К. М. Эминян, Аддитивные задачи в натуральных числах с двоичными разложениями специального вида,
Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 1, 178–185

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 511

АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ С ДВОИЧНЫМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

К. М. Эминян (г. Москва)
E-mail: eminyan@mail.ru

Посвящаю памяти незабвенного
Сергея Михайловича Воронина

1 Введение

Пусть $n = e_0 + e_1 2 + \ldots + e_k 2^k$ – представление натурального числа n в виде двоичной системе счисление ($e_j = 0, 1$). Пусть $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел, чьи двоичные разложения имеют четное число 1, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

В 1968 году А.О. Гельфонд [1] доказал, что числа классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ регулярно распределены в арифметических прогрессиях. Более того, А.О. Гельфонд получил для любого вещественного α оценку

$$\sum_{n \leqslant X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \ll X^{\lambda},$$

где $\lambda = \frac{\ln 3}{\ln 4} = 0,79\ldots$

Эту оценку мы в дальнейшем будем называть оценкой Гельфонда.

В 1991 году автор решил задачу, поставленную перед ним С.М. Ворониным, и получил [2] асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n\leqslant x,\ n\in\mathbb{N}_0} \tau(n).$$

В 1996 году автор доказал следующую теорему. Пусть $F_{j,k}(X)$ — число решений уравнений $n-m=1$ в натуральных числах $n\leqslant X$, $n\in\mathbb{N}_j$, $m\in\mathbb{N}_k$, $j,\ k=0,\ 1$.

Тогда справедливы асимптотические формулы

$$F_{0,0}(X)=\frac{X}{6}+O(\log X),\quad F_{1,1}(X)=\frac{X}{6}+O(\log X),$$

$$F_{0,1}(X)=\frac{X}{3}+O(\log X),\quad F_{1,0}(X)=\frac{X}{3}+O(\log X).$$

Отсюда следует, что главные члены определяются значениями j и k.

В настоящей статье рассматриваются две задачи, в которых указанный эффект отсутствует.

Сформулируем основные теоремы статьи.

Теорема 1. *Пусть h — целое число такое, что $0\leqslant h\leqslant 2$. Пусть $I_{j,k}(X,h)$ – число решений уравнения $n-3m=h$ в натуральных числах $n\leqslant X$, $n\in\mathbb{N}_j$, $m\in\mathbb{N}_k$, где $j,\ k$ – произвольные целые числа из отрезка $[0,1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$I_{j,k}(X,h)=\frac{X}{4}+O(X^{\lambda}),\quad \lambda=0,79\ldots$$

Теорема 2. *Пусть l — целое число такое, что $0\leqslant l\leqslant 4$. Пусть $J_{j,k}(X)$ — число решений уравнения $n-5m=l$ в натуральных числах $n\leqslant X$, $n\in\mathbb{N}_j$, $m\in\mathbb{N}_k$, где $j,\ k$ — произвольные целые числа из отрезка $[0,1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$J_{j,k}(X)=\frac{X}{4}+O(X^{\lambda}),\quad \lambda=0,79\ldots$$

Определим суммы

$$S_3(X,h)=\sum_{n\leqslant X}\varepsilon(n)\varepsilon(3n+h),\quad S_5(X,l)=\sum_{n\leqslant X}\varepsilon(n)\varepsilon(5n+l),$$

где h и l — неотрицательные целые числа.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны соответственно на леммах 1 и 2 (см. ниже), а также на оценке Гельфонда.

2 Леммы

Лемма 1. *Пусть h — целое число такое, что $0 \leqslant h \leqslant 2$. Тогда справедлива оценка*

$$S_3(X,h) = O(\sqrt{X}).$$

Доказательство. Группируя слагаемые, отвечающие четным и нечетным n соответственно и пользуясь очевидными равенствами $\varepsilon(2n) = \varepsilon(n)$, $\varepsilon(2n+1) = -\varepsilon(n)$, приходим к следующим соотношениям

$$S_3(X,0) = S_3\left(\frac{X}{2},0\right) + S_3\left(\frac{X}{2},1\right) + O(1), \tag{1}$$

$$S_3(X,1) = -S_3\left(\frac{X}{2},0\right) - S_3\left(\frac{X}{2},2\right) + O(1), \tag{2}$$

$$S_3(X,2) = S_3\left(\frac{X}{2},1\right) + S_3\left(\frac{X}{2},2\right) + O(1), \tag{3}$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_0 S_3(X,0) + \beta_0 S_3(X,1) + \gamma_0 S_3(X,2),$$

где α_0, β_0, γ_0 — константы, которые будут выбраны позже.

Пользуясь (1) – (3), имеем

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 S_3(X,0) + \beta_0 S_3(X,1) + \gamma_0 S_3(X,2) = \\
&\quad = \alpha_0\left(S_3\left(\frac{X}{2},0\right) + S_3\left(\frac{X}{2},1\right)\right) + \beta_0\left(-S_3\left(\frac{X}{2},0\right) - S_3\left(\frac{X}{2},2\right)\right) + \\
&\quad + \gamma_0\left(S_3\left(\frac{X}{2},1\right) + S_3\left(\frac{X}{2},2\right)\right) + O(|\alpha_0|) + O(|\beta_0|) + O(|\gamma_0|) = \\
&\quad = \alpha_1 S_3\left(\frac{X}{2},0\right) + \beta_1 S_3\left(\frac{X}{2},1\right) + \gamma_1 S_3\left(\frac{X}{2},2\right) + \\
&\qquad + O(|\alpha_0|) + O(|\beta_0|) + O(|\gamma_0|),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 - \beta_0, \\ \beta_1 = \alpha_0 + \gamma_0, \\ \gamma_1 = \gamma_0 - \beta_0. \end{cases}$$

Повторяя это рассуждение, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 S_3(X,0) + \beta_0 S_3(X,1) + \gamma_0 S_3(X,2) = \alpha_j S_3\left(\frac{X}{2^j},0\right) + \beta_j S_3\left(\frac{X}{2^j},1\right) + \\
&\quad \gamma_j S_3\left(\frac{X}{2^j},2\right) + O(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{j-1}|) + \\
&\qquad + O(|\beta_0| + \ldots + |\beta_{j-1}|) + O(|\gamma_0| + \ldots + |\gamma_{j-1}|),
\end{aligned}$$

в котором последовательности α_j, β_j, γ_j связаны соотношениями

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = \alpha_j - \beta_j, \\ \beta_{j+1} = \alpha_j + \gamma_j, \\ \gamma_{j+1} = \gamma_j - \beta_j, \end{cases} \tag{4}$$

для любого $j,\ 0 \leqslant j \leqslant \log_2 X - 10$.

Запишем равенства (4) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j+1} \\ \beta_{j+1} \\ \gamma_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix} = A^j \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix},$$

где $1 \leqslant j \leqslant \log_2 X - 10$.

Вычислим A^j. Для этого найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A и получим равенство $A = CBC^{-1}$, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{7}}{2} & \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix} = CB^jC^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{2}$, имеем неравенства

$$|\alpha_j| = O(2^{j/2}),\ |\beta_j| = O(2^{j/2}),\ |\gamma_j| = O(2^{j/2}),$$

где постоянные в знаках O — абсолютные.

Выберем J наименьшим натуральным числом таким, что

$$2^J < \frac{1}{10}X.$$

Пусть, например,

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

тогда

$$S_3(X,0) = \alpha_J S_3\left(\frac{X}{2^J}, 0\right) + \beta_J S_3\left(\frac{X}{2^J}, 1\right) + \gamma_J S_3\left(\frac{X}{2^J}, 2\right) + O(\sqrt{2}^{\,J}).$$

Теперь, оценивая суммы

$$S_3\left(\frac{X}{2^J}, 0\right),\ S_3\left(\frac{X}{2^J}, 1\right),\ S_3\left(\frac{X}{2^J}, 2\right)$$

тривиально и пользуясь тем, что

$$|\alpha_J| + |\beta_J| + |\gamma_J| = O(\sqrt{2}^{\,J}) = O(\sqrt{X}),$$

получим оценку

$$S_3(X,0) = O(\sqrt{X}).$$

Аналогично получаем, что

$$S_3(X,1) = O(\sqrt{X}),\ S_3(X,2) = O(\sqrt{X}).$$

□

Лемма 2. *Пусть l — целое число такое, что $0 \leqslant l \leqslant 4$. Тогда справедлива оценка*

$$S_5(X,l) = O(X^{\mu}),$$

где $\mu = 0,605\ldots$

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_0 S_3(X,0) + \beta_0 S_3(X,1) + \gamma_0 S_3(X,2) + \delta_0 S_3(X,3) + \varepsilon_0 S_3(X,4),$$

где α_0, β_0, γ_0, δ_0, ε_0 — постоянные, которые будут выбраны позже.

Подобно тому, как это сделано в доказательстве леммы 1, получаем, что

$$\begin{aligned}\alpha_0 S_3(X,0) + \beta_0 S_3(X,1) + \gamma_0 S_3(X,2) + \delta_0 S_3(X,3) + \\ + \varepsilon_0 S_3(X,4) = \alpha_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 0\right) + \beta_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 1\right) + \gamma_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 2\right) + \\ + \delta_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 3\right) + \varepsilon_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 4\right) + \\ + O\left(\sum_{k=0}^{j-1} (|\alpha_k| + |\beta_k| + |\gamma_k| + |\delta_k| + |\varepsilon_k|)\right), \quad (5)\end{aligned}$$

где $1 \leqslant j \leqslant \log_2 X - 10$; последовательности α_j, β_j, γ_j, δ_j, ε_j связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = \alpha_j - \beta_j, \\ \beta_{j+1} = \gamma_j - \delta_j, \\ \gamma_{j+1} = \alpha_j + \varepsilon_j, \\ \delta_{j+1} = \gamma_j - \beta_j, \\ \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \delta_j, \end{cases}$$

$1 \leqslant j \leqslant \log_2 X - 10$.

Запишем их в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j+1} \\ \beta_{j+1} \\ \gamma_{j+1} \\ \delta_{j+1} \\ \varepsilon_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \\ \delta_j \\ \varepsilon_j \end{pmatrix}.$$

Компьютерные вычисления показывают, что собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеют вид:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{2/3} + 3}{3(27 + 3\sqrt{78})^{1/3}},$$

$$\lambda_4 = -\frac{-(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3} - 3 + \sqrt{3}(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3}\, i - 3\sqrt{3}\, i}{6(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{1/3}},$$

$$\lambda_5 = \frac{(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3} + 3 + \sqrt{3}(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3}\, i - 3\sqrt{3}\, i}{6(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{1/3}}.$$

Заметим, что с точностью до пропорциональности существует лишь один собственный вектор, отвечающий собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Воспользуемся известной теоремой о том, что существует базис, в котором A имеет нормальную жорданову форму (см., например, [4]).

В нашем случае существует матрица C: $A = CBC^{-1}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \\ \delta_j \\ \varepsilon_j \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}^j C^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы C, C^{-1} не зависят от j. Поэтому, если в столбце

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

положить однин из элементов равные 1, а остальные нулю, то в столбце

$$CB^jC^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

все элементы оцениваются как $O(j + |\lambda_3|^j + |\lambda_4|^j + |\lambda_5|^j)$.

Так как $|\lambda_3| = 1.521379707\ldots$, $|\lambda_4| = |\lambda_5| < |\lambda_3|$ то $|\alpha_j|$, $|\beta_j|$, $|\gamma_j|$, $|\delta_j|$, $|\varepsilon_j|$=$O(|\lambda_3|^j)$.

Полагая в равенстве (5) $j = J = [\log_2 X] - 10$, получаем, что для любого $0 \leqslant k \leqslant 4$ справедливы неравенства

$$|S_5(X, l)| = O\left(X^{\mu}\right),$$

где $\mu = \frac{\ln|\lambda_3|}{\ln 2} = 0.605\ldots$ □

3 Доказательства теорем 1 и 2

Докажем теорему 1. Для любого целого h, $0 \leqslant h \leqslant 2$, и для любых $j,\ k = 0,\ 1$ имеем

$$I_{j,k}(X,h) = \sum_{n \leqslant X} \Big(\frac{1 + (-1)^j \varepsilon(n)}{2}\Big)\Big(\frac{1 + (-1)^k \varepsilon(3n+h)}{2}\Big) =$$

$$= \frac{X}{4} + \frac{(-1)^j}{4} \sum_{n \leqslant X} \varepsilon(n) + \frac{(-1)^k}{4} \sum_{n \leqslant X} \varepsilon(3n+h) + \frac{(-1)^{j+k}}{4} S_3(X,h) + O(1) =$$

$$= \frac{X}{4} + \frac{(-1)^j}{4} \sum_{n \leqslant X} \varepsilon(n) + \frac{(-1)^k}{4} \sum_{c=1}^{3} e^{-\frac{2\pi ich}{3}} \sum_{n \leqslant 3X+h} \varepsilon(n) e^{\frac{2\pi icn}{3}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{j+k}}{4} S_3(X,h) + O(1).$$

Теперь теорема 1 сразу следует из очевидного равенства

$$\sum_{n \leqslant X} \varepsilon(n) = O(1),$$

неравенства Гельфонда и леммы 1. Любопытно отметить, что, поскольку оценка Гельфонда при $\alpha = 1/3$ неулучшаема, оценка остаточного члена в теореме 1 неулучшаема.

Доказательство теоремы 2 по существу совпадает с доказательством теоремы 1. Единственное различие — использование леммы 2 вместо леммы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Gelfond A.O., «Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données». *Acta Arith.,* 13 (1968), 259–265.

[2] Эминян К.М., *«О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел», Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 55:3 (1991), 680–686.

[3] Эминян К.М., *«Об одной бинарной задаче»*, Мат. заметки., 60:4 (1996), 634–637.

[4] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

Финансовый Университет при Правительстве РФ.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана.
Поступило 15.08.2011