В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов, Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией,
Матем. заметки, 2019, том 106, выпуск 5, 643–659

https://www.mathnet.ru/mzm12557

Математические заметки

Том 106 выпуск 5 ноябрь 2019

УДК 517.928+517.984

Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией

В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов

Основные результаты заметки связаны с изучением дифференциального оператора вида

$$Ly = y^{(n)}(-x) + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(-x) + \sum_{k=1}^{n} q_k(x) y^{(n-k)}(x), \qquad x \in [-1, 1],$$

с краевыми условиями общего вида, сосредоточенными на концах отрезка. Даны два эквивалентных определения регулярности краевых условий для оператора L и доказана теорема о безусловной базисности со скобками корневых функций оператора L в случае регулярных краевых условий.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: операторы с инволюцией, регулярные дифференциальные операторы, базисность собственных функций операторов, базисы Рисса.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12557

В этой работе мы изучим операторы, которые определены на конечном отрезке дифференциальным выражением вида

$$L(y) = JP(y) + Q(y), \qquad y = y(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{0.1}$$

где

$$P(y) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}, \qquad Q(y) = y^{(m)}(x) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x) y^{(m-k)},$$

а J – оператор инволюции вида $Jy(x) = y(-x)$. Далее будем полагать, что коэффициенты p_k и q_k дифференциальных выражений P и Q принадлежат пространству $L^\infty[0,1]$, т.е. являются измеримыми, существенно ограниченными функциями.

Цель работы – представить подробное доказательство части результатов, анонсированных авторами в работе [1]. Отметим, что в [1] авторы рассматривали оператор J в более общем виде $Jy(x) = y(\varphi(x))$, где φ – гладкая функция, осуществляющая биекцию отрезка $[-1, 1]$ на себя такая, что $\varphi(\varphi(x)) = x$. Однако здесь мы ограничимся рассмотрением только инволюции отражения $\varphi(x) = -x$. В общем случае

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 17-11-01215.

основные идеи определений и доказательств сохраняются, но возникают серьезные технические трудности, с которыми лучше работать отдельно, что будет проделано в другой работе.

В известных авторам работах о свойствах корневых функций дифференциальных операторов с инволюцией рассматривались только случаи операторов (0.1), где P и Q порождаются дифференциальными выражениями первого или второго порядка (в основном с нулевыми младшими членами, т.е. когда коэффициенты p_j, q_j равны нулю). Для операторов P, Q первого порядка задача достаточно подробно изучена в [2] и [3]. Для случая второго порядка в основном рассматривались конкретные задачи для операторов

$$Ly = -y''(-x) \qquad \text{или} \qquad Ly = y''(-x) + \alpha y''(x),$$

см. [4]–[9]. Наиболее общий результат для оператора второго порядка получен в работе [8], где спектральные задачи рассматривались с нелокальными, интегральными краевыми условиями. Однако в случае двуточечных краевых условий результаты покрывают только условия Дирихле. Нам неизвестны также работы с попытками провести классификацию произвольных операторов вида (0.1) в зависимости от краевых условий. Мы ставим цель восполнить эти пробелы и получить результаты общего характера о свойствах полноты и базисности собственных и присоединенных (корневых) функций операторов вида (0.1).

Далее через L обозначаем оператор, который порождается дифференциальным выражением (0.1) и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_{jk} y^{(k)}(-1) + \beta_{jk} y^{(k)}(1) = 0, \qquad j = 1, \ldots, d, \quad d = \max\{n, m\}. \tag{0.2}$$

Точнее, оператор L мы рассматриваем в пространстве $L^2[0,1]$, а в качестве его области определения берем

$$\mathcal{D}(L) = \{y \in W^{d,2}[-1,1] \mid U_j(y) = 0,\ j = 1, \ldots, d\}, \tag{0.3}$$

где $W^{d,2} = W^{d,2}[-1,1]$ – пространство Соболева.

При изучении рассматриваемой задачи возникают три случая в зависимости от порядков n и m операторов P и Q. Случай $n = m$ требует особого подхода, ему будет посвящена отдельная работа. Здесь основное внимание уделено случаю $n > m$. Случай $n < m$ можно считать относительно простым. Мы покажем, что для регулярных по Биркгофу краевых условий (0.2) в этом случае результаты о базисности корневых функций оператора L могут быть получены с помощью общих результатов теории возмущений.

1. Определение регулярных краевых условий

1.1. В этом и следующем разделах считаем, что $n > m$. В этом случае мы допускаем более общий вид дифференциального выражения Q, а именно, вместо первого члена может присутствовать $q_0(x)y^{(m)}(x)$, где q_0 – существенно ограниченная функция. Оператор инволюции J считаем отражением. Наша ближайшая цель – дать определение регулярности для операторов с инволюцией. Мы предложим два эквивалентных определения, используя конструкции, предложенные в работе [10]. Обратим внимание, что далее выражения $L(y)$ и Ly имеют разный смысл. А именно, $L(y)$

обозначает дифференциальное выражение вида (0.1), а Ly – действие оператора L с областью определения (0.3) на функцию y, т.е. дополнительно предполагается, что $y \in \mathcal{D}(L)$.

Напомним, что число κ_j называется порядком линейной формы вида (0.2), если по меньшей мере один из коэффициентов при $y^{(\kappa_j)}(1)$ или $y^{(\kappa_j)}(-1)$ отличен от нуля, а все коэффициенты при производных порядка $k > \kappa_j$ равны нулю. *Суммарным порядком* краевых условий вида (0.2) называется число

$$\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n.$$

Краевые условия называются нормированными, если суммарный порядок нельзя понизить, рассматривая их произвольные линейные комбинации. Всюду далее считаем краевые условия нормированными, в частности, считаем, что в (0.2) суммирование ведется до числа κ_j.

Выделим главные части функционалов U_j, определяющих краевые условия (0.2):

$$U_j^0(y) = \alpha_j y^{(\kappa_j)}(-1) + \beta_j y^{(\kappa_j)}(1), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где $\alpha_j := \alpha_{j\,\kappa_j}$, $\beta_j := \beta_{j\,\kappa_j}$. Рассмотрим операторы P_0 и P_{00}, определенные дифференциальным выражением $P_0(y) = y^{(n)}$ на области определения $\mathcal{D}(P_0) = \mathcal{D}(L)$ (см. (0.3)) и на области

$$\mathcal{D}(P_{00}) = \{y \in W^{n,2}[-1,1] \mid U_j^0(y) = 0,\, j = 1, \ldots, n\}$$

соответственно.

Естественно изучить сначала оператор L в наиболее простом случае, когда младшие члены в его определении отсутствуют. А именно, наша ближайшая цель – изучить операторы

$$T_0 = JP_{00} \quad \text{и} \quad T = JP_0.$$

Запишем уравнение на собственные значения (здесь $\lambda = \rho^n$ – спектральный параметр)

$$JP_{00}y = y^{(n)}(-x) = \rho^n y(x), \qquad y \in \mathcal{D}(P_{00}). \tag{1.2}$$

Рассмотрим сначала случай $n = 2l$. Обозначим через $\{\tau_s\}_1^{2n}$, $\{\omega_s\}_1^n$ и $\{\theta_s\}_1^n$ корни уравнений $\tau^{2n} = 1$, $\omega^n = -1$ и $\theta^n = 1$ соответственно. Числа $\{\tau_s\}_1^{2n}$ занумеруем против часовой стрелки, начиная с $\tau_1 = -i$. Нумерацию корней ω_s и τ_s также проведем против часовой стрелки. В случае нечетного l нумерацию начнем с $\omega_1 = \tau_1 = -i$, $\theta_1 = \tau_2 = -ie^{i\pi/n}$. В случае четного l положим наоборот $\theta_1 = -i$, $\omega_1 = -ie^{i\pi/n}$. Тогда функции

$$v_s = e^{\omega_s \rho x} - e^{-\omega_s \rho x}, \quad v_{s+l} = e^{\theta_j \rho x} + e^{-\theta_j \rho x}, \qquad s = 1, \ldots, l, \tag{1.3}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.2) (очевидно, что эти функции являются решениями уравнения(1.2), также очевидно, что они линейно независимы).

Характеристический определитель Δ_0 задачи (1.2) имеет вид

$$\Delta_0(\rho) = \begin{vmatrix} U_1^0(v_1) & \ldots & U_1^0(v_l) & U_1^0(v_{l+1}) & \ldots & U_1^0(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^0(v_1) & \ldots & U_n^0(v_l) & U_n^0(v_{l+1}) & \ldots & U_n^0(v_n) \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Выписывая значения функционалов (1.1) на функциях (1.3), получаем

$$U_j^0(v_s) = \rho^{\kappa_j}\omega_s^{\kappa_j}(e^{\omega_s\rho}A_j + e^{-\omega_s\rho}B_j), \qquad U_j^0(v_{s+l}) = \rho^{\kappa_j}\theta_s^{\kappa_j}(e^{\theta_s\rho}C_j + e^{-\theta_s\rho}D_j), \quad (1.5)$$

где

$$A_j = \beta_j - (-1)^{\kappa_j}\alpha_j, \qquad B_j = \alpha_j - (-1)^{\kappa_j}\beta_j,$$
$$C_j = \beta_j + (-1)^{\kappa_j}\alpha_j, \qquad D_j = \alpha_j + (-1)^{\kappa_j}\beta_j.$$

Теперь подставим эти выражения в (1.4). Тогда, раскрывая определитель (1.4), получаем

$$\Delta_0(\rho) = \rho^\kappa \sum_m F_m e^{\mu_m\rho}, \qquad \kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n, \quad (1.6)$$

где μ_m – всевозможные суммы n различных чисел из набора

$$\omega_1, \dots, \omega_l, \ -\omega_1, \dots, -\omega_l, \ \theta_1, \dots, \theta_l, \ -\theta_1, \dots, -\theta_l, \quad (1.7)$$

(при этом числа ω_j и θ_j входят в каждую сумму либо со знаком $+$, либо со знаком $-$), а F_m – соответствующие числовые коэффициенты, которые получаются после раскрытия определителя (зависят от чисел α_j, β_j в (1.1)). Заметим, что набор чисел (1.7) совпадает с набором $\{\tau_s\}_1^{2n}$, например, в случае нечетного l имеем $\tau_{2s-1} = \omega_s$, $\tau_{2s} = \theta_s$. Поэтому точки

$$\mu_1 = \tau_1 + \dots + \tau_n, \qquad \mu_2 = \tau_2 + \dots + \tau_{n+1} \quad (1.8)$$

входят в набор μ_m, причем $\operatorname{Re}\mu_1 = \operatorname{Re}\mu_2 > \operatorname{Re}\mu_m$ для всех $m \neq 1, 2$. Последние неравенства следуют из того, что корни $\{\tau_s\}_{n+2}^{2n}$ находятся в открытой левой полуплоскости.

После подстановки выражений (1.5) в определитель Δ_0 находим выражения для чисел F_1 и F_2 при экспонентах $e^{\mu_1\rho}$ и $e^{\mu_2\rho}$ в явном виде

$$F_1 = \begin{vmatrix} \omega_1^{\varkappa_1}A_1 & \dots & \omega_l^{\varkappa_1}A_1 & \theta_1^{\varkappa_1}C_1 & \dots & \theta_l^{\varkappa_1}C_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{\varkappa_n}A_n & \dots & \omega_l^{\varkappa_n}A_n & \theta_1^{\varkappa_n}C_n & \dots & \theta_l^{\varkappa_n}C_n \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

$$F_2 = \begin{vmatrix} \omega_1^{\varkappa_1}B_1 & \omega_2^{\varkappa_1}A_1 & \dots & \omega_l^{\varkappa_1}A_1 & \theta_1^{\varkappa_1}C_1 & \dots & \theta_l^{\varkappa_1}C_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{\varkappa_n}B_n & \omega_2^{\varkappa_n}A_n & \dots & \omega_l^{\varkappa_n}A_n & \theta_1^{\varkappa_n}C_n & \dots & \theta_l^{\varkappa_n}C_n \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Здесь число F_2 записано в случае нечетного l. В случае четного l числа B_j в первом столбце надо заменить на A_j, а числа C_j в $n+1$ столбце на числа D_j.

Отметим в комплексной плоскости все точки μ_m, участвующие в (1.6), и построим наименьший выпуклый многоугольник M, содержащий все эти точки. Многоугольник M совпадает с индикаторной диаграммой целой функцией Δ_0 (см., например, [11; лекции 8 и 9]). При этом точки μ_1 и μ_2 являются угловыми для M. Из уравнения (1.2) следует, что функция Δ_0 является целой от $\lambda = \rho^n$, т.е. имеется n-кратная симметрия в представлении (1.6). Так как $\mu_2 = e^{i\pi/n}\mu_1$, то все другие угловые точки индикаторной диаграммы функции Δ_0 определяются равенствами

$$\mu_{j+1} = \mu_1 e^{i\pi j/n}, \qquad j = 1, \dots, 2n-1.$$

Кроме того, все нечетные коэффициенты $F_1, F_3, \dots, F_{2n-1}$ и четные $F_2, \dots, F_{2n}$ совпадают друг с другом с точностью до множителя равного по модулю 1. Тем самым, неравенство $F_1F_2 \neq 0$ влечет отличие от нуля всех других коэффициентов F_m, отвечающим угловым точкам μ_m.

Определение 1. Краевые условия (0.2) для оператора L, определенного (0.1), (0.2), назовем *регулярными*, если числа F_1 и F_2, определенные равенствами (1.9) и (1.10), отличны от нуля.

Теперь стандартным приемом в случае регулярных краевых условий мы можем получить информацию об асимптотике собственных значений операторов T_0 и T. Это получается из следующих соображений. Заметим, что при сколь угодно малых $\eta > 0$ в секторе

$$S_j = \left\{\rho \in \mathbb{C} \;\Big|\; |\arg\rho - \arg\mu_j| < \frac{\pi}{2n} - \eta\right\}, \qquad j = 1, 2, \dots, 2n,$$

экспонента $e^{\rho\bar{\mu}_j}$ мажорируют все другие экспоненты $e^{\rho\mu_m}$. Следовательно, в каждом секторе S_j при больших значениях $|\rho|$ функция Δ_0 не имеет нулей и все ее нули асимптотически лежат в секторах

$$\Omega_{j+1} = e^{i\pi j/n}\Omega_1, \qquad \Omega_1 = \{\rho \mid |\arg\rho| < \eta\}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n-1.$$

Из равенств (1.8) следует $\operatorname{Im}\mu_2 = -\operatorname{Im}\mu_1 = i$, поэтому в секторе Ω_1 имеем представление

$$\Delta_0(\rho) = e^{\delta\rho}\left(F_1e^{-i\rho} + F_2e^{i\rho} + \sum_{m\neq 1,2} F_l e^{(\mu_m-\delta)\rho}\right), \tag{1.11}$$

где $\delta = \tau_2 + \dots + \tau_n = \operatorname{Re}\mu_1 = \operatorname{Re}\mu_2$. При η достаточно малом найдется $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ такое, что при $m \neq 1, 2$ выполняется неравенство $\operatorname{Re}(\mu_m - \delta)\rho < -\varepsilon|\rho|$ для всех $\rho \in \Omega_1$. Тогда из (1.11) с помощью теоремы Руше получаем, что нули Δ_0 в секторе Ω_1 асимптотически экспоненциально близки к нулям функции

$$F_1e^{-i\rho} + F_2e^{i\rho} = F_1e^{i\rho}\left(e^{-2i\rho} + \frac{F_2}{F_1}\right),$$

которые выписываются явно

$$\rho_{k,1} = \pi k - \frac{1}{2i}\ln\xi_1, \qquad \xi_1 = -\frac{F_2}{F_1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{1.12}$$

(здесь фиксируется произвольная ветвь логарифма). Аналогично можно показать, что нули функции Δ_0 в секторе Ω_2 асимптотически совпадают с точностью до экспоненциально малых величин с последовательностью

$$\rho_{k,2} = e^{i\pi/n}\left(\pi k - \frac{1}{2i}\ln\xi_2\right), \qquad \xi_2 = -\frac{F_1}{F_{2n}}, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{1.13}$$

Предложение 1. *Собственные значения оператора T определяются асимптотическими формулами*

$$\lambda_{k,1} = (\rho_{k,1} + O(k^{-1}))^n, \qquad \lambda_{k,2} = (\rho_{k,2} + O(k^{-1}))^n,$$

где $\rho_{k,1}$, $\rho_{k,2}$ определены (1.12) *и* (1.13).

Доказательство. Заметим, что формулы (1.12) и (1.13) определяют корни n-й степени собственных значений оператора T_0. Для характеристического определителя Δ, определяющего собственные значения оператора T справедливо равенство (1.4), в котором вместо функционалов U_j^0 участвуют функционалы U_j. Значения $U_j(v_s)$ выражаются равенствами (1.5), в которых числа A_j, B_j, C_j, D_j должны быть заменены на функции $[A_j]$, $[B_j]$, $[C_j]$, $[D_j]$. Здесь $[A] = A+O(\rho^{-1})$ – общепринятое обозначение Биркгофа. Тогда для определителя Δ справедливо представление (1.6), в котором F_m заменены на $[F_m]$. Из теоремы Руше тогда получаем формулы (1.12) и (1.13) для нулей Δ, в которых нужно приписать величины $O(k^{-1})$. Предложение доказано.

1.2. Полезно дать другое определение регулярности для рассматриваемых операторов. Заметим, что T^2 является обыкновенным дифференциальным оператором (без инволюции), а его область определения задается равенством

$$\mathcal{D}(T^2) = \bigl\{y \in W^{2n,2}[-1,1] \mid U_j(y) = 0,\ U_j(y^{(n)}(-x)) = 0,\ j = 1,\dots,n\bigr\}. \tag{1.14}$$

Определение 2. Краевые условия (0.2) назовем *регулярными* для оператора L, если краевые условия в (1.14) регулярны по Биркгофу для дифференциального выражения $T^2(y) = y^{(2n)}$.

Лемма 1. *Определения регулярности* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. В обоих определениях участвуют только главные части U_j^0 функционалов U_j, которые представлены в виде (1.1). Поэтому, не ограничивая общности, считаем $U_j = U_j^0$. Функции $\{e^{\tau_s\rho x}\}_1^{2n}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y^{(2n)} = \rho^{2n}y$, поэтому характеристический определитель Θ оператора T_0^2 имеет вид

$$\Theta(\rho) = \begin{vmatrix} U_1^0(e^{\tau_1\rho x}) & \dots & U_1^0(e^{\tau_{2n}\rho x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{2n}^0(e^{\tau_1\rho x}) & \dots & U_{2n}^0(e^{\tau_{2n}\rho x}) \end{vmatrix}, \qquad U_{j+n}^0(y) = U_j^0(y^{(n)}(-x)), \quad j = 1,\dots,n.$$

Согласно (1.1) имеем

$$\begin{aligned} U_j^0(e^{\tau_s\rho x}) &= \rho^{\kappa_j}\tau_s^{\kappa_j}(\alpha_j e^{-\tau_s\rho} + \beta_j e^{\tau_s\rho}), && j = 1,\dots,n,\\ U_{j+n}^0(e^{\tau_s\rho x}) &= \rho^{\kappa_j+n}\tau_s^{\kappa_j+n}(-1)^{\kappa_j}(\beta_j e^{-\tau_s\rho} + \alpha_j e^{\tau_s\rho}), && j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в определитель Θ, получаем

$$\Theta(\rho) = \rho^{2\kappa+n^2}\sum_m R_m e^{\nu_m\rho}, \tag{1.15}$$

где R_m – числа (зависящие от α_j и β_j), а ν_m – всевозможные суммы различных $2n$ чисел из набора

$$\tau_1,\ \dots,\ \tau_{2n},\ -\tau_1,\ \dots,\ -\tau_{2n},$$

с тем ограничением, что в сумму входят числа либо со знаком $+$, либо со знаком минус. Индикаторной диаграммой целой функции Θ служит многоугольник $\mathcal{M}$, содержащий все точки ν_m. В частности, в числе этих точек имеются

$$\nu_1 = 2(\tau_1 + \dots + \tau_n), \qquad \nu_2 = 2(\tau_2 + \dots, +\tau_n + \tau_{n+1})$$

(здесь мы учитываем равенства $\tau_{j+n} = -\tau_j$). Нетрудно видеть, что точки ν_1 и ν_2 являются угловыми для $\mathcal{M}$, а определение регулярности по Биркгофу означает, что числа R_1 и R_2 (они выражаются, так же как числа F_1 и F_2 в форме некоторых определителей) не равны нулю. Заметим, что у Биркгофа [12], [13] и в книге Наймарка [14; гл. 1] определение дано в другой форме, но легко понять, что различна лишь форма. Кроме того, следует учесть, что здесь мы рассматриваем задачу на отрезке $[-1,1]$, а не на $[0,1]$, что вносит определенные изменения. Легко также видеть, что индикаторная диаграмма $\mathcal{M}$ есть $2n$-угольник, а в силу $2n$-кратной симметрии модули чисел R_1 и R_2 совпадают. Тем самым, регулярность по Биркгофу означает неравентсво нулю одного из чисел R_1 или R_2.

Теперь выразим определитель Θ по-другому. Положим

$$v_{j+n}(\rho,x) = v_j(e^{i\pi/n}\rho,x), \qquad j=1,\dots,n,$$

где v_j определены (1.3). Нетрудно видеть, что с точностью до нумерации

$$v_{j+n} = e^{\omega_j\rho x} + e^{-\omega_j\rho x}, \quad v_{j+n+l}(\rho,x) = e^{\theta_j\rho x} - e^{-\theta_j\rho x}, \qquad j=1,\dots,l.$$

При этом

$$v_j^{(n)}(-x) = -\rho^n v_j(x), \qquad j=n+1,\dots,2n. \tag{1.16}$$

Система $\{v_j\}_1^{2n}$ получается из $\{e^{\tau_s\rho x}\}_1^{2n}$ линейным обратимым преобразованием с независящими от ρ коэффициентами. Поэтому определитель Θ с точностью до постоянного множителя можно переписать в виде

$$\Theta(\rho) = \begin{vmatrix} U_1^0(v_1) & \dots & U_1^0(v_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^0(v_1) & \dots & U_n^0(v_{2n}) \\ U_1^0(v_1^{(n)}(-x)) & \dots & U_1^0(v_{2n}^{(n)}(-x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^0(v_1^{(n)}(-x)) & \dots & U_n^0(v_{2n}^{(n)}(-x)) \end{vmatrix}.$$

С учетом равенств $v_j^{(n)}(-x) = \rho^n v_j(x)$ и равенств (1.16) получаем

$$\Theta(\rho) = \rho^{n^2} \begin{vmatrix} U_1^0(v_1) & \dots & U_1^0(v_n) & U_1^0(v_{n+1}) & \dots & U_1^0(v_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^0(v_1) & \dots & U_n^0(v_n) & U_n^0(v_{n+1}) & \dots & U_n^0(v_{2n}) \\ U_1^0(v_1)) & \dots & U_1^0(v_n) & -U_1^0(v_{n+1}) & \dots & -U_1^0(v_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^0(v_1) & \dots & U_n^0(v_n) & -U_n^0(v_{n+1}) & \dots & -U_n^0(v_{2n}) \end{vmatrix}$$

$$= \rho^{n^2} \begin{vmatrix} 2U_1^0(v_1) & \dots & 2U_1^0(v_n) & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ 2U_n^0(v_1) & \dots & 2U_n(v_n) & & & \\ U_1^0(v_1) & \dots & U_1(v_n) & U_1(v_{n+1}) & \dots & U_n(v_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(v_1) & \dots & U_1(v_n) & U_n(v_{n+1}) & \dots & U_n(v_{2n}) \end{vmatrix} = 2^n\rho^{n^2}\Delta(\rho)\Delta(e^{i\pi/n}\rho).$$

Из этого равенства и представлений (1.15) и (1.6) получаем

$$\nu_1 = 2\mu_1, \quad R_1 = F_1 F_2.$$

Тем самым, неравенство нулю числа R_1 равносильно неравенству нулю обоих чисел F_1 и F_2. Это завершает доказательство леммы.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. На границе многоугольника M (индикаторной диаграммы функции Δ_0) находятся только угловые точки $\mu_1, \dots, \mu_{2n}$, все остальные точки μ_m находятся строго внутри M. Это не так для индикаторной диаграммы $\mathcal{M}$ функции Θ. На середине отрезка, соединяющего точки ν_1 и ν_2, находится точка

$$\nu_{2n+1} := 2(\tau_2 + \dots + \tau_n)$$

(еще раз обращаем внимание, что точка $\tau_2 + \dots + \tau_n$ в представлении (1.6) не участвует). Коэффициент R_{2n+1} при экспоненте $e^{\nu_{2n+1}\rho}$ играет важную роль. Если

$$R_{2n+1}^2 \neq 4R_1R_2,$$

то нули функции Θ, расположенные в полуполосе, содержащей положительную полуось, распадаются на две серии и асимптотически отделены друг от друга (кружки достаточно малого фиксированного радиуса с центрами в нулях не пересекаются). Этот случай называют сильно регулярным. При

$$R_{2n+1}^2 = 4R_1R_2$$

две серии нулей сливаются (см. детали в [14; гл. 1]). При изучении задачи о базисности корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов эти случаи существенно различны. В первом случае справедлива теорема о безусловной базисности корневых функций, а во втором – о безусловной базисности со скобками (см. детали в [15]).

1.3. Отметим изменения, которые надо сделать при нечетном $n = 2l+1$. Обозначим через $\{\tau_s\}_1^{2n}$ корни уравнения $\tau^{2n} = i$, через $\{\omega_s\}_1^n$ корни уравнения $\omega^n = i$. Обе последовательности занумеруем против часовой стрелки, полагая $\tau_1 = \omega_1$ и начиная нумерацию так, чтобы первые $n+1$ корней $\{\tau_s\}_1^{n+1}$ находились в замкнутой правой полуплоскости. А именно, положим $\tau_1 = -i$, если $n = 3 \pmod 4$ и $\tau_1 = -ie^{3\pi i/4n}$, если $n = 1 \pmod 4$. Оставшиеся корни $\{\tau_s\}_{n+2}^{2n}$ лежат в открытой левой полуплоскости. Заметим, что функции

$$v_s = e^{\omega_s \rho x} + ie^{-\omega_s \rho x}, \qquad s = 1, \dots, n, \tag{1.17}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения $v^{(n)}(-x) = \rho^n v(x)$. Для уравнения $v^{(n)}(-x) = -\rho^n v(x)$ фундаментальную систему составляют функции

$$v_{s+n} = e^{\omega_s \rho x} - ie^{-\omega_s \rho x}, \qquad s = 1, \dots, n, \tag{1.18}$$

причем, с точностью до нумерации справедливы равенства

$$v_{s+n}(\rho, x) = v_s(e^{i\pi/n}\rho, x), \qquad s = 1, \dots, n.$$

Выписывая характеристический определитель Δ_0 для задачи (1.2) с помощью системы (1.17), получим представление (1.6), в котором числа μ_m являются всевозможными суммами n чисел из набора $\omega_1, \ldots, \omega_n, -\omega_1, \ldots, -\omega_n$ (как и ранее, не допускается одновременное вхождение в суммы чисел ω_j и $-\omega_j$). Этот набор чисел с точностью до нумерации совпадает с набором $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2n}$. Учитывая нумерацию корней τ_s, получаем, что точки

$$\mu_1 = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \qquad \mu_2 = \tau_2 + \cdots + \tau_{n+1}$$

являются угловыми точками индикаторной диаграммы M целой функции Δ_0. Определение регулярности в случае нечетного $n = 2k+1$ оставляем прежним: *регулярность означает отличие от нуля коэффициентов F_1 и F_2 при экспонентах $e^{\mu_1\rho}$ и $e^{\mu_2\rho}$ соответственно.*

Утверждение леммы 1 остается верным: *регулярность в смысле определения 1 эквивалентна регулярности по Биркгофу для оператора T_0^2* или T^2. Доказательство остается прежним: определитель Θ, построенный для задачи $T_0 y = \rho^{2n} y$ с помощью фундаментальной системы $\{e^{\tau_s \rho x}\}_1^{2n}$ с точностью до постоянного множителя совпадает с $\rho^{n^2}\Delta_0(\rho)\Delta_0(e^{i\pi/n}\rho)$. После умножения получаем, что на границе индикаторной диаграммы функции Θ имеются только угловые точки

$$\mu_j = \tau_j + \cdots + \tau_{j+n}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n,$$

при этом $R_2 = F_2 F_3$. С учетом равенства $|F_1| = |F_3|$ получаем утверждение леммы 1.

Замечание 1. Утверждение предложения 1 об асимптотике собственных значений для нечетного n сохраняется в прежнем виде.

2. Основные результаты

Для доказательства основных теорем нам потребуются результаты из теории возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Все определения используемых далее понятий, если они не приводятся, можно найти в статье [16]. Через C, C_1 далее обозначаются различные постоянные, не зависящие от переменных величин, участвующих в оценках.

Оператор T будем называть *спектральным*, если его собственные значения, кроме быть может конечного числа, полупростые (т.е. геометрическая кратность совпадает с алгебраической), а его корневые векторы образуют безусловный базис в пространстве H, где действует оператор. В дальнейшем результаты не зависят от конечномерных и даже от ограниченных возмущений. Изменяя T на конечномерном инвариантном подпространстве, можно "убрать" присоединенные векторы. Поэтому, не ограничивая общности, для упрощения записи далее считаем, что все собственные значения спектрального оператора T полупростые.

Отметим, что класс рассматриваемых нами спектральных операторов входит в класс спектральных операторов по Данфорду [17]. Возможно (для случая операторов с дискретным спектром) наш класс не совпадает с классом Данфорда. Но для наших целей введенное понятие оправдано и позволяет избежать существенных технических сложностей.

Согласно теореме Бари [18; гл. 6] в гильбертовом пространстве H существует новое, эквивалентное исходному скалярное произведение $(\,\cdot\,)_1$, в котором спектральный оператор T представим в виде

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\,\cdot\,, \varphi_j)_1 \varphi_j, \tag{2.1}$$

где $\{\varphi_j\}_1^\infty$ – ортонормированный в новом скалярном произведении базис из собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ_j оператора T.

Будем говорить, что T имеет порядок α, если его собственные значения подчинены оценке

$$|\lambda_j| \geqslant C j^{\alpha}, \qquad j = 1, 2, \dots . \tag{2.2}$$

Оператор B называется *p-подчиненным* оператору T, если $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(T)$ и найдутся постоянные b, M, при которых выполнена оценка

$$\|Bx\| \leqslant b\|Tx\|^p \|x\|^{1-p} + M\|x\| \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

В этом определении предполагается, что $0 \leqslant p < 1$.

Теорема 1. *Пусть T – спектральный оператор, его порядок равен α, а его спектр, кроме быть может конечного числа собственных значений, лежит внутри двойной параболы (полосы при $p = 0$)*

$$\Pi_p = \{\lambda = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \sigma \in \mathbb{R},\, |\tau| \leqslant h|\sigma|^p\}, \qquad h = \mathrm{const}. \tag{2.3}$$

Если оператор B является p-подчиненным оператору T и выполнено условие $\alpha^{-1} \leqslant 1 - p$, то спектр оператора $T + B$ дискретный и его корневые векторы образуют безусловный базис со скобками. Если дополнительно выполняется условие сильной отделенности собственных значений

$$|\lambda_{j+1}(T) - \lambda_j(T)| j^{-\alpha p} \to \infty \qquad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{2.4}$$

то оператор $T + B$ спектральный и его собственные значения асимптотически простые.

Доказательство. В случае $T = T^*$ эта теорема доказана Маркусом и Мацаевым [19] (более общие результаты имеются в [16], [20]). Согласно (2.1) оператор T представим в виде суммы $T_r + T_i$, где

$$T_r = \sum \sigma_j(\,\cdot\,, \varphi_j)_1 \varphi_j, \quad T_i = \sum \tau_j(,\cdot, \varphi_j)_1 \varphi_j, \qquad \sigma_j = \operatorname{Re}\lambda_j, \quad \tau_j = \operatorname{Im}\lambda_j.$$

Тогда $T_r = T_r^*$ в новом скалярном произведении. Докажем, что T_i p-подчинен оператору T_r. Фиксируем элемент $x \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_r)$ и обозначим $c_j = (x, \varphi_j)_1$. Тогда, предполагая, что норма порождается новым скалярным произведением, получаем

$$\begin{aligned}\|T_i x\|^2 &= \sum \tau_j^2 |c_j|^2 \leqslant h^2 \sum \Bigl(|\sigma_j^{2p}|c_j|^{2p}\Bigr)|c_j|^{2-2p} \\ &\leqslant h^2 \Bigl(\sum (\sigma_j |c_j|)^2\Bigr)^p \Bigl(\sum |c_j|^2\Bigr)^{1-p} = h^2 \|T_r x\|^{2p} \|x\|^{2-2p}.\end{aligned}$$

Здесь при переходе ко второму неравенству мы воспользовались неравенством Гёльдера с показателями $p' = 1/p$, $q' = 1/(1-p)$. Так как мнимые координаты собственных значений оцениваются через вещественные, имеем оценку $\|Tx\| \leqslant C\|T_r x\|$, а потому оператор B также p-подчинен оператору T_r, порядок которого тоже равен α. Таким образом мы пришли к представлению

$$T + B = T_r + (T_i + B),$$

где T_r самосопряжен, а $T_i + B$ p-подчинен оператору T_r, а потому можем воспользоваться теоремой Маркуса–Мацаева.

Остается доказать второе утверждение теоремы, которое существенно проще, нежели первое. Сначала отметим, что нумерация собственных значений невозмущенного оператора T предполагается с учетом геометрической кратности, поэтому условие (2.4) подразумевает асимптотическую простоту собственных значений $\lambda_j(T)$ и влечет условие $p \leqslant 1 - \alpha^{-1}$. Далее, из доказательства теоремы 6.6 из [16] легко проследить, что в скобки нужно объединять только сближающиеся собственные значения возмущенного оператора (см. [16; Замечание 6.7]). Условие (2.4) эквивалентно асимптотической оценке

$$|\lambda_{j+1}(T) - \lambda_j(T)| \geqslant Cj^{\alpha p}$$

при сколь угодно большом C, а тогда для p-подчиненных возмущений выполняется оценка

$$|\lambda_j(T + B) - \lambda_j(T)| \leqslant C_1 j^{\alpha p}$$

при некотором фиксированном C_1. Поэтому условие (2.4) не позволяет далеким собственным значениям возмущенного оператора сближаться и в скобках остаются только одномерные проекторы. Отметим, что при $p = 0$ и $T = T^*$ второе утверждение теоремы имеется в книге [21]. Этим закончим доказательство.

Теорема 2. *В случае регулярных краевых условий оператор $T = JP_0$ спектральный, а его спектр лежит внутри области вида* (2.3) *при $p = (n-1)/n$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что собственные значения $\lambda_j = \rho_j^n$ оператора T асимптотически простые. Согласно предложению 1 и замечанию 1 они лежат внутри двойной параболы при $p = (n-1)/n$ и некотором $h > 0$. Остается доказать, что корневые функции оператора образуют безусловный базис. Подробное доказательство этого результата мы здесь проводить не будем (оно занимает много места) и ограничимся объяснением, как его провести.

Существование в явном виде фундаментальной системы решений уравнения

$$y^{(n)}(-x) = \rho^n y(x)$$

позволяет в явном виде построить функцию Грина резольвенты $(T - \rho^n)^{-1}$. Более того, используя приемы работы [10], можно получить представление для функции G точно такого же вида, как в лемме 3.3 работы [10]. Из этого представления, повторяя рассуждения [10], легко получить, что корневые функции оператора T образуют безусловный базис. Этим объяснением мы ограничимся.

Независимое доказательство теоремы 2, более простое в техническом отношении, при дополнительном условии сильной регулярности оператора T^2 или T_0^2 (вместо обычной регулярности) мы дадим позже. Это дополнительное условие не будет существенным при доказательстве следующей основной теоремы настоящей статьи.

Теорема 3. *Пусть $n > m$ и краевые условия (0.2) регулярны в смысле определения 1 или 2. Тогда корневые функции оператора L, определенного (0.1) и (0.2), образуют безусловный базис со скобками в пространстве $L_2(-1, 1)$. Если порядок дифференциального выражения Q меньше $n - 1$, а коэффициент p_1 в дифференциальном выражении P равен нулю, то оператор L является спектральным.*

Доказательство. В силу предложения 1 и замечания 1 порядок оператора T равен n (в смысле определения (2.2) для общих спектральных операторов). В силу теорем 1 и 2 достаточно доказать, что оператор $B = L - T$ является p-подчиненным оператору T при $p = (n - 1)/n$. Из асимптотических формул для собственных значений оператора T следует, что порядок оператора T^2 равен $2n$, а его собственные значения, исключая быть может конечное число, лежат в правой полуплоскости внутри области Π_p при $p = (2n - 1)/2n$. Не ограничивая общности, считаем, что нуль не является собственным значением оператора T. Тогда всякий луч из левой полуплоскости, не проходящий через собственные значения, является лучом наилучшего убывания резольвенты, а именно,

$$\|(T^2 - \lambda)^{-1}\| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1}$$

(см., например, [22]). Это позволяет определить дробные степени оператора T^2. При этом, согласно [22], [23], для областей определения операторов $(T^2)^\alpha$ при $\alpha = s/2n$, $s = 1, 2, \dots, 2n$, справедливы равенства $\mathcal{D}((T^2)^{s/2n}) = W_U^{s,2}$, где $W_U^{s,2}$ – подпространство в пространстве Соболева $W^{s,2}$, состоящее из функций $y \in W^{s,2}$, подчиненных всем краевым условиям (1.14), порядок которых $< s$. Кроме того, дробные степени $(T^2)^\alpha$ суть замкнутые обратимые операторы, а потому отображения $(T^2)^{s/2n}\colon W_U^{s,2} \to L_2$ являются ограниченными биекциями.

Обозначим $E := W_U^{(n-1)/n,2}$, $H = L_2$. Так как оператор

$$B = L - T\colon W_U^{(n-1)/n,2} \to L_2$$

ограничен (здесь мы используем существенную ограниченность коэффициентов p_j и q_j дифференциальных выражений), то для функций $x = x(t) \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(L)$ имеем оценки

$$\begin{aligned}\|Bx\|_H \leqslant C\|x\|_E \leqslant C_1\|(T^2)^{(n-1)/2n}x\|_H = C_1\|S^{(n-1)/n}x\|_H \\ \leqslant C_1\|Sx\|^{(n-1)/n}\|x\|^{1-(n-1)/n},\end{aligned}$$

где $S = (T^2)^{1/2}$. Здесь мы использовали мультипликативное свойство $(S^2)^{(n-1)/2n} = S^{(n-1)/n}$, а при переходе к последнему неравенству использовали известное неравенство моментов для дробных степеней операторов (см., например, [24; § 14]). Уточним также, что $S \neq T$ (спектр T лежит в обеих полуплоскостях, а спектр S только в правой). Однако модули собственных значений операторов S и T совпадают. В силу теоремы 2 оператор T спектральный и для него справедливо представление (2.1), Поэтому $\|Tx\|_1 = \|Sx\|_1$, если норма $\|\cdot\|_1$ порождена новым скалярным произведением. Так как новая норма эквивалента прежней, то правая часть в последнем неравенстве оценивается величиной $C\|Tx\|^p\|x\|^{1-p}$, $p = (n - 1)/n$. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 1. Нужно лишь отметить, что в случае нулевых коэффициентов p_1 и q_0 порядок подчинения оператора B равен $(n - 2)/n$ и выполнены условия (2.4). Теорема доказана.

Теперь проведем независимое доказательство теоремы 2 при дополнительном условии сильной регулярности оператора T^2 или T_0^2. Для этого нужна следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть A – линейный оператор, действующий в гильбертовом (или банаховом) пространстве H, а λ^2 – изолированное собственное значение оператора A^2, Обозначим через $\mathcal{N}$ корневое подпространство оператора A^2, отвечающее собственному значению λ^2, а через $\mathcal{N}_\pm$ – корневые подпространства оператора A, отвечающие собственным значениям $\pm\lambda$ (одно из этих подпространств может быть нулевым). Тогда $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ \dot{+} \mathcal{N}_-$. Корневые подпространства операторов A и A^2, отвечающие нулевому собственному значению, также совпадают.*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. Для простоты предположим, что собственное значение λ^2 оператора A^2 имеет конечную кратность. Тогда существует $k \geqslant 1$ такое, что

$$\mathcal{N} = \ker(A^2 - \lambda^2)^k, \qquad \mathcal{N}_\pm = \ker(A \mp \lambda)^k.$$

Поэтому включение $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_+ \dot{+} \mathcal{N}_-$ очевидно в силу равенств

$$(A^2 - \lambda^2)^s x = (A \pm \lambda)^s (A \mp \lambda)^s x, \qquad x \in H.$$

Пусть $P_\pm$ и P – проекторы Рисса, которые отвечают за точки спектра $\pm\lambda$ и λ^2 операторов A и A^2 соответственно. Тогда $\mathcal{N}_\pm = P_\pm(H)$, $\mathcal{N} = P(H)$ и справедливы разложения (см. [18; гл. 1, § 1])

$$H = \mathcal{N}_\pm \dot{+} \mathcal{M}_\pm, \qquad H = \mathcal{N} \dot{+} \mathcal{M},$$

где $\mathcal{M}_\pm$ и $\mathcal{M}$ инвариантные подпространства операторов A и A^2, причем операторы $A \mp \lambda$ и $A^2 - \lambda^2$ обратимы на этих подпространствах соответственно. Так как оператор $A^2 - \lambda^2$ обратим на подпространстве $\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-$, то $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-$. Но $\mathcal{N}_+ \cap \mathcal{N}_- = \{0\}$ (так как $P_+ P_- = 0$), поэтому

$$H = \mathcal{N}_+ \dot{+} \mathcal{N}_- \dot{+} (\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-).$$

Это равенство вместе с равенством $H = \mathcal{N} \dot{+} \mathcal{M}$ и включением $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-$ влекут обратное включение $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_+ \dot{+} \mathcal{N}_-$.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Если, например, при четном $p = 2k$ элементы $x^0, x^1, \dots, x^p$ образуют цепочку собственного и присоединенных элементов (СПЭ), то элементы $x^0, x^2, \dots, x^p$ и $x^1, x^3, \dots, x^{p-1}$ образуют цепочки СПЭ оператора A^2. Поэтому $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_-$. Наоборот, если $0 \neq x \in \ker(A^2)^k$, то согласно определению элементы

$$A^{2k-1}x,\ A^{2k-2}x,\ \dots,\ Ax,\ x$$

образуют цепочку СПЭ оператора A. Следовательно, $x \in \mathcal{N}_+$, что влечет $\mathcal{N}_+ \supset \mathcal{N}$. Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Положим $\mathcal{N}^s = \ker(A^2 - \lambda^2)^s$, $\mathcal{N}_\pm^s = \ker(A \mp \lambda)^s$. Полезно иметь в виду, что при $\lambda \neq 0$ верно более сильное утверждение, нежели лемма 2. А именно, $\mathcal{N}^s = \mathcal{N}_+^s \dot{+} \mathcal{N}_-^s$ при всех $s \geqslant 1$. При $s = 0$ это равенство доказано в [25]. Отметим также, что лемма 2 доказана в теоремах 2 и 3 работы [5], но только при дополнительном условии, когда одно из подпространств $\mathcal{N}_+$ или $\mathcal{N}_-$ является нулевым.

С учетом леммы 2 сразу независимо получаем утверждение теоремы 2 при условии сильной регулярности краевых условий (0.2) для оператора T^2 вместо обычной регулярности. Действительно, известно (см. историю в [16; § 9]), что оператор T^2 в этом случае является спектральным в смысле нашего определения. Из леммы 2 тогда получаем, что тем же свойством обладает и оператор T.

Покажем, что условие сильной регулярности краевых условий для оператора T^2 можно не требовать, чтобы получить независимое доказательство теоремы 2. Рассмотрим оператор

$$L_\gamma = A^{-1}LA,$$

где A – оператор умножения на экспоненту $Ay = e^{\gamma x}y$, $\gamma = \mathrm{const}$. Базисные свойства подобных операторов одинаковы. Очевидно, справедливо представление

$$L_\gamma = T_\gamma + B,$$

где B порождается дифференциальным выражением порядка $n-1$ (это выражение отличается от $(L-T)(y)$, но оно имеет тот же вид). Оператор T_γ определяется равенством $T_\gamma y(x) = y^{(n)}(-x)$, таким же, как T, но его область определения порождается другими краевыми условиями

$$U_j(e^{\gamma x}y(x)) = 0, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Область определения оператора T_γ^2 вместе с условиями (2.5) задают краевые условия $U_j(T_\gamma(e^{\gamma x}y(x))) = 0$, $j = 1, \dots, n$. В заметке [15] показано, что если краевые условия для оператора T_0^2 регулярны, то найдутся числа γ, при которых соответствующие модифицированные краевые условия для оператора T_γ^2 сильно регулярны. В нашем случае это также имеет место. Остается повторить ход доказательства теоремы 2 для оператора L_γ.

3. Случай $m > n$. Нерегулярные краевые условия

Случай $m > n$ значительно проще. Для доказательства теоремы о базисности не нужно вводить новых понятий регулярности оператора.

Теорема 4. *Если краевые условия* (0.2) *регулярны по Биркгофу для оператора* $Q_0y(x) = y^{(m)}(x)$, *то корневые функции оператора* L *образуют безусловный базис со скобками в пространстве* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Пользуясь результатом [15] найдем число γ, при котором условия (2.5), порождающие область определения оператора $L_\gamma = e^{-\gamma x}Le^{\gamma x}$, являются сильно регулярными. Тогда $L_\gamma = Q_\gamma + B$, где оператор $Q_\gamma y = y^{(m)}$ порождается сильно регулярными краевыми условиями, а B порождается дифференциальным выражением порядка $n-1$. В этом случае Q_γ спектральный оператор и, повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 2, с помощью теоремы 1 получаем утверждение о безусловной базисности со скобками корневых функций операторов L_γ и L.

Для нерегулярных краевых условий мы можем рассматривать только операторы вида $L = JP$, полагая $Q = 0$. В этом случае мы должны также предположить, что коэффициенты p_k в дифференциальном выражении $P(y)$ являются достаточно гладкими, такими, чтобы корректно был определен оператор $L^2 = (JP)^2$, который порождается обыкновенным дифференциальным выражением без инволюции. Для него корректно определены классы почти регулярных и нормальных краевых условий в смысле работы [10]. Тогда с учетом результатов [10] и леммы 2 получаем теоремы о полноте и почти базисности корнвых функций оператора L. Они сформулированы в [1] и повторять их здесь мы не будем.

4. Оператор второго порядка

Проиллюстрируем полученные результаты для оператора L второго порядка

$$Ly = -y''(-x) + p_1(x)y'(-x) + p_2(x)y(-x) + q_1(x)y'(x) + q_2(x)y(x) = \rho^2 y(x), \quad (4.1)$$

$$U_j(y) = \alpha_{j1}y(-1) + \alpha_{j2}y'(-1) + \beta_{j1}y(1) + \beta_{j2}y'(1) = 0, \qquad j = 1, 2. \quad (4.2)$$

В случае $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 \equiv 0$ (когда $L = T$) эта задача изучалась в работах [4] (для условий Коши) и в [5], [7] (для общих условий (4.2)).

Составим матрицу из коэффициентов краевых условий

$$U = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

и обозначим через $J_{js} = -J_{sj}$ миноры этой матрицы, составленные из j-го и s-го столбцов. Очевидно, суммарный порядок краевых условий (4.2) может быть равным 0, 1 или 2. Он равен 0 в том и только в том случае, когда краевые условия эквивалентны условиям Дирихле, т.е. $J_{13} \neq 0$, а все остальные миноры равны 0. Суммарный порядок равен 2, если $J_{24} \neq 0$. В случае $J_{24} = 0$ суммарный порядок κ нормированных краевых условий равен 1, исключая случай условий Дирихле. Главная часть краевых условий в случае $\kappa = 1$ задается функционалами

$$U_1^0(y) = \alpha_1 y(-1) + \beta_1 y(1), \qquad U_2^0(y) = \alpha_2 y'(-1) + \beta_2 y'(1).$$

Поэтому для определения регулярности краевых условий в случае $\kappa = 1$ можно работать с матрицей

$$U^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

вместо матрицы U.

Фундаментальная система решений уравнения $-y''(-x) = \rho^2 y$ имеет вид $v_1 = \operatorname{sh}\rho x$, $v_2 = \cos\rho x$ (здесь знак “$+$” в уравнении заменен на “$-$”, поэтому ранее определенные функции v_1, v_2 и v_3, v_4 меняются ролями). Подставляя указанные функции в характеристический определитель Δ для задачи $-y''(-x) = \rho^2 y$ с краевыми условиями (4.2), после несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) &= \begin{vmatrix} U_1(v_1) & U_1(v_2) \\ U_2(v_1) & U_2(v_2) \end{vmatrix} \\ &= e^{\rho(1+i)}(-2i\rho^2 J_{42} - i\rho a + \rho b + 2J_{31}) + e^{\rho(1-i)}(2i\rho^2 J_{42} + i\rho a + \rho b + 2J_{31}) \\ &\quad + e^{-\rho(1-i)}(-2i\rho^2 J_{42} + i\rho a + \rho b - 2J_{31}) + e^{-\rho(1+i)}(2i\rho^2 J_{42} - i\rho a + \rho b - 2J_{31}),\end{aligned}$$

где

$$a := J_{21} + J_{14} + J_{32} + J_{43}, \qquad b := J_{21} - J_{14} - J_{32} + J_{43}. \quad (4.3)$$

Согласно определению 1 задача (4.1), (4.2) регулярна, если порядок нормированных краевых условий равен 0 или 2. Если порядок краевых условий равен 1, то старшие коэффициенты в полиномах первой степени при экспонентах, отвечающим угловым точкам $\mu_1 = 1 - i$ и $\mu_2 = 1 + i$, равны $-ia + b$ и $ia + b$ соответственно. Следовательно, в этом случае задача регулярна, если и только если

$$(-ia + b)(ia + b) \neq 0.$$

Во всех остальных случаях регулярности нет. В работе [5] дано другое определение регулярности краевых условий, которое не совпадает с нашим. Трудно понять причину несоответствия, так как в [5] не приводятся аргументы, поясняющие существо дела. В любом случае, определение [5] подлежит коррекции.

Из теоремы 3 получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть краевые условия* (4.2) *таковы, что выполнено одно из условий*:

1) *они эквивалентны условиям Дирихле*;
2) *минор J_{24} отличен от нуля*;
3) *число $(-ia + b)(ia + b)$ отлично от нуля, где a, b определены в* (4.3).

Тогда корневые функции задачи (4.1), (4.2) *образуют безусловный базис со скобками, а в случае нулевых коэффициентов p_1 и q_1 безусловный базис без скобок.*

В случае нулевых коэффициентов p_j, q_j несложно показать, что выполнение одного из условий 1)–3) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы оператор L был спектральным. Это получается прямым вычислением асимптотических формул для собственных функций и последующего анализа этих формул. Можно провести дальнейщую классификацию нерегулярных краевых условий в случае $q_1 = q_2 \equiv 0$ (см. [1]). Но в этой заметке мы не будем заниматься этими задачами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов, “Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией”, *Докл. АН*, **484**:1 (2019), 12–17.

[2] A. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. M. Sarsenbi, “Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution”, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012** (2012), Art. ID 590781.

[3] В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, “О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения”, *Дифференц. уравнения*, **44**:2 (2008), 196–204.

[4] Т. Ш. Кальменов, У. А. Искакова, “Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа”, *Докл. АН*, **414**:2 (2007), 168–171.

[5] А. М. Сарсенби, “Безусловные базисы, связанные с неклассическим дифференциальным оператором второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **46**:4 (2010), 506–511.

[6] A. Kopzhassarova, A. Sarsenbi, “Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution”, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012** (2012), Art. ID 576843.

[7] М. А. Садыбеков, А. М. Сарсенби, “Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией”, *Дифференц. уравнения*, **48**:8 (2012), 1126–1132.

[8] В. П. Курдюмов, “О базисах Рисса из собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и интегральными краевыми условиями”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **15**:4 (2015), 392–405.

[9] Л. В. Крицков, А. М. Сарсенби, "Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией", *Дифференц. уравнения*, **51**:8 (2015), 990–996.

[10] А. А. Шкаликов, "Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (2007), 190–229.

[11] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[12] G. D. Birkhoff, "On the asymptotic character of the solution of certain linear differential equations containing a parameter", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**:2 (1908), 219–231.

[13] G. D. Birkhoff, "Boundary value and expansion problem of ordinary linear differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**:4 (1908), 373–395.

[14] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

[15] А. А. Шкаликов, "О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора", *УМН*, **34**:5 (209) (1979), 235–236.

[16] А. А. Шкаликов, "Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром", *УМН*, **71**:5 (431) (2016), 113–174.

[17] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 3. *Спектральные операторы*, Мир, М., 1974.

[18] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

[19] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986.

[20] А. К. Мотовилов, А. А. Шкаликов, "Сохранение свойства безусловной базисности при несамосопряженных возмущениях самосопряженных операторов", *Функц. анализ и его прил.*, **53**:3 (2019), 45–60.

[21] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[22] И. Д. Евзеров, П. Е. Соболевский, "Дробные степени обыкновенных дифференциальных операторов", *Дифференц. уравнения*, **9**:2 (1973), 228–240.

[23] И. Д. Евзеров, "Области определения дробных степеней обыкновенных дифференциальных операторов в пространствах L_p", *Матем. заметки*, **21**:4 (1977), 509–518.

[24] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.

[25] Д. В. Трещев, А. А. Шкаликов, "О гамильтоновости линейных динамических систем в гильбертовом пространстве", *Матем. заметки*, **101**:6 (2017), 911–918.

В. Е. Владыкина
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: vladykina@cosmos.msu.ru

Поступило
21.05.2019
Принято к публикации
19.06.2019

А. А. Шкаликов
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: shkalikov@mi-ras.ru