УДК 517.936

П. Г. ЛАСЫЙ

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

Рассмотрим n-мерные вещественные вполне интегрируемые системы Пфаффа

$$dx = [P_1(t)\,dt_1 + P_2(t)\,dt_2]\,x, \tag{1}$$

$$dy = \sum_{i=1}^{2} [P_i(i)\,y + f_i(t, y)]\,dt_i \tag{2}$$

с непрерывными и ограниченными при $t = (t_1, t_2) \geqslant (1, 1)$ матрицами $P_i(t)$ и непрерывными по t, y вектор-функциями $f_i(t, y)$, удовлетворяющими условию

$$\|f_i(t, y)\| \leqslant g_i(t)\,\|y\|^{m_i}, \quad m_i \geqslant 1 \ (i = 1, 2)$$

с непрерывной функцией $g_i(t)$.

В [1] для исследования асимптотической устойчивости по первому приближению обыкновенных дифференциальных систем введена величина γ, не превосходящая коэффициента неправильности Гробмана σ_Γ [2]. В [3] подобная величина определена для характеристических степеней в случае, когда множество индексов H, на которых реализуется коэффициент σ_Γ, содержит не менее двух элементов. В [4] показано, что в теореме об устойчивости по первому приближению величину σ_Γ можно заменять не превосходящей ее величиной σ_λ.

В настоящей заметке введены векторные аналоги указанных выше величин для системы (1), включая и тот случай, когда по крайней мере одно из множеств H_1, H_2 (см. ниже) состоит из одного элемента и доказана теорема об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2), которая обобщает при $1 \leqslant m_i \leqslant 2$ $(i = 1, 2)$ теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению, приведенную в [4] для обыкновенной дифференциальной системы.

Пусть $X(t) = ((x_{ij}))$ — фундаментальная матрица решений системы (1) со столбцами-решениями $x_j(t)$ $(j = \overline{1, n})$, $\lambda_j = (\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)})$ — некоторый характеристический вектор [5] решения $x_j(t)$, $\nu_j = (\nu_j^{(1)}, \nu_j^{(2)})$ — некоторая характеристическая вектор-степень [6], отвечающая характеристическому вектору λ_j, причем будем предполагать, что $\lambda_j^{(i)} \leqslant 0$, $\nu_j^{(i)} < 0$ $(j = \overline{1, n};\ i = 1, 2)$; $\overline{\lambda}_j = (\overline{\lambda}_j^{(1)}, \overline{\lambda}_j^{(2)})$, $\overline{\nu}_j = (\overline{\nu}_j^{(1)}, \overline{\nu}_j^{(2)})$ — соответственно некоторые характеристический вектор и соответствующая ему вектор-степень j-ой строки матрицы $X^{-1}(t) = ((x'_{ij}))$. Обозначим $\sigma_{ij}(\lambda) = \lambda_j^{(i)} + \overline{\lambda}_j^{(i)}$, $\sigma_{k_i(\lambda)} = \max\limits_j \{\sigma_{ij}(\lambda)\}$, $\sigma_{l_i(\lambda)} = \max\limits_{j \neq k_i(\lambda)} \{\sigma_{ij}(\lambda)\}$, $H_i = \{s / \sigma_{k_i(\lambda)} = \sigma_{is}(\lambda)\}$.

Введем аналогично [1] пару чисел $(\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)) = \gamma(\lambda)$:

$$\gamma_i(\lambda) = \max\left\{\frac{1}{2}\,(\sigma_{k_i(\lambda)} + \sigma_{l_i(\lambda)}),\ \sigma_{k_i(\lambda)} + \max_{j \neq k_i(\lambda)} \{\lambda_j^{(i)}\}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

и аналогично числа $(\gamma_1(\nu), \gamma_2(\nu)) = \gamma(\nu)$ при определении величин $\sigma_{k_i(\nu)}$, $\sigma_{l_i(\nu)}$, для которых индекс j пробегает теперь уже множество $H'_i = \{s | \sigma_{is}(\lambda) \geqslant \sigma_{l_i(\lambda)}\}$.

Определим, далее, числа $\alpha_j^{(i)}(\lambda)$ (см. [1]):

$$\alpha_j^{(i)}(\lambda) = \lambda_j^{(i)} - \lambda_n^{(i)} \quad (i = 1, 2;\ k_i(\lambda) \neq j = \overline{1, n}),$$

$$\alpha_{k_i(\lambda)}^{(i)} = \begin{cases} \lambda_{k_i(\lambda)}^{(i)} - \lambda_n^{(i)} - \dfrac{1}{2}\,(\sigma_{k_i(\lambda)} - \sigma_{l_i(\lambda)}), & \text{если } \gamma_i(\lambda) = \dfrac{1}{2}\,(\sigma_{k_i(\lambda)} + \sigma_{l_i(\lambda)}), \\ \lambda_{k_i(\lambda)}^{(i)} - \lambda_n^{(i)} + \max\limits_{j \neq k_i(\lambda)} \{\lambda_j^{(i)}\}, & \text{если } \gamma_i(\lambda) = \sigma_{k_i(\lambda)} + \max\limits_{j \neq k_i(\lambda)} \{\lambda_j^{(i)}\}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\alpha_i(\lambda) = \max_j \{\lambda_j^{(i)} - \alpha_j^{(i)}(\lambda)\} + \max_j \{\alpha_j^{(i)}(\lambda)\},\ \alpha(\lambda) = (\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda)).$$

Аналогично определяются числа $\alpha_j^{(i)}(\nu)$, $\alpha_i(\nu)$ и вектор $\alpha(\nu)$.

Всюду в дальнейшем $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов $x \in R^2$, $y \in R^2$; $t^a = t_1^{a_1} t_2^{a_2}$, где $a = (a_1, a_2) \in R^2$.

Теорема 1. *Если для некоторых* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ $(\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$

$$\int\limits_{(1,1)}^{t} \sum_{i=1}^{2} g_i(\tau)\, \tau^{(m_i-1)\alpha(\nu)+\gamma(\nu)+\varepsilon} e^{\langle (m_i-1)\alpha(\lambda)+\gamma(\lambda), \tau \rangle} d\tau_i \leqslant M < +\infty \tag{3}$$

при всех $t \geqslant (1, 1)$, *то тривиальное решение системы (2) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для простоты и определенности будем предполагать, что $m_1 = m_2 = 1$, множество H_1 состоит более чем из одного элемента, H_2 состоит из одного элемента и $\gamma_2(\lambda) = \frac{1}{2}(\sigma_{k_2(\lambda)} + \sigma_{l_2(\lambda)})$. Во всех остальных случаях доказательство следует проводить по предлагаемой ниже схеме.

Обозначим $A_i = \operatorname{diag}[\alpha_1^{(i)}(\lambda), \ldots, \alpha_n^{(i)}(\lambda)]$,

$$B_i = \operatorname{diag}[\alpha_1^{(i)}(\nu), \ldots, \alpha_{k_i(\nu)-1}^{(i)}(\nu), \alpha_{k_i(\nu)}^{(i)} + \delta, \alpha_{k_i(\nu)+1}^{(i)}(\nu), \ldots, \alpha_n^{(i)}(\nu)],$$

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon_i}{2} \quad (i = 1, 2)$$

и $C(t) = \exp\{-A_1 t_1 - A_2 t_2\} t_1^{-B_1} t_2^{-B_2}$.

В системе (2) проведем замену

$$y = X(t) C(t) z. \tag{4}$$

После преобразований получим систему

$$dz = \sum_{i=1}^{2} \left[\left(A_i + \frac{B_i}{t_i}\right) z + F_i(t, z)\right] dt_i, \tag{5}$$

где

$$F_i(t, z) = C^{-1}(t) X^{-1}(t) f_i(t, X(t) C(t) z). \tag{6}$$

Оценим теперь по норме вектор-функции $F_i(t, z) = \operatorname{colon}(F_{i1}(t, z), \ldots, F_{in}(t, z))$ $(i = 1, 2)$. Из (6) получаем

$$|F_{is}(t, z)| \leqslant c g_i(t) \sum_{p,q,r=1}^{n} t^{\alpha_s(\nu)-\alpha_r(\nu)} e^{\langle \alpha_s(\lambda)-\alpha_r(\lambda), t \rangle} |x'_{sp}| |x_{qr}| |z_r|, \tag{7}$$

где $c > 0$, $\alpha_s = (\alpha_s^{(1)}, \alpha_s^{(2)})$. Для всех s, r имеем

$$|x_{qr}| \leqslant c_\varepsilon t^{\nu_r + \frac{\varepsilon}{4}} e^{\langle \lambda_r, t \rangle}, \quad |x'_{sp}| \leqslant c_\varepsilon t^{\overline{\nu}_s + \frac{\varepsilon}{4}} e^{\langle \overline{\lambda}_s, t \rangle}, \quad c_\varepsilon > 0. \tag{8}$$

По определению чисел $\alpha_j^{(i)}$ справедливы неравенства

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_s^{(1)} + \lambda_r^{(1)} + \alpha_s^{(1)}(\lambda) - \alpha_r^{(1)}(\lambda) = \overline{\lambda}_s^{(1)} + \lambda_s^{(1)} \leqslant \sigma_{k_1(\lambda)} = \gamma_1(\lambda), \\ \overline{\lambda}_s^{(2)} + \lambda_r^{(2)} + \alpha_s^{(2)}(\lambda) - \alpha_r^{(2)}(\lambda) \leqslant \gamma_2(\lambda), \ s \neq r \text{ или } s = r \neq k_2(\lambda), \\ \overline{\nu}_s^{(i)} + \nu_r^{(i)} + \alpha_s^{(i)}(\nu) - \alpha_r^{(i)}(\nu) + \delta \leqslant \gamma_i(\nu) + \frac{\varepsilon_i}{2}, \ s \in H'_i \text{ и} \\ \qquad s \neq r \text{ или } s = r \neq k_i(\nu) \ (i = 1, 2). \end{cases} \tag{9}$$

Из неравенств (8), (9) при $s \neq r$ или $k_1(\nu) \neq s = r \neq k_2(\nu)$ и $s = r \neq k_2(\lambda)$ следует

$$t^{\alpha_s(\nu)-\alpha_r(\nu)} \exp\langle \alpha_s(\lambda) - \alpha_r(\lambda), t \rangle |x'_{sp}| \cdot |x_{qr}| \leqslant c_\varepsilon t^{\gamma(\nu)+\varepsilon} \exp\langle \gamma(\lambda), t \rangle. \tag{10}$$

Для того чтобы получить оценку (10) при $s = r = k_1(\nu)$ $(s = r = k_2(\lambda)$ или $s = r = k_2(\nu))$, необходимо воспользоваться неравенствами (8) и равенством $x'_{sp} x_{qs} = \delta_{qp} - \sum_{l \neq s} x_{ql} x'_{lp}$ (δ_{qp} — символ Кронекера). Таким образом, из (7) получаем оценку

$$\|F_i(t, z)\| \leqslant c_\varepsilon g_i(t) t^{\gamma(\nu)+\varepsilon} \exp\langle \gamma(\lambda), t \rangle \|z\| \quad (i = 1, 2). \tag{11}$$

Решение системы (5) в силу полной интегрируемости удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(t) = C^{-1}(t)\, C((1,\ 1))\, z((1,\ 1)) + \int\limits_{(1,1)}^{t} C^{-1}(t)\, C(\tau) \sum_{i=1}^{2} F_i(\tau,\ z(\tau))\, d\tau_i.$$

Отсюда, используя (3), (11), неравенство вида Гронуолла [7] и (4), получим: $\|y(t)\| \leqslant \leqslant N_{\bar{\varepsilon}} \|y((1,\ 1))\|\, t^{\tilde{\alpha}+\bar{\varepsilon}} \exp\langle \alpha(\lambda),\ t\rangle$, где $N_{\bar{\varepsilon}} > 0$, $\tilde{\alpha}_i < 0$ $(i = 1,\ 2)$. Из последней оценки и следует утверждение теоремы, так так $\alpha_i(\lambda) \leqslant 0$, а $\bar{\varepsilon}_1 > 0$, $\bar{\varepsilon}_2 > 0$ выбираем столь малыми, чтобы $\tilde{\alpha}_i + \bar{\varepsilon}_i < 0$ $(i = 1,\ 2)$.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 останется справедливым, если в случае, когда множество H_i состоит из одного элемента и $\gamma_i(\lambda) = \sigma_{k_i(\lambda)} + \max\limits_{j \neq k_i(\lambda)} \{\lambda_j^{(i)}\}$, величину $\gamma_i(\nu)$ заменить не превосходящей ее величиной $\min\{\gamma_i(\nu),\ \sigma_{i,k_i(\lambda)}(\nu)\}$.

Обозначим $\lambda_{n_i}^{(i)} = \max\limits_j \{\lambda_j^{(i)}\}$, $\nu_{q_i}^{(i)} = \max\limits_j \{\nu_j^{(i)}\}$ $(i = 1,\ 2)$. Введем в рассмотрение вектор $\sigma_\lambda = (\sigma_\lambda^{(1)},\ \sigma_\lambda^{(2)})$ (ср. [8]):

$$\sigma_\lambda^{(i)} = \min\{\max_{s \neq n_i \neq j} \{\lambda_{n_i}^{(i)} + \bar{\lambda}_s^{(i)},\ \lambda_j^{(i)} + \bar{\lambda}_{n_i}^{(i)}\},\ \sigma_{k_i(\lambda)}\}.$$

Аналогично определяется вектор $\sigma_\nu = (\sigma_\nu^{(1)},\ \sigma_\nu^{(2)})$, причем в случае, когда H_i содержит не менее двух элементов, индекс s пробегает множество H_i и $\max\limits_j \{\sigma_{ij}(\nu)\}$ следует заменить на $\sigma_{k_i(\nu)}$.

Теорема 2. *Если в предложениях теоремы 1 вместо условия (3) выполняется*

$$\int\limits_{(1,1)}^{t} \sum_{i=1}^{2} g_i(\tau)\, \tau^{(m_i-1)\nu+\sigma_\nu+\varepsilon} e^{\langle (m_i-1)\lambda+\sigma_\lambda,\ \tau\rangle}\, d\tau_i \leqslant M < +\infty,$$

где $\lambda = (\lambda_{n_1}^{(1)},\ \lambda_{n_2}^{(2)})$, $\nu = (\nu_{q_1}^{(1)},\ \nu_{q_2}^{(2)})$, *то тривиальное решение системы (2) асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы 2 проводится в основном аналогично доказательству теоремы 1 (см. также [4]).

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 останется в силе, если в случае, когда множество H_i состоит из одного элемента и $\sigma_\lambda^{(i)} = \sigma_{k_i(\lambda)}$, величину $\sigma_\nu^{(i)}$ заменить не превосходящей ее величиной

$$\min\{\max_{j \neq k_i(\lambda)} \{\bar{\nu}_{k_i(\lambda)}^{(i)} + \nu_j^{(i)}\},\ \sigma_{i,k_i(\lambda)}(\nu)\}.$$

Следствие. *Утверждение теоремы 2 при* $1 \leqslant m_i \leqslant 2$ $(i = 1,\ 2)$ *следует из теоремы 1.*

Действительно, докажем при $1 \leqslant m \leqslant 2$ неравенства

$$\begin{aligned} &(m-1)\,\alpha_i(\lambda) + \gamma_i(\lambda) \leqslant (m-1)\,\lambda_{n_i}^{(i)} + \sigma_\lambda^{(i)}, \\ &(m-1)\,\alpha_i(\nu) + \gamma_i(\nu) \leqslant (m-1)\,\nu_{q_i}^{(i)} + \sigma_\nu^{(i)} \quad (i = 1,\ 2). \end{aligned} \tag{12}$$

Установим, например, первое из неравенств (12). Остальные доказываются аналогично.

1) Если $\gamma_1(\lambda) = \dfrac{1}{2}(\sigma_{k_1(\lambda)} + \sigma_{l_1(\lambda)})$, то по определению чисел $\alpha_j^{(1)}(\lambda)$ имеем

$$\alpha_1(\lambda) = \max\left\{\frac{1}{2}(\sigma_{k_1(\lambda)} - \sigma_{l_1(\lambda)}) + \max_{j \neq k_1(\lambda)} \{\lambda_j^{(1)}\},\ \lambda_{k_1(\lambda)}^{(1)}\right\}.$$

Поэтому в случае $\alpha_1(\lambda) = \dfrac{1}{2}(\sigma_{k_1(\lambda)} - \sigma_{l_1(\lambda)}) + \max\limits_{j \neq k_1(\lambda)} \{\lambda_j^{(1)}\}$ получим

$$\alpha_1(\lambda) + \gamma_1(\lambda) = \max_{j \neq k_1(\lambda)} \{\lambda_j^{(1)}\} + \sigma_{k_1(\lambda)} \leqslant \lambda_{n_1}^{(1)} + \sigma_\lambda^{(1)}, \tag{13}$$

так как если $\sigma_\lambda^{(1)} = \sigma_{k_1(\lambda)}$, то неравенство очевидно, а если $\sigma_\lambda^{(1)} < \sigma_{k_1(\lambda)}$, то $n_1 = k_1(\lambda)$ и

$$\max_{j \neq k_1(\lambda)} \{\lambda_j^{(1)}\} + \sigma_{k_1(\lambda)} = \lambda_{k_1(\lambda)}^{(1)} + \bar{\lambda}_{k_1(\lambda)}^{(1)} + \max_{j \neq k_1(\lambda)} \{\lambda_j^{(1)}\} \leqslant \lambda_{n_1}^{(1)} + \sigma_\lambda^{(1)}.$$

В случае же $\alpha_1(\lambda) = \lambda_{k_1(\lambda)}^{(1)}$ неравенство (13) очевидно, так как $\gamma_1(\lambda) \leqslant \sigma_\lambda^{(1)}$.

2) $\gamma_1(\lambda) = \sigma_{k_1(\lambda)} + \max\limits_{j \neq k_1(\lambda)} \{\lambda_j^{(1)}\}$. В этом случае $\alpha_1(\lambda) = 0$ и поэтому неравенство (13) доказывается аналогично случаю 1). Используя (13), будем иметь при $1 \leqslant m \leqslant 2$:

$$(m-1)\,\alpha_1(\lambda)+\gamma_1(\lambda)=(m-1)\,(\alpha_1(\lambda)+\gamma_1(\lambda))+(2-m)\,\gamma_1(\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant(m-1)(\lambda_{n_1}^{(1)}+\sigma_\lambda^{(1)})+(2-m)\,\sigma_\lambda^{(1)}=(m-1)\,\lambda_{n_1}^{(1)}+\sigma_\lambda^{(1)}.$$

Из неравенств (12) следует, что в случае обыкновенных систем (1), (2) теорема 1 при $1\leqslant m\leqslant 2$ улучшает теорему об асимптотической устойчивости, доказанную в [4]. Вообще же (при $m>2$) неравенства (12) не выполняются, в чем можно убедиться с помощью простого примера.

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_i}=-x_1,\quad \frac{\partial x_2}{\partial t_i}=(-2+\sin\ln t_i+\cos\ln t_i)\,x_2\quad (i=1,\ 2).$$

Для этой системы имеем: $\lambda_1^{(i)}=\lambda_2^{(i)}=-1$, $\overline{\lambda}_1^{(i)}=1$, $\lambda_2^{(i)}=3$ $(i=1,\ 2)$ и, следовательно, $(m-1)\,\alpha_i(\lambda)+\gamma_i(\lambda)=1>3-m=(m-1)\,\lambda_{n_i}^{(i)}+\sigma_\lambda^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ при $m>2$.

Литература

1. Изобов Н. А.— Дифференц. уравнения, 1966, т. 2, № 7, с. 898—907.
2. Гробман Д. М.— Матем. сб., 1952, т. 30 (72), № 2, с. 121—166.
3. Большаков Н. Е. Степенные коэффициенты неправильности и устойчивость по первому приближению.— Вестник Бел. гос. ун-та, сер. 1, 1973, № 2, с. 23—27.
4. Прохорова Р. А.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 4, с. 766—769.
5. Грудо Э. И.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 12, с. 2115—2128.
6. Ласый П. Г. К теории характеристических вектор-степеней решений линейных систем Пфаффа.— Минск, 1982, 23 с. (Препринт / Ин-т математики АН БССР: № 14 (139)).
7. Грудо Э. И., Янчук Л. Ф.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 4, с. 749—752.
8. Прохорова Р. А.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 3, с. 475—483.

Институт математики АН БССР

Поступила в редакцию 12 января 1982 г.

УДК 517.956

И. В. МАЙОРОВ

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему

$$yz_{ixx}+z_{iyy}+\sum_{k=1}^{n}c_{ik}z_k=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\tag{1}$$

в области D, ограниченной отрезком AB, $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, и дугами характеристик AC и BC уравнения $E(z)=yz_{xx}+z_{yy}=0$, $y<0$. Функции $c_{ik}(x,\ y)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми в D и непрерывными в $\overline{D}$.

Пусть $R(x,\ y)=\left(\sum\limits_1^n z_i^2\right)^{1/2}$, $\xi=x-\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta=x+\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}$.

Теорема (принцип экстремума). *Если функция $R(x,\ y)$ на AC равна нулю и во внутренней точке $(x_0,\ 0)$ отрезка AB принимает наибольшее положительное значение, то $R(x,\ y)<R(x_0,\ 0)$ в D.*

Эта теорема сформулирована в работе автора [1] и доказана там лишь для частного случая решения системы в зависимости от начальных данных. В данной статье мы освобождаемся от этих ограничений.

Для дальнейшего необходима следующая

Лемма. *Если $z_i|_{AC}=0$, $z_i|_{AB}=\tau_i(x)$, то решение системы (1) можно представить в следующем виде:*

$$z_i(\xi,\ \eta)=\int_0^{\xi}\tau_i(t)\,K_0(\xi,\ \eta,\ t)\,dt+\int_0^{\xi}\sum_1^n\tau_m K_{im}(\xi,\ \eta,\ t)\,dt,\tag{2}$$

где $\tau_i(x)$ — дифференцируемые функции.