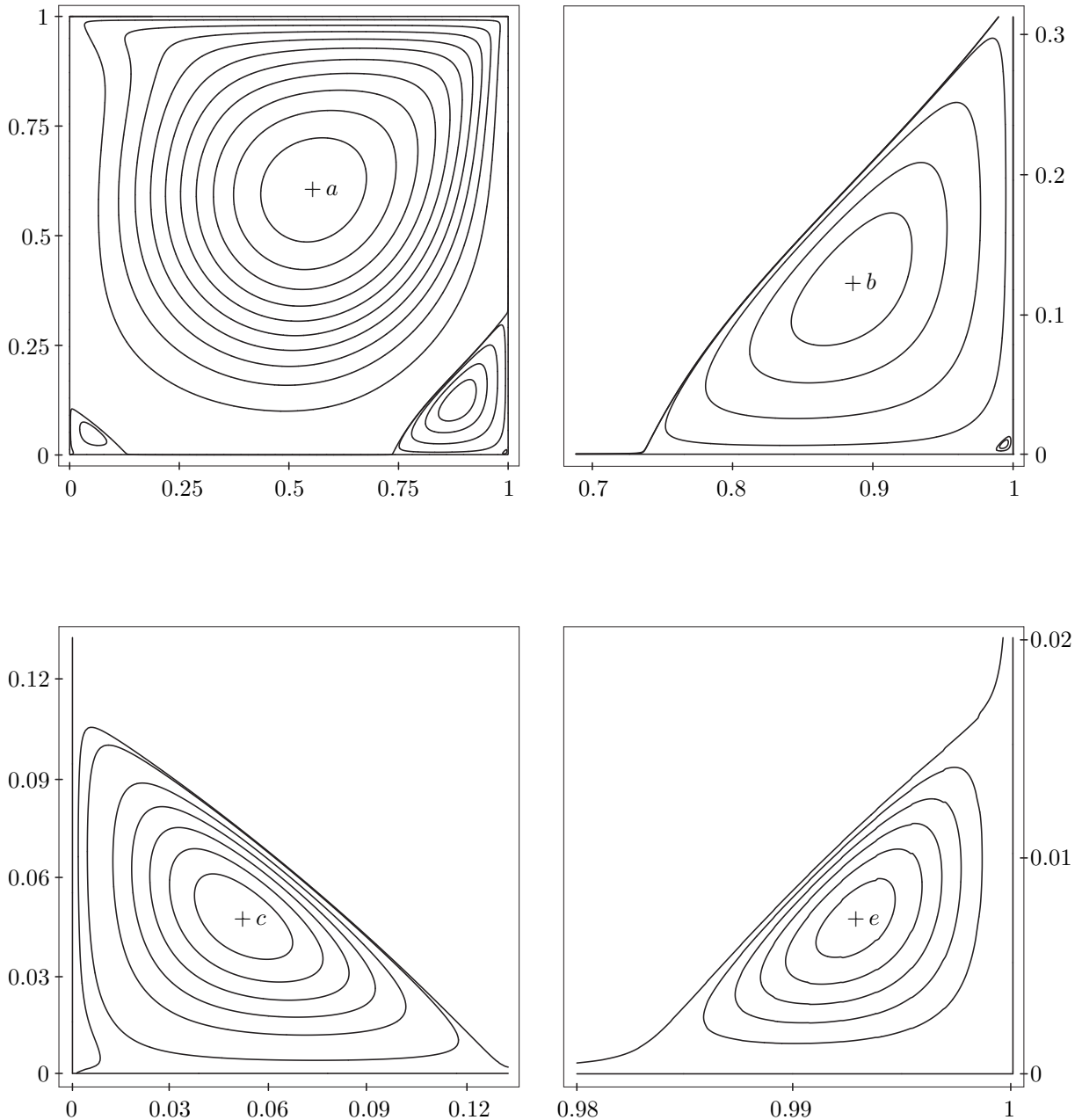


Рис. 3. Картина линий тока течения в каверне при $Re = 400$ и ее детализированные фрагменты.

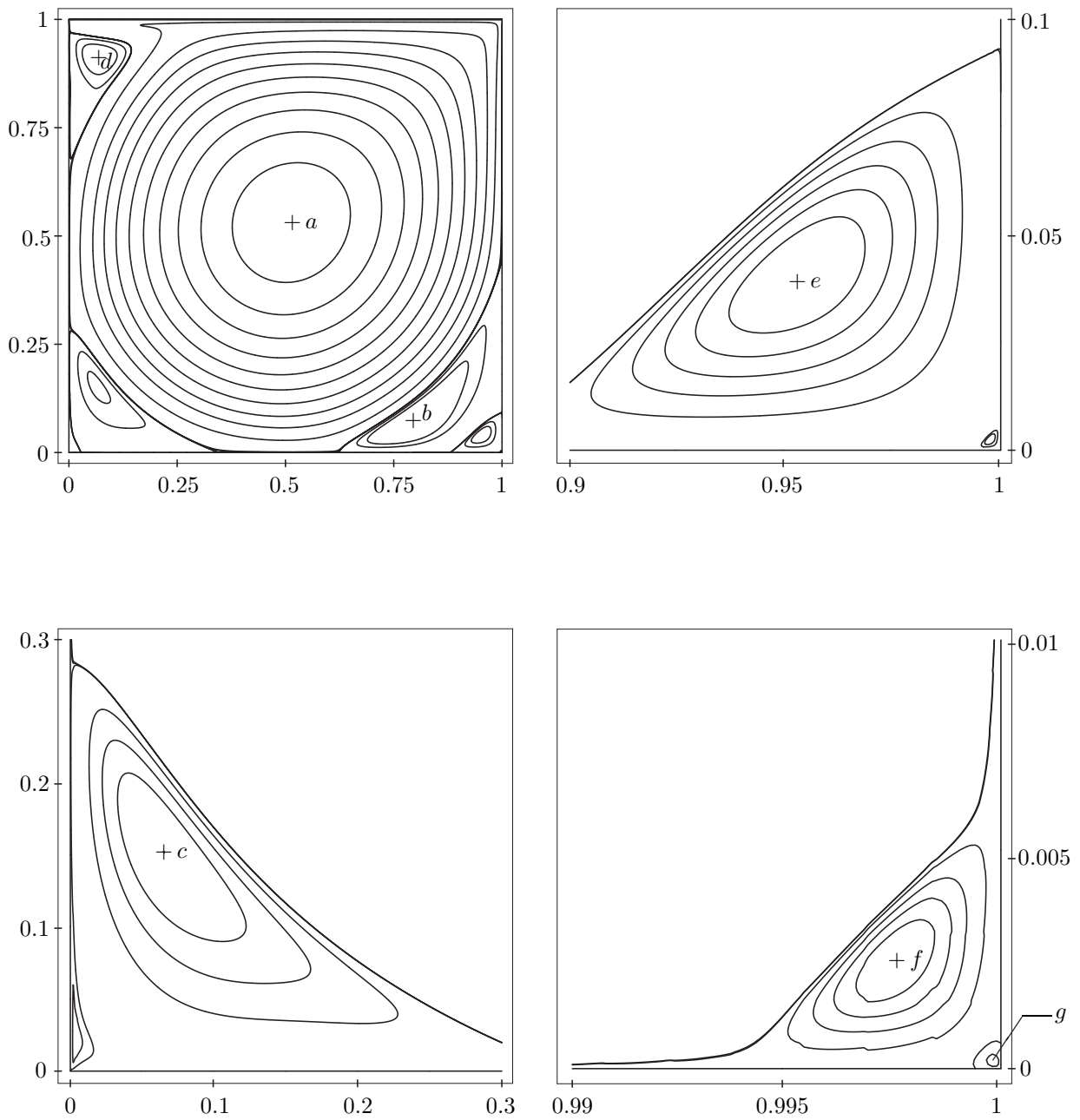


Рис. 4. Картина линий тока течения в каверне при $Re = 7500$ и ее детализированные фрагменты.

Т а б л и ц а 1

Численные характеристики вихрей в каверне при $Re = 400$

	a	b	c	e
Работа [36], сетка 257×257				
x_{1c}	0.5547	0.8906	0.0508	0.9922
x_{2c}	0.6055	0.1250	0.0469	0.0078
ψ_c	-0.113909	$6.42352 \cdot 10^{-4}$	$1.41951 \cdot 10^{-5}$	$-1.86595 \cdot 10^{-8}$
Эта работа, сетка 640×640				
x_{1c}	0.5539	0.8852	0.0516	0.9929
x_{2c}	0.6055	0.1219	0.0469	0.0072
ψ_c	-0.1141	$6.462 \cdot 10^{-4}$	$1.445 \cdot 10^{-5}$	$-1.146 \cdot 10^{-8}$

В табл. 3 и 4 также указаны значения координаты $x_{2\min}$ точки на вертикальной средней линии, в которой компонента скорости u_1 принимает наименьшее значение. В данной работе из-за ограниченности места представлены только некоторые наиболее интересные полученные результаты. Для сравнения в табл. 1–4 также приводятся доступные авторам в данный момент результаты других исследователей.

3.2. Обсуждение результатов

При численном решении задачи о течении в каверне из-за влияния численной вязкости, а также в результате использования искусственных приемов, улучшающих устойчивость методов, происходит сглаживание профилей скорости. Это приводит к тому, что значения экстремумов $u_{1\min}$, $u_{2\min}$, $u_{2\max}$ уменьшаются по модулю. В работах [25, 35] опубликованы результаты расчетов, полученных с применением разностных схем высокого порядка аппроксимации. Численная вязкость в этих схемах очень мала. В работе [40] использовался проекционный метод высокой точности с заменой особенностей решения в верхних углах каверны на их асимптотические представления. Расчеты выполнены на сетке Гаусса — Лобатто, адаптирующейся к границе области. Эти дополнительные приемы, несомненно, повысили в [40] точность приближенного решения задачи о течении в каверне. Заметим, что в данной работе с целью проверки возможностей собственно метода КНК все численные результаты получены без привлечения таких приемов. Сравнив значения экстремумов $u_{1\min}$, $u_{2\min}$, $u_{2\max}$, приведенных в табл. 3, можно убедиться, что величины, полученные в [25, 35, 40], являются среди них одними из наибольших по модулю. Это, а также некоторые другие факты свидетельствуют о том, что в [25, 35, 40] приведены одни из наиболее точных результатов среди известных авторам на данный момент. К сожалению, по каким-то причинам ни в одном обзоре, сделанном зарубежными авторами, публикация [25] не упоминается. Численные результаты с хорошей точностью по задаче о течении в каверне при больших Re ($Re \leq 21000$) на подробных сетках приведены в [44]. В работе [24] расчеты по этой задаче проведены высокоточным спектральным методом (см. табл. 2).

Среди приведенных в табл. 3 характерные величины, полученные в данной работе и в [14] для $Re = 1$, $Re = 400$, $Re = 1000$, являются наибольшими по модулю. Для их вычисления здесь и в [14] были использованы варианты метода КНК с аппроксимацией давления полиномами второго порядка. При $Re > 1000$ использование этого варианта метода вызывает сложности. Они связаны с тем, что, как сказано в подразд. 1.4, для этого варианта метода имеет место ограничение на порядки полиномов, аппроксимирующих компоненты скорости и давление [28].

Т а б л и ц а 2

Численные характеристики вихрей в каверне при $Re = 7500$

Работа [36], сетка 257×257			
	a	b	c
x_{1c}	0.5117	0.7813	0.0645
x_{2c}	0.5322	0.0625	0.1504
ψ_c	-0.119976	$3.28484 \cdot 10^{-3}$	$1.46709 \cdot 10^{-3}$
	d	e	f
x_{1c}	0.0664	0.9492	0.9961
x_{2c}	0.9141	0.0430	0.0039
ψ_c	$2.04620 \cdot 10^{-3}$	$-3.28148 \cdot 10^{-5}$	$1.58111 \cdot 10^{-9}$
Работа [44], сетка 601×601			
	a	b	c
x_{1c}	0.5133	0.7900	0.0650
x_{2c}	0.5317	0.0650	0.1517
ψ_c	-0.120924	$3.2102 \cdot 10^{-3}$	$1.5171 \cdot 10^{-3}$
	d	e	f
x_{1c}	0.0667	0.9517	0.9967
x_{2c}	0.9133	0.0417	0.0033
ψ_c	$2.1119 \cdot 10^{-3}$	$-3.0998 \cdot 10^{-5}$	$1.4409 \cdot 10^{-9}$
Работа [24], сетка 32×32			
	a	b	c
x_{1c}	0.5132184	0.7900250	0.06416178
x_{2c}	0.5320950	0.06483485	0.1525889
ψ_c	-0.1223803	$3.226968 \cdot 10^{-3}$	$1.536466 \cdot 10^{-3}$
	d	e	f
x_{1c}	0.06685477	0.9517405	0.9973421
x_{2c}	0.9116328	0.04218909	0.002657867
ψ_c	$2.134407 \cdot 10^{-3}$	$-3.279011 \cdot 10^{-5}$	$8.899567 \cdot 10^{-10}$
Эта работа, сетка 640×640			
	a	b	c
x_{1c}	0.5136	0.7916	0.0649
x_{2c}	0.5322	0.0656	0.1520
ψ_c	-0.11821	$3.1390 \cdot 10^{-3}$	$1.4938 \cdot 10^{-3}$
	d	e	f
x_{1c}	0.0664	0.9533	0.9976
x_{2c}	0.9120	0.0402	0.0026
ψ_c	$2.0036 \cdot 10^{-3}$	$-2.6334 \cdot 10^{-5}$	$1.0066 \cdot 10^{-6}$

Т а б л и ц а 3

Характерные значения компонент скорости течения в каверне

Метод	Сетка	$u_{1 \min}$	$x_{2 \min}$	$u_{2 \min}$	$u_{2 \max}$
Re = 1					
Работа [14]	80 × 80	-0.20777	0.5390625	-0.18483	0.18408
Эта работа	160 × 160	-0.20699	0.53678	-0.18438	0.18364
Эта работа	320 × 320	-0.20742	0.53594	-0.18456	0.18390
Эта работа	640 × 640	-0.20755	0.53594	-0.18476	0.18394
Re = 100					
Работа [38]	128 × 128	-0.2106	—	-0.2521	0.1786
Работа [36]	129 × 129	-0.21090	0.4531	-0.24533	0.17527
Работа [25]	160 × 160	-0.2140423	0.458089	—	—
Работа [40]	96 × 96	-0.2140424	0.4581	-0.2538030	0.1795728
Работа [35]	40 × 40	-0.2203	—	-0.2614	0.1846
Работа [14]	160 × 160	-0.21412	0.4609375	-0.25391	0.17968
Эта работа	160 × 160	-0.21415	0.45853	-0.25395	0.17971
Эта работа	320 × 320	-0.21413	0.45781	-0.25393	0.17968
Эта работа	640 × 640	-0.21412	0.45781	-0.25393	0.17968
Re = 400					
Работа [36]	129 × 129	-0.32726	0.2813	-0.44993	0.30203
Работа [39]	64 × 64	-0.32368	—	-0.44862	0.29925
Работа [39]	128 × 128	-0.32751	—	-0.45274	0.30271
Работа [37]	49 × 49	-0.2960	—	-0.4051	0.2662
Работа [14]	80 × 80	-0.32947	0.28125	-0.45466	0.30464
Эта работа	160 × 160	-0.32919	0.28013	-0.45458	0.30439
Эта работа	320 × 320	-0.32905	0.27969	-0.45443	0.30423
Эта работа	640 × 640	-0.32903	0.27969	-0.45439	0.30421
Re = 1000					
Работа [38]	256 × 256	-0.3764	—	-0.5208	0.3665
Работа [36]	129 × 129	-0.38289	0.1719	-0.51550	0.37095
Работа [39]	64 × 64	-0.37436	—	-0.51015	0.36364
Работа [39]	128 × 128	-0.38511	—	-0.52280	0.37369
Работа [37]	129 × 129	-0.3689	—	-0.5037	0.3553
Работа [25]	160 × 160	-0.388569	0.171698	—	—
Работа [40]	160 × 160	-0.3885698	0.1717	-0.5270771	0.3769447
Работа [44]	601 × 601	-0.3869	0.18	-0.5263	0.3756
Работа [14]	160 × 160	-0.38907	0.171875	-0.52692	0.37745
Эта работа	320 × 320	-0.38898	0.17188	-0.52744	0.37758
Эта работа	640 × 640	-0.38899	0.17148	-0.52747	0.37738
Эта работа	1280 × 1280	-0.38893	0.17171	-0.52744	0.37737

Характерные значения компонент скорости течения в каверне

Метод	Сетка	$u_{1 \min}$	$x_{2 \min}$	$u_{2 \min}$	$u_{2 \max}$
Re = 3200					
Работа [36]	129 × 129	-0.41933	0.1016	-0.54053	0.42768
Эта работа	320 × 320	-0.42851	0.09219	-0.56081	0.42240
Эта работа	640 × 640	-0.42978	0.09219	-0.56225	0.42432
Эта работа	1280 × 1280	-0.43006	0.09221	-0.56282	0.42443
Re = 5000					
Работа [36]	129 × 129	-0.43643	0.0703	-0.55408	0.43648
Работа [44]	601 × 601	-0.4419	0.08	-0.5700	0.4426
Работа [25]	160 × 160	-0.44731	0.074305	—	—
Эта работа	320 × 320	-0.43789	0.07344	-0.56560	0.43456
Эта работа	640 × 640	-0.44077	0.07306	-0.56912	0.43718
Эта работа	1280 × 1280	-0.44127	0.07326	-0.56982	0.43789
Re = 7500					
Работа [36]	129 × 129	-0.43590	0.0625	-0.55216	0.44030
Работа [44]	601 × 601	-0.4491	0.06	-0.5550	0.4495
Эта работа	320 × 320	-0.44553	0.06172	-0.56900	0.44707
Эта работа	640 × 640	-0.44728	0.06094	-0.57274	0.44785
Эта работа	1280 × 1280	-0.44876	0.06036	-0.57455	0.44970

В данной работе указанное ограничение удалось ослабить. Однако при больших Re использование метода КНК с аппроксимацией одновременно давления и компонент скорости полиномами второго порядка не дало хороших результатов. Поэтому при $Re > 1000$ характерные значения компонент скорости вычислялись с применением варианта метода КНК, описанного в подразд. 1.2. В [16] показано, что повышение порядка аппроксимации для давления в методе КНК существенно улучшает точность. Результаты данной работы, приведенные для $Re > 1000$, видимо, уступают по точности результатам работы [44]. Тем не менее в данной работе при расчете течения при $Re = 7500$ был обнаружен вихрь BR_4 из последовательности Моффата [23, 24]. Этот результат, скорее всего, носит качественный характер, однако он свидетельствует о хороших возможностях метода КНК для численного моделирования течений вязкой жидкости.

Косвенные признаки при наблюдении сходимости решения позволяют сделать вывод, что в данной работе возможности предложенных вариантов метода КНК при проведении расчетов повышенной точности на однопроцессорной ЭВМ с использованной здесь разрядностью арифметики вещественных чисел почти исчерпаны.

4. Заключение

В данной работе предложены и реализованы новые, более общие варианты метода КНК. Хотя формулы этого метода несколько сложнее, в сравнении с разностными схемами низкого порядка точности он имеет ряд существенных достоинств. Выбор управляющих параметров позволяет существенно влиять на обусловленность задач линейной алгебры, возникающих при его реализации, получать приближенное решение с той или иной точностью. В методе КНК относительно просто реализуются варианты на адаптивных сетках [14], на многосеточных комплексах, в области с криволинейной границей [13]. Он хорошо распараллеливается. Кроме того, метод КНК может быть применен для решения уравнений математической физики разного типа. Возможности метода расширены здесь за счет применения многосеточных комплексов,

использования нового метода ускорения сходимости итераций решения СЛАУ, применения ортогональных алгоритмов линейной алгебры вместо МНК. Использование результатов работы [16] при выборе управляющих параметров в сочетании с другими улучшениями метода, предложенными в данной работе, позволили с высокой точностью провести расчеты задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой.

Применение адаптивных сеток, арифметики вещественных чисел большей разрядности, распараллеливание вычислений, а также повышение порядка аппроксимации, несомненно, расширяют возможности приведенных здесь вариантов метода КНК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carey G.G., Cheung Y.K., Lau S.L.** Mixed operator problems using least squares finite element collocation // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1980. Vol. 22. P. 121–130.
2. **Mizusawa T., Kajita T.** Application of point least squares method with B-splines in solid mechanics problems // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1982. Vol. 18, no. 6. P. 897–907.
3. **Burgess G., Mahajerin E.** Rotational fluid flow using a least squares collocation technique // *Comput. Fluids.* 1984. Vol. 12. P. 311–317.
4. **Dong S.B., Lopez A.E.** Natural vibrations of a clamped circular plate with rectilinear orthotropy by least-squares collocation // *Int. J. Solids Struct.* 1985. Vol. 21. P. 515–526.
5. **Jiang B.-N., Carey G.F.** Adaptive refinement for least-squares finite elements with element-by-element conjugate gradient solution // *Int. J. Numer. Meth. Engineering.* 1987. Vol. 24. P. 569–580.
6. **Bentley L.R., Pinder G.F., Herrera I.** Solution of the advective-dispersive transport equation using a least squares collocation, Eulerian-Lagrangian method // *Numer. Methods Partial Differ. Equations.* 1989. Vol. 5, no. 3. P. 227–240.
7. **Сёмин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П.** Метод коллокаций — наименьших квадратов для уравнений Стокса // *Вычисл. технологии.* 1996. Т. 1, № 2. С. 90–98.
8. **Karamyshev V., Kovenya V., Sleptsov A.** Adaptive methods for Navier – Stokes equations // *Comput. fluid dynamics. Proc. of the Third ECCOMAS conference on computational fluid dynamics.* 1996. Vol. 1. P. 301-307.
9. **Сёмин Л.Г., Шапеев В.П.** Коллокационно-сеточный метод решения краевых задач для уравнений Навье — Стокса // *Математические проблемы механики сплошных сред: Тез. докл. сиб. школы-семинара.* Новосибирск, 1997. С. 125–126.
10. **Сёмин Л.Г., Шапеев В.П.** Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье — Стокса // *Вычисл. технологии.* 1998. Т. 3, № 3. С. 72–84.
11. **Bochev P., Cai Z., Manteuffel T.A., McCormick S.F.** Analysis of velocity-flux first-order system least-squares principles for the Navier-Stokes equations. Part I // *SIAM J. Numer. Anal.* 1998. Vol. 35, no. 3. P. 990–1009.
12. **Semin L.G., Shapeev V.P.** Collocation-grid method for solving boundary problems for Navier – Stokes equations // *Proc. of the international conference on the methods of aerophysical research. Part 2.* Novosibirsk, 1998. P. 186–191.
13. **Беляев В.В., Шапеев В.П.** Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // *Вычисл. технологии.* 2000. Т. 5, № 4. С. 12–21.
14. **Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V.** The collocation and least squares method for numerical solution of Navier – Stokes equations // *Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2.* 2003. P. S115–S137.
15. **Semin L.G.** Collocation and least squares method for 2D heat conductivity equation // *Вычисл. технологии.* 2006. Т. 11, № 1. С. 18–25.
16. **Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А.** Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье — Стокса // *Вычисл. технологии.* 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
17. **Issaev V.I., Shapeev V.P.** Investigation of the collocation and least squares method for solving boundary value problems for Navier–Stokes equations // *Proc. of the international conference on the methods of aerophysical research (ICMAR2007): Part 3.* Novosibirsk, 2007. P. 147–152.
18. **Russell R.D., Shampine L.F.** A collocation method for boundary value problems // *Numer. Math.* 1972. Vol. 19. P. 1–28.
19. **Boor C. de, Swartz B.** Collocation at Gaussian points // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. Vol. 10, no. 4. P. 582–606.

20. **Ascher U., Christiansen J., Russel R.D.** A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems // *Math. Comp.* 1979. Vol. 33. P. 659–679.
21. **Слепцов А.Г., Летова Е.Ю., Саломатов К.Г., Шмыков И.В.** Переопределенные системы конечно-разностных уравнений для задач типа диффузии-конвекции // *Вычисл. технологии.* 1993. Т. 2, № 5. С. 192–201.
22. **Шапеев А.В.** О двух алгоритмах численных методов линейной алгебры // *Студент и научно-технический прогресс: Тез. докл. междунар. науч. студ. конф.* Новосибирск, 2000. С. 16.
23. **Moffat H.K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* 1964. No. 18. P. 1–18.
24. **Barragy E., Carey G.F.** Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // *Computers & Fluids.* 1997. Vol. 26, no. 5. P. 453–468.
25. **Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.** Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1999. Т. 39, № 8. С. 1378–1392.
26. **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
27. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
28. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
29. **Saad Y.** Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems // *Mathematics of computation.* 1981. Vol. 37, no. 155. P. 105–126.
30. **Слепцов А.Г.** Об ускорении сходимости линейных итераций // *Моделирование в механике.* Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.
31. **Слепцов А.Г.** Об ускорении сходимости линейных итераций 2 // *Моделирование в механике.* Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 5. С. 132–147.
32. **Федоренко Р.П.** Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.
33. **Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G., Cherny S.G.** Variational method of accelerating linear iterations and its applications // *Computers & Fluids.* 1996. Vol. 25, no. 5. P. 467–484.
34. **Ольшанский М.А.** Равномерные по параметру многосеточные и итерационные методы // *Дис. ... докт. физ.-мат. наук.* М., 2006.
35. **Шапеев А.В.** Разностная схема четвертого порядка для уравнений Навье — Стокса на пятиточечном шаблоне // *Динамика сплошной среды.* Новосибирск, 2000. Вып. 116. С. 119–122.
36. **Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.** High-Re solutions for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys.* 1982. No. 48. P. 387–411.
37. **Chen C.J., Chen H.J.** Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier – Stokes equations // *J. Comput. Physics.* 1984. Vol. 53, no. 2. P. 209–226.
38. **Bruneau C.H., Jouron C.** An efficient scheme for solving steady incompressible Navier – Stokes equations // *J. Comput. Physics.* 1990. Vol. 89, no. 2. P. 389–413.
39. **Deng G.B., Piquet J., Queutey P., Visonneau M.** A new fully coupled solution of the Navier – Stokes equations // *Int. J. for Numer. Methods in Fluids.* 1994. Vol. 19, no. 7. P. 605–639.
40. **Botella O., Peyret R.** Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // *Computers & Fluids.* 1998. Vol. 27, no. 4. P. 421–433.
41. **Shankar P.N., Deshpande M.D.** Fluid mechanics in the driven cavity // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. No. 32. P. 93–136.
42. **Sahin M., Owens R.G.** A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem. Part I: High Reynolds number flow calculations // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2003. No. 42. P. 57–77.
43. **Wu Y., Liao S.** Solving high Reynolds-number viscous flows by the general BEM and domain decomposition method // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2005. No. 47. P. 185–199.
44. **Erturk E., Corke T.C., Gokcol C.** Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2005. No. 48. P. 747–774.
45. **Cheng M., Hung K.C.** Vortex structure of steady flow in a rectangular cavity // *Computers & Fluids.* 2006. No. 35. P. 1046–1062.
46. **Chetverushkin B.N.** Introductory word and plenary talk // *V International congress on mathematical modelling.* Dubna, 2002.
47. **Толстых А.И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.