M. G. Pashchenko, Lower bounds for the objective function in a dynamic problem of the choice of optimal composition of machinery in a two-level system,
Diskretn. Anal. Issled. Oper., 1997, Volume 4, Issue 1, 40–53

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 1997. Серия 2. Том 4, № 1, 40–53

УДК 519.8

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

М. Г. Пащенко

Для динамической задачи выбора оптимального состава двухуровневых систем технических средств рассматриваются нижние оценки, получаемые с использованием различных лагранжевых релаксаций. Приводятся точные эффективные алгоритмы решения релаксированных задач, использующие, в частности, сведение к задаче о минимальном разрезе.

Введение

Рассматривается математическая постановка задачи планирования развития системы технических средств [3], названная *динамической задачей выбора оптимального состава двухуровневой системы технических средств*. Особенностью предлагаемой постановки является то, что она отражает ситуацию, когда технические средства, образующие систему, состоят из некоторых составных частей (узлов). При этом узлы одной разновидности могут быть использованы для комплектации технических средств различных образцов. В таких условиях выбор образцов средств и выбор множества разновидностей узлов, используемых для их комплектования, становятся взаимозависимыми, что приводит к постановкам задачи выбора состава двухуровневой системы.

Первые математические модели выбора состава таких систем рассматривались в [2, 4] и касались случая разового выбора, когда промежуток планирования состоит только из одного единичного отрезка времени. Для исследуемых задач показана возможность их сведения к задаче минимизации полинома от булевых переменных и для их решения предложены алгоритмы типа ветвей и границ. В [6] для задачи выбора состава двухуровневой системы дается описание алгоритма ветвей и границ с модифицированным способом вычисления нижней границы. В [7, 9] рассматриваются более общие постановки задачи выбора состава двухуровневой системы, когда процесс выполнения работ состоит из нескольких этапов, на каждом из которых выполняется соответствующая часть множества работ. Для решения таких задач строятся алгоритмы ветвей и границ, а также приближенные алгоритмы, в которых при построении оценок используются различные лагранжевы релаксации.

Рассматриваемые математические модели могут интерпретироваться также в терминах размещения производства. Например, в [11] предлагается двухуровневая задача размещения производства, когда предприятия специализируются либо в производстве продукции, либо в ее хранении, а потребители обслуживаются через предприятия, хранящие продукцию. В работе исследуются три эквивалентные формулировки задачи и соответствующие им лагранжевы релаксации. Приводятся сравнительные характеристики алгоритмов ветвей и границ, использующих указанные релаксации для вычисления границ, с другими алгоритмами из [13, 16, 18].

Исследуемая в настоящей работе математическая модель отличается от отмеченных выше тем, что является динамической, т. е. описывает процесс изменения состава двухуровневой системы на промежутке времени, состоящем из нескольких единичных отрезков, на каждом из которых состав системы может изменяться. Формулировка задачи приведена в разд. 1. В разд. 2 рассматриваются различные варианты лагранжевых релаксаций и соответствующие двойственные задачи, используемые для вычисления нижних оценок. Разд. 3 посвящен изложению основных результатов настоящей работы — построению эффективных алгоритмов решения релаксированных задач.

1. Постановка задачи

Для формулировки задачи введем следующие обозначения. Обозначим через $\boldsymbol{T} = \{1, \ldots, T\}$ множество единичных отрезков, образующих плановый промежуток времени, на котором рассматривается процесс развития системы технических средств. Для определенности считаем, что единичный отрезок имеет длительность 1 год, а t-й отрезок будем называть t-м годом.

Пусть $\boldsymbol{J} = \{1, \ldots, J\}$ — множество работ, которые должны быть выполнены рассматриваемой системой технических средств. При этом будем предполагать, что множество $\boldsymbol{J}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\boldsymbol{J}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$, и считать, что $\boldsymbol{J}_t$ — множество работ, которые должны быть выполнены в t-м году. Для $j \in \boldsymbol{J}$ через $t(j)$ обозначим такой номер $t \in \boldsymbol{T}$, что $j \in \boldsymbol{J}_t$. Обозначим через $\boldsymbol{I} = \{1, \ldots, I\}$ набор рассматриваемых разновидностей (образцов) технических средств, а через $\boldsymbol{K} = \{1, \ldots, K\}$ множество различных видов узлов, используемых для комплектации средств рассматриваемых образцов. Для $i \in \boldsymbol{I}$ обозначим через $\boldsymbol{K}_i$ перечень видов узлов, входящих в состав i-го образца. Для $k \in \boldsymbol{K}$ обозначим через $\boldsymbol{I}_k$ перечень образцов технических средств, в состав которых входят узлы k-го вида.

Введем следующие обозначения:

c°_{it} — затраты на разработку средств i-го образца, если разработка завершается в t-м году;

g_{it} — стоимость производства одного средства i-го образца в t-м году с учетом стоимости производства (закупки) входящих в его состав узлов;

d°_{kt} — затраты на разработку узла k-го вида, если разработка завершается в t-м году;

c_{ij} — затраты на выполнение j-й работы средствами i-го образца;

p_{ij} — количество средств i-го образца, одновременно необходимых для выполнения j-й работы;

u_i — количество средств i-го образца в начальном составе системы, т. е. в составе на начало рассматриваемого промежутка планирования;

V_{it} — ограничения сверху на возможный объем производства средств i-го образца в t-м году.

Введем следующие переменные:

$z_{it} \in \{0,1\}, i \in \boldsymbol{I}, t \in \boldsymbol{T}$. Переменная z_{it} принимает значение 1, если разработка средства i-го образца в t-м году закончена, и $z_{it} = 0$ в противном случае;

$y_{kt} \in \{0,1\}, k \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{T}$. Переменная y_{kt} принимает значение 1, если разработка узла k-го вида в t-м году закончена, и $y_{kt} = 0$ в противном случае;

$v_{it} \geqslant 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Величина v_{it} равняется количеству средств i-го образца, производимых для пополнения состава системы в t-м году;

$x_{ij} \geqslant 0, i \in \boldsymbol{I}, j \in \boldsymbol{J}$. Величина x_{ij} равняется доле j-й работы, выполняемой средствами i-го образца.

С использованием введенных обозначений динамическая задача выбора оптимального состава двухуровневой системы записывается следующим образом. Найти

$$\min \sum_{t \in T} \left\{ \sum_{i \in I} \left[c^{\circ}_{it}\ z_{it} + g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t} c_{ij}\ x_{ij} \right] + \sum_{k \in K} d^{\circ}_{kt}\ y_{kt} \right\} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in \boldsymbol{J}; \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J_t} p_{ij}\, x_{ij} \leqslant u_i + \sum_{\tau=1}^{t} v_{i\tau}, \quad i\in \boldsymbol{I},\quad t\in \boldsymbol{T}; \tag{3}$$

$$0 \leqslant v_{it} \leqslant V_{it} \max_{\tau\leqslant t} z_{i\tau}, \quad i\in \boldsymbol{I},\quad t\in \boldsymbol{T}; \tag{4}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant \max_{\tau\leqslant t(j)} z_{i\tau}, \quad i\in \boldsymbol{I},\quad j\in \boldsymbol{J}; \tag{5}$$

$$\max_{\tau\leqslant t} y_{k\tau} \geqslant z_{it}, \quad k\in \boldsymbol{K}_i,\quad i\in \boldsymbol{I},\quad t\in \boldsymbol{T}; \tag{6}$$

$$z_{it}, y_{kt} \in \{0,1\}, \quad i\in \boldsymbol{I},\quad k\in \boldsymbol{K},\quad t\in \boldsymbol{T}. \tag{7}$$

Целевая функция (1) имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию технических средств в течение планового периода. Равенства (2) гарантируют выполнение всех работ. Неравенства (3) ограничивают возможности выполнения работ имеющимися в наличии средствами. Ограничения (4) устанавливают верхнюю границу на возможные объемы пополнения состава систем. Неравенства (5) и (6) запрещают использование средств, если не завершена разработка данного средства или одного из входящих в его состав узлов.

Сформулированная задача относится к числу NP-трудных задач дискретной оптимизации, так как является обобщением одной NP-трудной задачи выбора оптимального ряда изделий [4].

Для получения нижних оценок целевой функции задачи (1)–(7) рассмотрим некоторые ее лагранжевы релаксации и соответствующие им двойственные задачи. При этом будем иметь в виду, что целесообразно вести релаксацию по тем группам переменных, перенос которых в целевую функцию дает возможность построить нетрудоемкий алгоритм решения «ослабленной» таким образом задачи. Отметим, что при использовании лагранжевых релаксаций бывает полезно ввести дополнительные, избыточные ограничения, которые не влияют на множество допустимых решений исходной задачи, но оказываются существенными, когда часть ограничений заносится в целевую функцию. Эти избыточные ограничения позволяют находить лучшие оценки при тех же значениях множителей Лагранжа и в некоторых случаях облегчают решение релаксированных задач.

Рассмотрим три эквивалентные формулировки задачи (1)–(7). Добавим к ограничениям рассматриваемой задачи следующие неравенства:

$$\sum_{t\in T} y_{kt} \leqslant 1, \quad k\in \boldsymbol{K}, \tag{8}$$

$$\sum_{t\in T} z_{it} \leqslant 1, \quad i\in \boldsymbol{I}, \tag{9}$$

отражающие тот факт, что разработка средства одного и того же образца и узла одного и того же вида не может производиться на рассматриваемом промежутке планирования более одного раза. Полученную задачу (1)–(9) обозначим через W. Поскольку оптимальное решение задачи (1)–(7), очевидно, удовлетворяет неравенствам (8), (9), то полученная задача W эквивалентна исходной. Рассмотрим также неравенства

$$\max_{\tau \leqslant t(j)} y_{k\tau} \geqslant \sum_{i \in I_k} x_{ij}, \quad k \in \boldsymbol{K}, \quad j \in \boldsymbol{J}, \tag{10}$$

и заметим, что при замене ограничений (6) задачи W на ограничения (10) получаем задачу, эквивалентную задаче W. Эту задачу обозначим через S. Наконец, рассмотрим задачу, обозначаемую через BS, которая получается из задачи W добавлением ограничений (10).

2. Нижние оценки

Предлагаемые лагранжевы релаксации для задач W, S и BS связаны с «переносом» в целевую функцию указанных задач ограничений (2) и (10). Поэтому обозначим через λ_j, $j \in \boldsymbol{J}$, множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (2), а через $\beta_{kj} \geqslant 0$, $k \in \boldsymbol{K}$ и $j \in \boldsymbol{J}$, — множители, связанные с ограничениями (10).

Рассмотрим лагранжеву релаксацию LW задачи W по ограничениям (2). Эта задача заключается в следующем.

Найти

$$Z_{LW}[(\lambda_j)] = \min \sum_{t \in T} \left\{ \sum_{i \in I} \left[c^\circ_{it}\, z_{it} + g_{it}\, v_{it} + \sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j)\, x_{ij} \right] + \sum_{k \in K} d^\circ_{kt}\, y_{kt} \right\} + \sum_{j \in J} \lambda_j$$

при условиях (3)–(9).

Обозначим через LS лагранжеву релаксацию задачи S по ограничениям (2) и (4), которая записывается следующим образом.

Найти

$$Z_{LS}[(\lambda_j), (\beta_{kj})] = \min \sum_{t \in T} \left\{ \left[\sum_{i \in I} \left[c^\circ_{it} z_{it} + g_{it} v_{it} + \sum_{j \in J_t} \left(c_{ij} - \lambda_j + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj} \right) x_{ij} \right] \right. \right.$$
$$\left. + \sum_{k \in K} \left(d^\circ_{kt} - \sum_{j \in J_t} \beta_{kj} \right) y_{kt} \right\} + \sum_{j \in J} \lambda_j$$

при ограничениях (3)–(5) и (7)–(9).

Задача LBS, получаемая в результате лагранжевой релаксации задачи BS по ограничениям (2) и (10), имеет ту же целевую функцию, которая рассматривается при условиях (3)–(9).

Двойственные задачи для задач LW, LS и LBS записываются следующим образом:

$$Z_{DLW} = \max_{\lambda_j} Z_{LW}[(\lambda_j)];$$
$$Z_{DLS} = \max_{\lambda_j, \beta_{kj}} Z_{LS}[(\lambda_j), (\beta_{kj})];$$
$$Z_{DLBS} = \max_{\lambda_j, \beta_{kj}} Z_{LBS}[(\lambda_j), (\beta_{kj})]$$

и дают нижние оценки для целевой функции исходной задачи, которые не хуже соответствующих оценок линейного программирования [17].

Отметим, что величины Z_{DLW} и Z_{DLS} не сравнимы между собой даже в случае $T = 1$ [8]. Заметим также, что $Z_{DLBS} \geqslant Z_{DLS}$, так как множество допустимых решений LBS содержится в множестве допустимых решений LS. Наконец, заметим, что $Z_{DLBS} \geqslant Z_{DLW}$, поскольку $Z_{LBS}[(\lambda_j), (0)] = Z_{LW}[(\lambda_j)]$.

Таким образом, получаем, что оценки Z_{DLW} и Z_{DLS} не сравнимы, а оценка Z_{DLBS} не хуже двух других. В этом смысле оценка Z_{DLBS} предпочтительнее остальных. Однако при использовании нижних оценок имеет значение и трудоемкость их вычисления, которая зависит от количества множителей Лагранжа и трудоемкости решения соответствующих релаксированных задач. По этому показателю оценка Z_{DLBS} может проигрывать двум другим. В связи с этим ниже строятся алгоритмы решения для всех трех рассмотренных задач.

3. Алгоритмы решения релаксированных задач

Покажем, что для решения каждой задачи LW, LS и LBS может быть построен эффективный алгоритм.

Рассмотрим задачу LW и заметим, что она распадается на задачу S_0 и серию задач S_i, $i \in \boldsymbol{I}$, которые состоят в следующем.

Найти

$$Z_0 = \min \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \Big(d_{kt} - \sum_{j \in J_t} \beta_{kj} \Big) y_{kt}$$

при ограничениях (7), (8) и

$$Z_i = \sum_{i \in I} \Big\{ c^{\circ}_{it}\; z_{it} + g_{it}\; v_{it} + \sum_{j \in J_t} \Big(c_{ij} - \lambda_j + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj} \Big) x_{ij} \Big\}$$

при ограничениях (3)–(5), (7), (9).

Задача S_0 решается тривиально и сводится к отысканию наименьшей из величин $\Big(d_{kt} - \sum\limits_{j \in J_t} \beta_{kj}\Big)$, $t \in \boldsymbol{T}$, для всякого $k \in \boldsymbol{K}$.

Для решения задачи S_i, $i \in \boldsymbol{I}$, рассмотрим серию задач $S_{i\theta}$, $\theta \in \boldsymbol{T}$, где задача $S_{i\theta}$ имеет следующий вид.

Найти

$$Z_{i\theta} = \min \sum_{t=\theta}^{T} \left\{ g_{it}\, v_{it} + \sum_{j \in J_t} \Big(c_{ij} - \lambda_j + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj} \Big) x_{ij} \right\} \tag{11}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij} x_{ij} \leqslant u_i + \sum_{\tau=\theta}^{t} v_{i\tau}, \quad t = \theta, \ldots, T; \tag{12}$$

$$0 \leqslant v_{it} \leqslant V_{it}, \quad t = \theta, \ldots, T; \tag{13}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1, \quad j \in \boldsymbol{J}_t, \quad t = \theta, \ldots, T. \tag{14}$$

Понятно, что задача $S_{i\theta}$ эквивалентна задаче S_i при дополнительном условии $z_{i\theta} = 1$. В оптимальном решении задачи S_i существует не более одного $\theta \in \boldsymbol{T}$ такого, что $z_{i\theta} = 1$. Таким образом,

$$Z_i = \min\Big(0, \min_{\theta \in T} (Z_{i\theta} + c^{\circ}_{i\theta})\Big)$$

и, следовательно,

$$Z_{LS}[(\lambda_j), (\beta_{kj})] = Z_0 + \sum_{i \in I} \min\Big(0, \min_{\theta \in T} (Z_{i\theta} + c^{\circ}_{i\theta})\Big) + \sum_{j \in J} \lambda_j .$$

Отсюда получаем, что построение алгоритма решения задачи LS сводится к построению алгоритма решения задачи $S_{i\theta}$. Не ограничивая общности, можно считать, что коэффициенты $c_{ij} - \lambda_j + \sum\limits_{k \in K_i} \beta_{kj}$ задачи $S_{i\theta}$ являются отрицательными величинами, поскольку в противном случае значения соответствующих переменных в оптимальном решении равны 0.

При фиксированных значениях переменных v_{it}, $i \in \boldsymbol{I}$ и $t \in \boldsymbol{T}$, задача $S_{i\theta}$ распадается на $T - (\theta - 1)$ задач о рюкзаке с вещественными переменными. Оптимальное решение каждой такой задачи может быть выписано в явном виде. Действительно, рассмотрим задачу, соответствующую номеру $t_\circ \geqslant \theta$, и пусть J_{t_0} упорядочено по неубыванию величин

$$c'_j = \frac{c_{ij} - \lambda_j + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj}}{p_{ij}}.$$

Обозначим через $j(t_\circ)$ минимальный номер $j \in \boldsymbol{J}_{t_0}$ такой, что $\sum\limits_{j' \in J_{t_0},\, j' \leqslant j} p_{ij'} > u_i + \sum\limits_{\tau=\theta}^{t_0} v_{i\tau}$. Если такого номера не существует, то положим $j(t_\circ) = J + 1$.

Оптимальное решение (x_{ij}) рассматриваемой задачи о рюкзаке определяется по формуле

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j > j(t_0), \\ 1, & \text{если } j < j(t_0), \\ \left(u_i + \sum\limits_{\tau=\theta}^{t_0} v_{i\tau} - \sum\limits_{j' \in J_{t_0} j' < j} p_{ij'}\right)/p_{ij}, & \text{если } j = j(t_0). \end{cases}$$

Заметим, что при увеличении значения переменной v_{it_0} на достаточно малую величину ε изменение целевой функции задачи $S_{i\theta}$ равно

$$\left(g_{it_0} + \sum_{t=t_0}^{T} c'_{j(t)}\right)\varepsilon.$$

В силу этого оптимальные значения переменных v_{it} могут быть найдены с помощью процедуры покоординатного спуска, начиная с нулевых значений. На каждом шаге этой процедуры ищется такой номер $t_0 \geqslant \theta$, что относительное уменьшение целевой функции при возрастании переменной v_{it_0} достигает наибольшего значения. Затем определяется приращение переменной v_{it_0} и соответствующим образом изменяются значения переменных x_{ij}. Если на некотором шаге ни по одной из координат нельзя добиться уменьшения целевой функции, то полученное решение является оптимальным [10].

Упорядочивание множеств $\boldsymbol{J}_t$ осуществляется за $O(J \lg J)$. Вычисление приращений и выбор наилучшего номера $t_0 \in \boldsymbol{T}$ требует $O(T)$ операций. С такой же трудоемкостью находится и длина шага. Число шагов определяется количеством ограничений (13), (14) и не превосходит величины $(T + J)$, а так как $T < J$, то трудоемкость решения $S_{i\theta}$ при упорядоченных множествах $\boldsymbol{J}_t$ равна $O(JT)$. Общая трудоемкость алгоритма не превосходит величины

$$O(IJ(T^2 + \lg J) + K).$$

Перейдем к рассмотрению задачи LW.

Теорема 1. *Задача LW сводится к задаче о минимизации полинома от булевых переменных с неположительными коэффициентами при нелинейных членах.*

Доказательство. Для построения соответствующего полинома рассмотрим ряд промежуточных задач, к которым сводится задача LW.

Первая из этих задач строится с использованием серии вспомогательных задач $W_{i\theta}$, $i \in \boldsymbol{I}$ и $\theta \in \boldsymbol{T}$, аналогичных рассмотренным выше задачам $S_{i\theta}$. Задача $W_{i\theta}$ имеет следующий вид.

Найти

$$Z_{i\theta} = \min \sum_{t\in T, t\geqslant\theta} \Big\{g_{it}\ v_{it} + \sum_{j\in J_t}(c_{ij} - \lambda_j)\ x_{ij}\Big\} \tag{15}$$

при условиях (12)–(14).

Положим $r_{i\theta} = -\min(0; Z_{i\theta} + c^{\circ}_{i\theta})$, $i \in \boldsymbol{I}$, $\theta \in \boldsymbol{T}$. Тогда задача LW сводится к следующей.

Найти

$$\min \sum_{t\in T}\Big(\sum_{k\in K} d^{\circ}_{kt} y_{kt} - \sum_{i\in I} r_{it} z_{it}\Big) + \sum_{j\in J}\lambda_j \tag{16}$$

при ограничениях (6)–(9).

Заметим, что с учетом вида ограничений (6) можно считать, что при любом $k \in \boldsymbol{K}$ величины d°_{kt}, $t \in \boldsymbol{T}$, и при любом $i \in \boldsymbol{I}$ величины r_{it}, $t \in \boldsymbol{T}$, образуют невозрастающие по t последовательности.

Перепишем последнюю задачу, введя новые переменные:

$$\xi_{kt} = \sum_{\tau=1}^{t} y_{k\tau}, \quad k \in \boldsymbol{K}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{17}$$

$$\eta_{it} = \sum_{\tau=1}^{t} y_{i\tau}, \quad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}, \tag{18}$$

а также следующие обозначения:

$$h_{kt} = \begin{cases} d^{\circ}_{kT}, & \text{если } t = T, \\ d^{\circ}_{kt} - d^{\circ}_{kt+1}, & \text{если } t \neq T, \end{cases}$$

$$f_{it} = \begin{cases} r_{iT}, & \text{если } t = T, \\ r_{it} - r_{it+1}, & \text{если } t \neq T. \end{cases}$$

Из условий (8) и (9) следует, что переменные ξ_{kt}, η_{it} булевы. Используя введенные обозначения, задачу LR_W можно записать следующим образом.

Найти

$$\min \sum_{t\in T}\Big(\sum_{k\in K} h_{kt}\xi_{kt} - \sum_{i\in I} f_{it}\eta_{it}\Big) + \sum_{j\in J}\lambda_j \tag{19}$$

при условиях

$$\xi_{kt} \geqslant \eta_{it}, \quad k \in \boldsymbol{K}_i, \quad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{20}$$

$$\xi_{kt} \geqslant \xi_{kt-1}, \quad k \in \boldsymbol{K}, \quad t \in \boldsymbol{T}, \quad t \neq 1; \tag{21}$$

$$\eta_{it} \geqslant \eta_{it-1}, \quad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}, \quad t \neq 1; \tag{22}$$

$$\eta_{it},\ \xi_{kt} \in \{0,1\}, \quad i \in \boldsymbol{I}, \quad k \in \boldsymbol{K}, \quad t \in \boldsymbol{T}. \tag{23}$$

Если для решений (z_{it}), (y_{kt}) и (ξ_{kt}), (η_{it}) выполняются (17) и (18), то, как нетрудно видеть, из допустимости одного решения следует допустимость другого и, кроме того, значения соответствующих целевых функций совпадают. Следовательно, задача (19)–(23) и задача (16), (6)–(9) эквивалентны.

Условия (20) и (22) можно заменить равенствами

$$\eta_{it} = \prod_{k \in K_i} \xi_{kt}, \quad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}. \tag{24}$$

Действительно, поскольку $f_{it} \geqslant 0$, то в оптимальном решении задачи (19)–(23) $\eta_{it} = 1$ в том случае, если $\xi_{kt} = 1$ для любого $k \in \boldsymbol{K}_i$.

При этом если переменные ξ_{kt} удовлетворяют неравенствам (21), то для переменных η_{it} выполняются ограничения (22). Неравенства (21) также можно заменить эквивалентными равенствами

$$\xi_{kt}(1 - \xi_{kt+1}) = 0, \quad k \in \boldsymbol{K}, \quad t \in \boldsymbol{T}, \quad t \neq T. \tag{25}$$

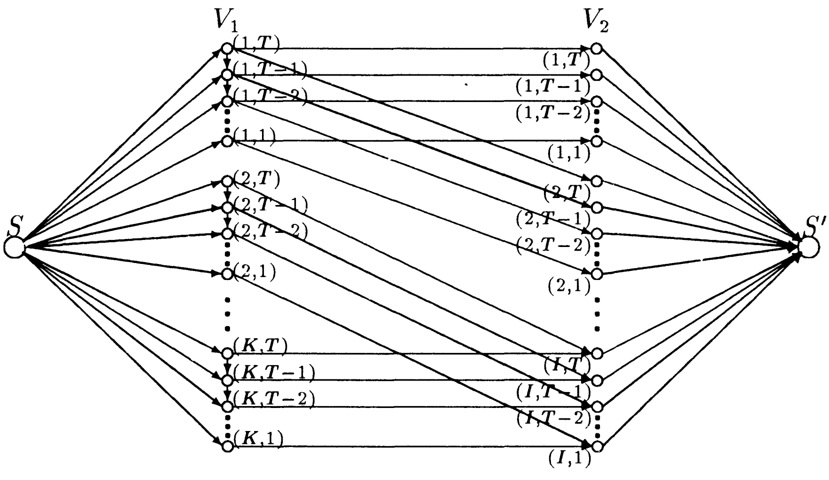
Теперь задача (19), (23)–(25) может быть переформулирована как задача минимизации полинома от булевых переменных вида

$$p(\xi_{kt}) = \sum_{t \in T} \Big(\sum_{k \in K} h_{kt}\xi_{kt} - \sum_{i \in I} f_{it} \prod_{k \in K_i} \xi_{kt} \Big) + \Phi \sum_{k \in K} \sum_{t=1}^{T-1} \xi_{kt}(1 - \xi_{kt+1}) + \sum_{j \in J} \lambda_j,$$

где Φ — достаточно большое число такое, что для оптимального решения задачи минимизации данного полинома выполнены условия (25). Заметим, что построенный полином не имеет положительных коэффициентов при нелинейных членах. Это замечание завершает доказательство теоремы.

Известно [1], что задача минимизации полинома от булевых переменных с неположительными коэффициентами полиномиально сводится к задаче о минимальном разрезе в двудольной сети $S(V, U, E)$ с числом вершин в множествах V и U, равным соответственно числу переменных и числу нелинейных членов полинома. Поэтому доказанная теорема устанавливает сводимость задачи LW к задаче о минимальном разрезе в двудольной сети. Такой разрез может быть построен алгоритмом с трудоемкостью $O(|V|^2 * |U|)$ [15]. Трудоемкость сведения определяется трудоемкостью решения задач $W_{i\theta}$ и равна $O(IJ(T^2 + \lg J))$. Следовательно, для решения задачи LW получаем алгоритм трудоемкости $O(K^2 * (K + I) * T^3 + IJ(T^2 + \lg J))$.

Ниже строится еще одна сеть, к задаче о минимальном разрезе в которой сводится задача LW. Эта сеть не является двудольной, но содержит меньшее количество вершин и, следовательно, предпочтительнее



при использовании простейших алгоритмов отыскания минимального разреза с кубической оценкой трудоемкости.

Рассмотрим сеть $S(V,E)$ (см. рисунок) с источником S, стоком S', множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством дуг $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, где

$V_1 = \{(k,t)/k \in \boldsymbol{K},\ \ t \in \boldsymbol{T}\}$,
$V_2 = \{(i,t)/i \in \boldsymbol{I},\ \ t \in \boldsymbol{T}\}$,
$E_1 = \{(S,(k,t))/k \in \boldsymbol{K},\ \ t \in \boldsymbol{T}\}$,
$E_2 = \{((i,t),S')/i \in \boldsymbol{I},\ \ t \in \boldsymbol{T}\}$,
$E_3 = \{((k,t),(i,t))/i \in \boldsymbol{I},\ \ k \in \boldsymbol{K}_i,\ \ t \in \boldsymbol{T}\}$,
$E_4 = \{e = ((k,t),(k,t-1))/k \in \boldsymbol{K},\ \ t \in \boldsymbol{T},\ \ t \neq 1\}$.

На дугах E определим функцию пропускных способностей w, полагая

$w(S,(k,t)) = h_{kt},\ \ k \in \boldsymbol{K},\ \ t \in \boldsymbol{T}$,
$w((i,t),S') = f_{it},\ \ i \in \boldsymbol{I},\ \ t \in \boldsymbol{T}$,

и считая, что на элементах множества $E_3 \cup E_4$ пропускная способность не ограничена.

Теорема 2. *Задача LR_W полиномиально сводится к задаче о минимальном разрезе в сети S.*

Доказательство. Пусть (W_1,W_2) — разрез наименьшей пропускной способности. То есть множества W_1, W_2 такие, что $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, $W_1 \cup W_2 = V$, $S \in W_1$, $S' \in W_2$, и сумма пропускных способностей ребер с началом в W_1 и концом в W_2 минимальна.

Для любых $i \in \boldsymbol{I}$, $k \in \boldsymbol{K}_i$, $t \in \boldsymbol{T}$ минимальный разрез сети $S(V,E)$ обладает следующим свойством. Если $(k,t) \in W_1$, то для любого $\tau \leqslant t$ вершины (k,τ) и (i,τ) принадлежат W_1. В противном случае существует дуга из W_1 в W_2 неограниченной пропускной способности и (W_1,W_2) не является минимальным разрезом. Аналогично если $(i,t) \in W_2$, то для любого $\tau \geqslant t$ вершины (k,τ) и (i,τ) принадлежат W_2.

Построим по разрезу (W_1, W_2) решение (z_{it}), (y_{kt}) задачи LW. Для этого введем следующие обозначения. Для любого $i \in \boldsymbol{I}$ через $t(i)$ обозначим наименьший номер $t \in \boldsymbol{T}$, для которого $(i,t) \in W_2$, и будем считать $t(i) = T+1$, если такого номера не существует. Для любого $k \in \boldsymbol{K}$ через $\tau(k)$ обозначим наименьший номер $t \in \boldsymbol{T}$, для которого $(k,t) \in W_2$, и будем считать $\tau(k) = T+1$, если такого номера не существует. Положим

$$y_{kt} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \tau_k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = t_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что построенное решение является допустимым. Действительно, неравенства (8), (9), очевидно, выполняются. Условие (6) справедливо, поскольку если вершина (i,t) принадлежит W_2, то для любого $k \in \boldsymbol{K}_i$ вершина (k,t) принадлежит W_2, и, следовательно, $\tau(k) \leqslant t(i)$.

Пусть (z_{it}), (y_{kt}) — допустимое решение задачи LW. Поставим ему в соответствие следующий разрез сети $S(V,E)$. Для любых $k \in \boldsymbol{K}$, $t \in \boldsymbol{T}$ положим $(k,t) \in W_2$, если $\sum\limits_{\tau=1}^{t} y_{kt} = 1$, и $(k,t) \in W_1$ в противном случае. Для любых $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$ положим $(i,t) \in W_2$, если $\sum\limits_{\tau=1}^{t} z_{kt} = 1$, и $(i,t) \in W_1$ в противном случае. Построенный таким образом разрез (W_1, W_2), очевидно, обладает отмеченным свойством минимального разреза.

Покажем, что для соответствующих друг другу разреза (W_1, W_2) и решения (z_{it}), (y_{kt}) величина пропускной способности разреза $Z(W_1, W_2)$ и значение целевой функции задачи LW отличаются на независимую константу. Действительно,

$$\begin{aligned} Z(W_1,W_2) &= \sum_{(k,t)\in W_2} h_{kt} + \sum_{(i,t)\in W_1} f_{it} = \sum_{k\in K}\sum_{t=\tau(k)}^{T} h_{kt} + \sum_{i\in I}\sum_{t=1}^{t(i)-1} f_{it} \\ &= \sum_{k\in K} d_{k\tau(k)} + \sum_{i\in I}(r_{i1} - r_{it(i)}) \\ &= \sum_{k\in K}\sum_{t\in T} d_{kt}y_{kt} + \sum_{i\in I}\Bigl(r_{i1} - \sum_{t\in T} r_{it}z_{it}\Bigr) \\ &= \sum_{i\in I} r_{i1} + \sum_{t\in T}\Bigl\{\sum_{k\in K} d^{\circ}_{kt}y_{kt} - \sum_{i\in I} r_{it}z_{it}\Bigr\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если (W_1, W_2) — минимальный разрез, то (z_{it}), (y_{kt}) — оптимальное решение. Это завершает доказательство теоремы 2.

В [12] для предпотокового алгоритма нахождения минимального разреза из [14] доказана следующая оценка временной сложности: $O(|V|^2 * \sqrt{|E|})$. Применительно к сети S эта оценка имеет вид $O((K+I)^2 * T^2 * \sqrt{K * I * T})$. Следовательно, для задачи LW получаем алгоритм с оценкой трудоемкости $O((K+I)^2 * T^2 * \sqrt{K * I * T} + IJ(T^2 + \lg J))$.

Заметим, что задача LBS отличается от задачи LW только коэффициентами в целевой функции. Поэтому для решения этой задачи могут быть использованы те же алгоритмы, что и для задачи LW.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А.** О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных // Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы): Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. Вып. 21. С. 3–5.
2. **Береснев В. Л.** О задаче выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов. I // Оптимальные процессы (Управляемые системы): Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Вып. 16. С. 35–46.
3. **Береснев В. Л.** Математические модели планирования развития систем технических средств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, № 1. С. 4–29.
4. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
5. **Береснев В. Л., Ибрагимов Г. И., Кочетов Ю. А.** Алгоритмы решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий // Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы): Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. Вып. 24. С. 3–19.
6. **Гончаров Е. Н.** Математическая модель и метод решения двухуровневой задачи стандартизации // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1994. С. 77–90. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 28).
7. **Кочетов Ю. А.** Задачи оптимального выбора состава систем технических средств при многоэтапном процессе выполнения работ. Новосибирск, 1987. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 12).
8. **Кочетов Ю. А., Пащенко М. Г.** Динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 36–49.
9. **Кочетов Ю. А., Пащенко М. Г.** Нижние оценки в задаче выбора состава двухуровневой системы технических средств // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 32–41.

10. **Пащенко М. Г.** Алгоритм вычисления нижней границы для динамической задачи оптимального выбора состава систем технических средств с ограничениями на объемы производства // Модели дискретной оптимизации (Управляемые системы): Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 29. С. 57–71.
11. **Barros A. I., Labbe M.** A general model for uncapacitated facility and depot location problem // Location Science. 1994. V. 2. P. 173–191.
12. **Cheriyan J., Maheshwari S. N.** Analysis of preflow push algorithms for maximum network flow // SIAM J. Comput. 1989. V. 18, N 6. P. 1057–1086.
13. **Gao L. L., Robinson Jr., E. P.** A dual-based optimization procedure for the two-echelon uncapacitated facility location problem // Naval Res. Logist. 1992. V. 39. P. 191–212.
14. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** A new approach to the maximum flow problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1988. V. 35. P. 921–940.
15. **Gusfield D., Martel C., Fernández-Baca D.** Fast algorithms for bipartite network flow // SIAM J. Comput. 1987. V. 16, N 2. P. 237–251.
16. **Ro H. B., Tcha D. W.** A branch and bound algorithm for the two–level uncapacitated facility location problem with some side constraints // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 3. P. 349–358.
17. **Shapiro J. F.** A servey of Lagrangian techniques for discrete optimization // Annals Discrete Math. Amsterdam: North-Holland, 1979. V. 5. P. 113–138.
18. **Tcha D. W., Lee B.** A branch-and-bound algorithm for the multilevel uncapacitated facility location problem // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 1. P. 35–43.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
20 июля 1997 г.