В. М. Кадец, Замечание о двух конусах, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 665–667

https://www.mathnet.ru/mzm5578

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

ЗАМЕЧАНИЕ О ДВУХ КОНУСАХ

В. М. Кадец

Пусть X — банахово пространство. Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется *M-базисом* (*базисом Маркушевича*), если существует такая последовательность функционалов $\{x_k^*\}_1^{\infty} \subset X^*$, что:

1) $\{x_n, x_n^*\}$ — биортогональная система, то есть при всех m и k выполняется соотношение $x_m^*(x_k) = \delta_{m,k}$;

2) система $\{x_k\}_1^{\infty}$ полна в X, то есть $\overline{\mathrm{Lin}}\,\{x_k\}_1^{\infty} = X$;

3) система $\{x_k^*\}_1^{\infty}$ тотальна на X, то есть если $x \in X$ и $x_k^*(x) = 0$ при всех k, то $x = 0$.

Нетрудно видеть, что если $\{x_k\}_1^{\infty}$ — M-базис, то система $\{x_k^*\}_1^{\infty}$ однозначно определяется векторами $\{x_k\}_1^{\infty}$. Для каждого элемента $x \in X$ его разложением по M-базису называется формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k x_k^*(x)$. M-базис называется базисом, если разложение любого элемента есть сходящийся ряд.

По данному M-базису $\{x_k\}_1^{\infty}$ определим такие два конуса: $K_1 = K_1(\{x_k\}_1^{\infty})$ — это замыкание множества всех конечных сумм вида $\sum_{k=1}^{N} a_k x_k$, где все $a_k \geqslant 0$;

$$K_2 = K_2(\{x_k\}_1^{\infty}) = \{x \in X\colon \forall k \geqslant 1 \ x_k^*(x) \geqslant 0\}.$$

Понятно, что $K_1 \subset K_2$, и если $\{x_k\}_1^{\infty}$ — базис, то $K_1(\{x_k\}_1^{\infty}) = K_2(\{x_k\}_1^{\infty})$. В общем случае, чтобы получить совпадение конусов K_1 и K_2, обычно налагают ограничения на «размеры» конуса K_2. Например, верна такая теорема (см. [1, с. 569]): пусть X — рефлексивное пространство, $\{x_k\}_1^\infty$ — M-базис в X и $K_2(\{x_i\}_1^\infty)$ — нормальный конус; тогда $K_1(\{x_i\}_1^\infty) = K_2(\{x_i\}_1^\infty)$. (Напомним, что конус K называется *нормальным*, если $\exists C > 0$:

$$\forall x,\ \ y \in K\ \ (x - y \in K) \Rightarrow (\| x \| \geqslant C \cdot \| y \|)).$$

К сожалению, при работе с M-базисом бывает трудно проверять нормальность конуса K_2. Для нормальности же конуса K_1 достаточно, чтобы векторы $\{x_k\}_1^\infty$ лежали в каком-нибудь нормальном конусе (т. е. для исследования конуса K_1 не нужно привлекать функционалы x_k^*). Возникает вопрос: достаточно ли для совпадения конусов K_1 и K_2 наложить ограничение на «размер» конуса K_1?

В настоящей работе мы даем отрицательный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА. *Пусть X — банахово пространство, K — такой конус в X, что существует M-базис $\{e_k\}_1^\infty \subset K$. Тогда в пространстве X есть M-базис $\{x_k\}_1^\infty$ такой, что $\{x_k\}_1^\infty \subset K$ и*

$$K_1(\{x_k\}_1^\infty) \neq K_2(\{x_k\}_1^\infty).$$

Доказательство. Определим систему $\{x_k\}_1^\infty$ следующим образом:

$$x_1 = e_1 + \| e_2^* \| \cdot e_2,$$

$$x_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \| e_{2k}^* \| e_{2k} + \frac{1}{(2n+1)\| e_{2n+1} \|} e_{2n+1},$$

$$x_{2n+1} = \| e_{2n+2}^* \| e_{2n+2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Докажем полноту системы $\{x_k\}_1^\infty$.

$$e_1 = \lim_{n\to\infty} \left(e_1 - \frac{1}{(2n+1)\| e_{2n+1} \|} e_{2n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{2k-1} - x_{2n} \right).$$

Следовательно, $e_1 \in \overline{\mathrm{Lin}}\, \{x_k\}_1^\infty$. Далее, $e_2 \in \mathrm{Lin}\, \{e_1, x_1\}$, $e_3 \in \mathrm{Lin}\, \{e_1, e_2, x_2\}$, $e_4 \in \mathrm{Lin}\, \{e_1, e_2, e_3, x_3\}$ и т. д. То есть при любом к $e_k \in \overline{\mathrm{Lin}}\, \{x_k\}$, и, следовательно, $\{x_k\}_1^\infty$ — полная система.

Теперь определим функционалы x_k^* следующим образом:

$$x_1^* = e_1^*,$$

$$x_{2n}^* = (2n+1) \| e_{2n+1} \| e_{2n+1}^*,$$

$$x_{2n+1}^* = e_1^* - \frac{1}{\| e_2^* \|} e_2^* + \sum_{k=1}^{n} (2k+1) \| e_{2k+1} \| e_{2k+1}^* + \frac{1}{\| e_{2n+2}^* \|} e_{2n+2}^* \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Непосредственно проверяется, что $\{x_n, x_n^*\}$ — биортогональная система. Проверим, что $\{x_k^*\}_1^\infty$ — тотальная система. Действительно, пусть $\forall k\ x_k^*(x) = 0$. Тогда для любого нечетного k $e_k^*(x) = 0$, а при всех четных k

$$\frac{1}{\| e_k^* \|} e_k^*(x) = \frac{1}{\| e_2^* \|} e_2^*(x).$$

Так как для любого M-базиса $\{e_k\}_1^\infty$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_k^*(x)}{\| e_k^* \|} = 0,$$

то из предыдущих соотношений следует, что $e_k^*(x) = 0$ при всех натуральных k. Значит, $x = 0$ и система $\{x_k^*\}$ тотальна. Кроме того, очевидно, что $\{x_k\}_1^\infty \subset K$.

Нам осталось проверить, что $K_1(\{x_k\}) \neq K_2(\{x_k\})$. В самом деле, вектор $y = e_1 - \| e_4^* \| e_4$ принадлежит конусу $K_2(\{x_k\}_1^\infty)$, так как все числа $x_k^*(y)$ неотрицательны. С другой стороны, функционал e_4^* принимает только неотрицательные значения на конусе K_1, а $e_4^*(y) = -\| e_4^* \| < 0$. Значит, $y \notin K_1(\{x_k\}_1^\infty)$. То есть $K_1(\{x_k\}_1^\infty) \neq K_2(\{x_k\}_1^\infty)$. Теорема доказана.

Замечание. Насколько нам известно, в литературе до сих пор не встречались примеры M-базисов, для которых конусы K_1 и K_2 не совпадают.

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступило 28.02.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Singer I. Bases in Banach Spaces. II.— Berlin— Heidelberg — N. Y.: Springer-Verlag, 1981.