



Общероссийский математический портал

В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров, Конечные однородные подпространства евклидовых пространств, *Матем. тр.*, 2021, том 24, номер 1, 3–34

DOI: 10.33048/mattrudy.2021.24.101

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

24 января 2025 г., 16:13:26



# КОНЕЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

*В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров*

Работа посвящена изучению метрических свойств правильных и полуправильных многогранников в евклидовых пространствах. В первой части мы доказываем, что каждый правильный многогранник размерности  $\geq 4$ , отличный от 120-ячейника в  $\mathbb{E}^4$ , таков, что множество его вершин является однородным по Клиффорду — Вольфу конечным метрическим пространством. Вторая часть работы посвящена исследованию специальных свойств архимедовых тел. В частности, для каждого архимедова тела приводится его описание как выпуклой оболочки орбиты подходящей точки правильного тетраэдра, куба или додекаэдра под действием соответствующей группы изометрий.

*Ключевые слова и фразы:* архимедово тело, конечное нормальное однородное метрическое пространство, конечное однородное метрическое пространство, конечное однородное по Клиффорду — Вольфу метрическое пространство, платоново тело, полуправильный многогранник, правильный многогранник.

## §1. Введение и основные результаты

В статье [2] вводились и рассматривались класс конечных однородных метрических пространств, его подклассы нормальных, обобщенных нормальных и сильно обобщенных нормальных однородных пространств, однородных по Клиффорду — Вольфу пространств и соотношения между этими классами. Подобные классы изучались для римановых многообразий в [3; 4; 12–14].

Конечные однородные метрические подпространства евклидовых пространств представляют собой множества вершин компактных выпуклых (в том числе правильных и полуправильных [5; 6; 10; 16–18; 21; 25]) многогранников с транзитивной на множестве вершин группой изометрий;

---

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-6066).

в каждом случае все вершины лежат на сфере. В [2] исследованы правильные и полуправильные многогранники в трехмерном евклидовом пространстве, а также гиперкубы, их двойственные многогранники и правильные симплексы в евклидовых пространствах произвольной размерности.

Для описания основных результатов настоящей работы мы приведем необходимые определения и некоторые результаты нашей работы [2].

**Определение 1.** Конечное метрическое пространство  $(M, d)$  называется *однородным*, если для любых точек  $x, y \in M$  существует изометрия  $f$  пространства  $(M, d)$  на себя такая, что  $f(x) = y$ .

**Определение 2.** Конечное однородное метрическое пространство  $(M, d)$  называется *нормальным однородным*, если для группы  $G$  его изометрий и ее стабилизатора  $H$  некоторой точки  $x \in M$  существуют транзитивная на  $M$  подгруппа  $\Gamma$  группы  $G$  и биинвариантная метрика  $\sigma$  на  $\Gamma$  такие, что каноническая проекция  $\pi : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (\Gamma/(\Gamma \cap H), d) = (M, d)$  — субметрия [11].

**Определение 3.** Конечное метрическое пространство  $(M, d)$  называется *обобщенным нормальным однородным*, если для любых точек  $x, y \in M$  существует изометрия  $f$  пространства  $(M, d)$  на себя такая, что  $f(x) = y$  и  $d(x, f(x)) \geq d(z, f(z))$  для любых  $z \in M$ .

**Определение 4.** Конечное метрическое пространство  $(M, d)$  называется *однородным по Клиффорду — Вольфу* (кратко *КВ-однородным*), если для любых точек  $x, y \in M$  существует изометрия  $f$  пространства  $(M, d)$  на себя такая, что  $f(x) = y$  и  $d(x, f(x)) = d(z, f(z))$  для любых  $z \in M$ .

Пусть FCWHS, FGNHS, FNHS и FHS обозначают соответственно классы конечных КВ-однородных пространств, конечных обобщенных нормальных однородных пространств, конечных нормальных однородных пространств и конечных однородных пространств. Тогда имеют место следующие включения и равенство (теорема 1 в [2]):

$$\text{FCWHS} \subset \text{FGNHS} = \text{FNHS} \subset \text{FHS},$$

при этом указанные включения строгие. Подчеркнем, что свойства нормальной однородности и обобщенной нормальной однородности для конечных метрических пространств равносильны (что не так, скажем, в случае римановых многообразий [4]).

В этой статье будут исследованы правильные и полуправильные многогранники в многомерных евклидовых пространствах. Основным результатом настоящей работы следующий.

**Теорема 1.** Множество вершин  $M$  каждого правильного многогранника размерности  $n \geq 4$  с индуцированной из  $\mathbb{E}^n$  метрикой  $d$  является однородным по Клиффорду — Вольфу, за исключением 120-ячейника в  $\mathbb{E}^4$ , множество вершин которого не является даже нормальным однородным.

Очевидно, что вершины одномерного многогранника (отрезка) и вершины каждого правильного двумерного многогранника (правильного многоугольника) образуют однородные по Клиффорду — Вольфу метрические пространства. В трехмерном случае мы имеем более любопытную ситуацию. Множество вершин тетраэдра, куба или октаэдра в трехмерном евклидовом пространстве образуют однородные по Клиффорду — Вольфу метрические пространства (см. предложение 2). При этом множество вершин икосаэдра образует нормальное однородное, но не однородное по Клиффорду — Вольфу метрическое пространство, а множество вершин додекаэдра образует метрическое пространство, не являющееся даже нормальным однородным (см. теоремы 7 и 8 в [2]).

Классификации и описанию свойств правильных многогранников в евклидовых пространствах посвящены §2 и 3. В конце §3 приводится доказательство теоремы 1, которое предваряется довольно обстоятельным изложением теории правильных многогранников в четырехмерном евклидовом пространстве.

Вторая часть статьи посвящена изучению специальных свойств архимедовых тел. Свойства полуправильных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве обсуждаются в §4. В следующих двух параграфах для каждого архимедова тела мы приводим его описание как выпуклой оболочки орбиты подходящей точки некоторого платонова тела (а именно, правильного тетраэдра, куба или додекаэдра) под действием его группы изометрий. Такого рода описание может быть полезно при исследовании метрических свойств полуправильных многогранников в евклидовых пространствах большей размерности.

В заключительном параграфе мы собрали некоторые дополнения, необходимые для конструкций и доказательств в основной части статьи.

Пользуясь случаем, отметим неточности в двух (не ключевых) результатах из нашей работы [2].

В предложении 6 из [2] последнее предложение должно иметь следующий вид:

«При нечетном  $n$  нужную подстановку можно выбрать так, что порождаемая ею группа содержится в  $SO(n)$ ».

Верная версия теоремы 11 в [2] такова:

«Множества вершин ромбокубооктаэдра, ромбоикосододекаэдра, курносых куба и додекаэдра и усеченных тетраэдра, октаэдра, куба и икосаэдра допускают просто транзитивные группы изометрий, являющиеся конечными подгруппами группы  $SO(3)$ . При этом соответствующие метрики на группах левоинвариантны, но не биинвариантны».

## §2. Правильные многогранники и их обобщения

Будем говорить, что  $n$ -мерный многогранник  $M$  в  $\mathbb{E}^n$  *однороден* (или *вершинно-транзитивен*), если его группа изометрий действует транзитивно на множестве его вершин. Далее,  $M$  называется *многогранником с правильными гранями* (соответственно *многогранником с конгруэнтными гранями*), если все его гиперграни являются правильными (соответственно конгруэнтными) многогранниками.

Одномерный многогранник — это замкнутый отрезок, ограниченный двумя конечными точками. Он является правильным по определению. Двумерными правильными многогранниками являются правильные многоугольники на евклидовой плоскости. Выпуклый  $n$ -мерный многогранник при  $n \geq 3$  называется *правильным*, если он однороден и все его гиперграни являются правильными конгруэнтными друг другу многогранниками. Такое определение эквивалентно другим определениям правильных выпуклых многогранников (см. [26]). Хорошо известно, что существуют всего пять правильных трехмерных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Эти многогранники традиционно называются *платоновыми телами* (см. рис. 1).

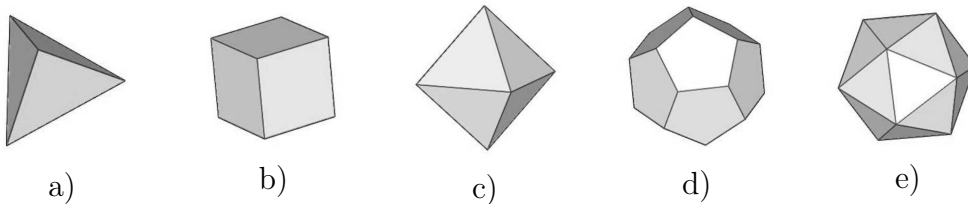


Рис. 1. Платоновы тела:

a) тетраэдр; b) куб; c) октаэдр; d) додекаэдр; e) икосаэдр.

Напомним также определение более широкого класса полуправильных выпуклых многогранников. При  $n = 1$  и  $n = 2$  полуправильные многогранники определяются как правильные. Выпуклый  $n$ -мерный многогранник при  $n \geq 3$  называется *полуправильным*, если он однороден и все его гиперграни являются правильными многогранниками.

В трехмерном пространстве (помимо платоновых тел) существуют следующие полуправильные многогранники: 13 *архимедовых тел* и две бесконечные серии прямых призм и антипризм.

Классификация правильных многогранников произвольной размерности приведена в книге [16]. Список полуправильных многогранников про-

извольной размерности был впервые приведен в работе Т. Госсета [20], доказательство полноты этого списка получено значительно позднее в [15]. Много дополнительной информации можно получить на сайте [27].

Обобщением класса полуправильных тел является класс равномерных многогранников. При  $n \leq 2$  равномерные многогранники определяются как правильные. Выпуклый  $n$ -мерный многогранник при  $n \geq 3$  называется *равномерным*, если он однороден и все его гиперграницы являются равномерными многогранниками. В частности, при  $n = 3$  классы равномерных и полуправильных многогранников совпадают, а при  $n = 4$  гиперграницы равномерного многогранника должны быть полуправильными трехмерными многогранниками. Этот класс многогранников далек от полной классификации (см. известные результаты в [19; 26]). Отметим следующий хорошо известный факт.

**Предложение 1.** *Все ребра произвольного равномерного многогранника имеют одну и ту же длину.*

*Доказательство.* Это утверждение очевидно для двумерных многогранников (правильных многоугольников на плоскости). Далее можно продолжить рассуждение по индукции. Гиперграницы каждого равномерного многогранника сами равномерны. Значит (по предположению индукции), все ребра, инцидентные одной грани, имеют равную длину. Кроме того, гиперграницы, имеющие общее ребро, имеют ребра равной длины. Следовательно, и все гиперграницы имеют ребра одной и той же длины.  $\square$

Мы кратко напомним классификацию правильных (выпуклых) многогранников в евклидовых пространствах. Каждый правильный  $n$ -мерный многогранник характеризуется символом Шлефли  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ , упорядоченным набором из  $(n - 1)$ -го натурального числа. *Вершинной фигурой*  $n$ -мерного правильного многогранника,  $n \geq 3$ , называется  $(n - 1)$ -мерный многогранник, являющийся выпуклой оболочкой вершин, имеющих общее ребро с заданной вершиной и отличных от нее. Грани размерности  $n - 1$  (гиперграницы)  $n$ -мерного многогранника принято называть *фасетами*. Отметим, что их называют также *ячейками* при  $n = 4$ .

Одномерный многогранник (замкнутый отрезок) является правильным и представляется символом Шлефли  $\{ \}$ . Двумерные правильные многогранники (многоугольники) имеют равные стороны и вписаны в окружность. Правильный  $p$ -угольник представляется символом Шлефли  $\{p\}$ .

В размерностях  $n \geq 3$  символ Шлефли можно определить индуктивно: для  $n$ -мерного многогранника  $M$  он равен  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ , где  $p_1$  — число сторон (произвольной) двумерной грани многогранника  $M$ , а  $\{p_2, \dots, p_{n-1}\}$  является символом Шлефли для вершинной фигуры многогранника  $M$ . Понятно, что гипергрань многогранника  $M$  имеет символ Шлефли  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-2}\}$ .

Следует отметить, что двойственный многогранник  $M^*$  к правильному многограннику  $M$  в  $\mathbb{E}^n$  также является правильным, при этом имеется естественная биекция между множеством  $k$ -мерных граней  $M$  и множеством  $(n - k - 1)$ -мерных граней многогранника  $M^*$  (более подробную информацию о двойственных многогранниках можно найти, например, в книге [21]). В частности, символ Шлефли многогранника  $M^*$  можно получить, записывая элементы символа Шлефли многогранника  $M$  в обратном порядке.

В трехмерном пространстве правильный многогранник с символом Шлефли  $\{m, n\}$  имеет правильные грани вида  $\{m\}$  и правильную вершинную фигуру  $\{n\}$ . Для правильных трехмерных многогранников вершинная фигура является многоугольником. Как уже отмечалось, существует всего пять правильных трехмерных многогранников (платоновых тел): тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр с символами Шлефли  $\{3, 3\}$ ,  $\{4, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{5, 3\}$  и  $\{3, 5\}$  соответственно (см. табл. 1).

**Таблица 1.** Правильные 3-мерные многогранники:

$V$  — количество вершин;  $E$  — количество ребер;  $F$  — количество двумерных граней;  $\alpha$  — двугранный угол;  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Многогранник	$V$	$E$	$F$	$\alpha$	Тип грани	Символ Шлефли
Тетраэдр	4	6	4	$2 \arcsin(1/\sqrt{3})$	$\triangle$	$\{3, 3\}$
Куб (гексаэдр)	8	12	6	$\pi/2$	$\square$	$\{4, 3\}$
Октаэдр	6	12	8	$2 \arcsin(\sqrt{2/3})$	$\triangle$	$\{3, 4\}$
Додекаэдр	20	30	12	$2 \arcsin(\sqrt{\varphi}/\sqrt[4]{5})$	$\pentagon$	$\{5, 3\}$
Икосаэдр	12	30	20	$2 \arcsin(\varphi/\sqrt{3})$	$\triangle$	$\{3, 5\}$

Получить соответствующий список нетрудно с помощью формулы Эйлера для многогранников. Символ Шлефли  $\{m, n\}$  обозначает конечный правильный многогранник  $M$  в трехмерном евклидовом пространстве с правильными  $m$ -угольниками в качестве граней и  $n$  гранями, исходящими из одной вершины. Понятно, что для невырожденных многогранников  $n \geq 3$  и  $m \geq 3$  (в случае диэдров  $n = 2$  и  $m \geq 3$  — любое число). Произведение  $n$  на величину внутреннего угла правильного  $m$ -угольника должно быть меньше  $2\pi$ . Следовательно, возможны только 5 вышеприведенных символов. То, что каждому символу соответствует реальный многогран-

ник, очевидно. На рис. 1 приведены сами эти многогранники, а на рис. 2 — их развертки. Отметим, что развертка тетраэдра имеет три оси зеркальной симметрии, развертка куба зеркально симметрична, в то время как все остальные развертки центрально симметричны.

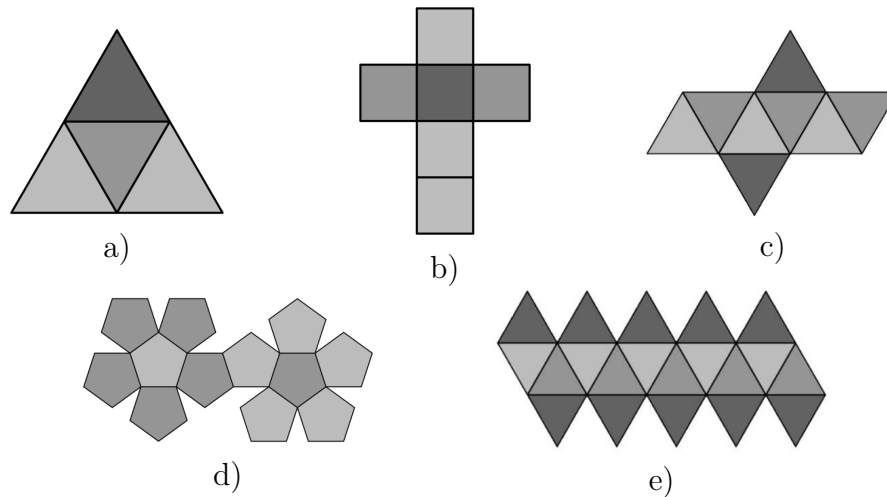


Рис. 2. Развертки:

a) тетраэдра; b) куба; c) октаэдра; d) додекаэдра; e) икосаэдра.

Существование и единственность (с точностью до подобия) указанных правильных многогранников следуют из теорем А. Д. Александрова о существовании и единственности (с точностью до изометрии) замкнутого выпуклого многогранника в  $\mathbb{E}^3$  с границей как поверхностью, склеиваемой из данной развертки, с  $V - E + F = 2$  и суммой примыкающих к каждой вершине плоских углов, меньшей  $2\pi$  [1].

Несложно найти количество вершин, ребер и граней каждого из платоновых тел. Нетрудно видеть, что верны равенства

$$F - E + V = 2, \quad E = \frac{mF}{2}, \quad V = \frac{mF}{n},$$

где  $F, E, V$  — число граней, ребер и вершин у  $M$  соответственно (первое равенство — известная формула Эйлера). Из этих равенств легко находят нужные величины:

$$V = \frac{4m}{4 - (m - 2)(n - 2)}, \quad E = \frac{2mn}{4 - (m - 2)(n - 2)}, \quad F = \frac{4n}{4 - (m - 2)(n - 2)}.$$

Они приведены в табл. 1 наряду с величиной двугранных углов для каждого платонова тела (соответствующие вычисления включены в п. 7.3). Отметим важное значение числа  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , известного как *золотое сечение*.



Правильные 4-мерные многогранники с символом Шлефли  $\{m, n, s\}$  имеют ячейки вида  $\{m, n\}$ , 2-грани вида  $\{m\}$ , реберные фигуры (*реберной фигурой* называется вершинная фигура вершинной фигуры)  $\{s\}$  и вершинные фигуры  $\{n, s\}$ .

Вершинная фигура правильного 4-мерного многогранника является правильным 3-мерным многогранником, являющимся выпуклой оболочкой вершин, имеющих общее ребро с заданной вершиной и отличных от нее. Реберной фигурой правильного 4-мерного многогранника всегда будет правильный многоугольник. Список четырехмерных правильных многогранников вместе с их важными характеристиками приведен в табл. 2; ниже мы наметим путь к получению их классификации. Более детально описанию структуры четырехмерных правильных многогранников посвящен § 3.

**Таблица 2.** Правильные 4-мерные многогранники:

$V$  – количество вершин;  $E$  – количество ребер;  $F$  – количество двумерных граней;  $C$  – количество ячеек (трехмерных граней)

Многогранник	$V$	$E$	$F$	$C$	Тип ячейки	Символ Шлефли
Гипертетраэдр или 5-ячейник	5	10	10	5	тетраэдр	$\{3, 3, 3\}$
Гиперкуб или 8-ячейник	16	32	24	8	куб	$\{4, 3, 3\}$
Гипероктаэдр или 16-ячейник	8	24	32	16	тетраэдр	$\{3, 3, 4\}$
24-ячейник	24	96	96	24	октаэдр	$\{3, 4, 3\}$
120-ячейник	600	1200	720	120	додекаэдр	$\{5, 3, 3\}$
600-ячейник	120	720	1200	600	тетраэдр	$\{3, 3, 5\}$

Зафиксируем некоторый правильный (выпуклый) многогранник  $K$  в  $\mathbb{E}^4$ , через  $N_k$  обозначим количество его  $k$ -мерных граней,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Каждая трехмерная грань (ячейка) является одним и тем же правильным трехмерным многогранником  $M$ , количество граней, ребер и вершин которого будем обозначать соответственно через  $F$ ,  $E$  и  $V$ . Предположим, что каждая вершина у  $K$  инцидентна  $l \geq 3$  ячейкам, а каждое ребро инцидентно  $k \geq 2$  ячейкам.

Ясно, что  $N_2 = N_3 F/2$ ,  $N_1 = N_3 E/k$ ,  $N_0 = N_3 V/l$ . При этом для характеристики Эйлера — Пуанкаре имеем

$$\chi(K) = N_3 - N_2 + N_1 - N_0 = N_3 - N_3 F/2 + N_3 E/k - N_3 V/l = 0$$

или  $1 - F/2 + E/k - V/l = 0$ , откуда вследствие  $V = 2 + E - F$  получаем

$$l = \frac{2kV}{2k - kF + 2E} = 2 + \frac{2(k - 2)E}{2k - kF + 2E}. \quad (1)$$

Вследствие выпуклости  $K$  заключаем, что  $k\alpha < 2\pi$ , где  $\alpha$  — двугранный угол многогранника  $M$ . Следовательно, в каждом из 5 случаев в табл. 1 (см. вычисления в п. 7.3) мы получаем следующие возможные значения  $k$ :

- 1)  $k = 2, 3, 4, 5$ , 2)  $k = 2, 3$ , 3)  $k = 2, 3$ , 4)  $k = 2, 3$ , 5)  $k = 2$ .

Легко видно, что при  $k = 2$  формула (1) всегда дает  $l = 2$ , что соответствует диэдру  $K$ . В табл. 3 приведены возможные значения  $l$ , полученные с использованием формулы (1) при  $k \geq 3$ .

**Таблица 3.** Возможные значения  $k \geq 3$  и  $l$

N	1a)	1b)	1c)	2)	3)	4)
$k$	3	4	5	3	3	3
$l$	4	8	20	4	6	4

Напомним, что символ Шлефли  $\{m, n, s\}$  для 4-многогранника  $K$  означает следующее:  $m$  — число вершин каждой двумерной грани  $K$ , а  $\{n, s\}$  — символ Шлефли правильного 3-многогранника  $S$ , являющегося выпуклой оболочкой всех вершин многогранника  $K$ , имеющих общее ребро с произвольно выбранной вершиной многогранника  $K$  и отличных от нее.

Ясно, что число  $l$  выше — это число граней для многогранника с символом Шлефли  $\{n, s\}$ . Таким образом, мы получаем следующее: 1a) гипертетраэдр  $\{3, 3, 3\}$ ; 1b) гипероктаэдр  $\{3, 3, 4\}$ ; 1c) 600-ячейник  $\{3, 3, 5\}$ ; 2) гиперкуб  $\{4, 3, 3\}$ ; 3) 24-ячейник  $\{3, 4, 3\}$ ; 4) 120-ячейник  $\{5, 3, 3\}$  (см. табл. 2).

В каждой из размерностей  $n \geq 5$  существует по три правильных многогранника (политопа):  $n$ -мерные симплекс, гиперкуб ( $n$ -куб) и гипероктаэдр ( $n$ -ортоплекс). Важные характеристики этих многогранников приведены в табл. 4.

**Таблица 4.** Правильные  $n$ -мерные многогранники при  $n \geq 5$ 

Многогранник	Символ Шлефли	Число $k$ -граней	Фасета	Вершинная фигура
$n$ -симплекс	$\{3, 3, \dots, 3, 3\}$	$C_{n+1}^{k+1}$	$\{3, 3, \dots, 3\}$	$\{3, \dots, 3, 3\}$
$n$ -куб	$\{4, 3, \dots, 3, 3\}$	$2^{n-k}C_n^k$	$\{4, 3, \dots, 3\}$	$\{3, \dots, 3, 3\}$
$n$ -ортоплекс	$\{3, 3, \dots, 3, 4\}$	$2^{k+1}C_n^{k+1}$	$\{3, 3, \dots, 3\}$	$\{3, \dots, 3, 4\}$

Отметим, что в любой размерности  $n$ -куб и  $n$ -ортоплекс являются двойственными друг другу, а  $n$ -симплекс самодвойственен. Кроме того, пары взаимно двойственных многогранников образуют додекаэдр и икосаэдр в  $\mathbb{E}^3$ , а также 120-ячейник и 600-ячейник в  $\mathbb{E}^4$ , в то время как 24-ячейник в  $\mathbb{E}^4$  является самодвойственным.

Для наших целей особое значение имеет следующее утверждение, непосредственно вытекающее из следствия 2 и следствия 4 в работе [2].

**Предложение 2.** Множества вершин  $n$ -мерных симплекса, гиперкуба ( $n$ -куба) и гипероктаэдра ( $n$ -ортоплекса) являются однородными по Клиффорду — Вольфу метрическими пространствами в  $\mathbb{E}^n$  для любого  $n \geq 1$ .

### §3. Правильные многогранники в размерности 4 и доказательство теоремы 1

Заметим, что порядок группы движений гиперкуба и гипероктаэдра равен  $4!2^4 = 24 \cdot 16 = 384$ , а порядок ее подгруппы сохраняющих ориентацию движений равен 192. Порядок группы движений симплекса равен  $5! = 24 \cdot 5 = 120$ , при этом порядок ее подгруппы сохраняющих ориентацию движений равен 60.

Нетрудно понять, что порядок собственных, т. е. сохраняющих ориентацию, движений каждого правильного многогранника в  $\mathbb{E}^3$  равен удвоенному числу  $E$  его ребер. Используя известные значения чисел  $E$ , находим, что порядки тетраэдральной  $T$ , октаэдральной  $O$  и икосаэдральной  $I$  групп движений равны соответственно  $2 \cdot 6 = 12$ ,  $2 \cdot 12 = 24$  и  $2 \cdot 30 = 60$ .

Напомним некоторые полезные факты о кватернионах. Для удобства отождествим тело кватернионов  $\mathbb{H}$  с  $\mathbb{R}^4$ , сопоставляя каждому кватерниону  $x = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$  вектор  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Если рассмотреть сопряженный кватернион  $x^* := x_1 - x_2\mathbf{i} - x_3\mathbf{j} - x_4\mathbf{k}$ , то норма  $\|x\| := \sqrt{x \cdot x^*}$  совпадает со стандартной нормой в  $\mathbb{R}^4$ . Единичная сфера  $S^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid \|x\| = 1\}$  яв-

ляется (мультипликативной) группой единичных кватернионов, изоморфной группе  $Sp(1) = SU(2) = Spin(3)$ . Умножение на любой единичный кватернион слева или справа является изометрией  $\mathbb{R}^4$  и  $S^3$ . Более того, для любого  $A \in SO(4)$  существуют такие единичные кватернионы  $\alpha$  и  $\beta$ , что  $A(x) = \alpha \cdot x \cdot \beta$ ,  $x \in \mathbb{H}$  (см., например, [8; 25]).

Аналогично, отождествляя  $\mathbb{R}^3$  с вещественной линейной оболочкой векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , каждое движение  $B \in SO(3)$  можно реализовать в виде  $B(q)(x) = q \cdot x \cdot q^{-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $q \in S^3$  [8; 25]. При этом  $B(q_1) = B(q_2)$  тогда и только тогда, когда  $q_2 = \pm q_1$ . Ясно, что формула  $p(q) = B(q)$ ,  $q \in S^3 = Sp(1)$ , задает двулистный универсальный накрывающий эпиморфизм группы Ли  $Sp(1)$  на группу Ли  $SO(3)$ . При этом прообразы  $BT = p^{-1}(T)$ ,  $BO = p^{-1}(O)$ ,  $BI = p^{-1}(I)$  групп  $T$ ,  $O$ ,  $I$  являются подгруппами группы  $Sp(1)$  порядка 24, 48, 120; они называются соответственно *бинарно тетраэдральной*, *бинарно октаэдральной* и *бинарно икосаэдральной группами*. Кроме того,  $BO$  и  $BI$  ( $\supset BT$ ) — максимальные конечные подгруппы в  $Sp(1)$  [7].

Вследствие сказанного естественно возникает подозрение, что выпуклые оболочки элементов групп  $BT$ ,  $BO$  и  $BI$  и являются оставшимися тремя правильными многогранниками в  $\mathbb{E}^4$  с символами Шлефли  $\{3, 4, 3\}$ ,  $\{5, 3, 3\}$  и  $\{3, 3, 5\}$ .

Отметим, что многогранник с символом Шлефли  $\{3, 4, 3\}$  действительно соответствует  $BT$ , а многогранник с символом  $\{3, 3, 5\}$  —  $BI$ . В то же время многогранник с символом  $\{5, 3, 3\}$  не порождается никакой конечной подгруппой из  $Sp(1)$  (это следует, например, из сопоставления предложения 1 и теоремы 1).

Следует заметить, что элементы конечной подгруппы  $G \subset S^3$  не обязательно являются вершинами правильного четырехмерного многогранника (см., например, описание группы  $BO$  ниже). Более подробное изложение всей приводимой ниже информации можно найти, например, в [17; 24].

Бинарно диэдральные группы  $BD_n$ ,  $n \geq 2$ , имеют следующее описание в терминах кватернионов:

$$BD_n = \left\{ \cos\left(\frac{\pi m}{n}\right) \mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) \mathbf{j}, \cos\left(\frac{\pi m}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) \mathbf{k} \mid 0 \leq m \leq 2n-1 \right\}.$$

*Бинарно тетраэдральная группа  $BT$*  представляется 24-мя кватернионами:

$$BT = \left\{ \pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}, \frac{1}{2}(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) \right\},$$

где знаки выбираются произвольно. Выпуклая оболочка этих 24 элементов в  $\mathbb{R}^4$  образует самодвойственный выпуклый правильный многогранник с символом  $\{3, 4, 3\}$ , называемый *24-ячейником*.

Отметим также, что множество кватернионов  $\{\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$  образует четырехмерный гипероктаэдр (16-ячейник, гексадекахор), в то время как множество кватернионов  $\{\frac{1}{2}(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})\}$  образуют четырехмерный гиперкуб (тессеракт).

Следующее множество получается из  $BT$  преобразованием из  $SO(4)$ :

$$BT' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{i}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{k}), \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathbf{i} \pm \mathbf{k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) \right\}.$$

*Бинарно октаэдральная группа* представляется в виде  $BO = BT \cup BT'$ . Выпуклая оболочка элементов  $BO$  в  $\mathbb{R}^4$  образует выпуклый неправильный многогранник, называемый *дисфеноидальным 288-ячейником* (disphenoidal 288-cell), поскольку его гипергранями (ячейками) являются 288 конгруэнтных равногранных тетраэдров (tetragonal disphenoids). Этот многогранник вершинно-транзитивен, имеет 288 изометричных ячеек, 576 конгруэнтных граней и 336 ребер (192 ребра имеют длину  $l > 0$ , а оставшиеся 144 ребра имеют длину  $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot l$ ,  $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,76536\dots$ ). В частности, он не является ни полуправильным, ни равномерным (иначе все ребра были бы одной длины согласно предложению 1).

Наконец, *бинарно икосаэдральная группа*  $BI$  является объединением группы  $BT$  с множеством единичных кватернионов, получаемых путем четных перестановок координат (все возможные комбинации) из кватернионов

$$(0 \pm \mathbf{i} \pm \varphi^{-1} \mathbf{j} \pm \varphi \mathbf{k}),$$

где  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$  — золотое сечение. Всего таких кватернионов 96, таким образом,  $|BI| = 120$ . Выпуклая оболочка элементов  $BI$  в  $\mathbb{R}^4$  образует выпуклый правильный многогранник с символом  $\{3, 3, 5\}$ , называемый *600-ячейником* или *гекзакосихором* [16].

**Предложение 1.** *Любая конечная подгруппа  $G \subset S^3$  [7], снабженная метрикой  $d$ , индуцированной из  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ , является однородным по Клиффорду — Вольфу метрическим пространством, причем умножения на элементы  $G$  как слева, так и справа являются КВ-переносами. В частности, множества вершин гипертетраэдра, гиперкуба, 24-ячейника, дисфеноидального 288-ячейника и 600-ячейника с индуцированной из  $\mathbb{E}^4$  метрикой являются однородными по Клиффорду — Вольфу.*

*Доказательство.* Пусть  $x, y \in G$ . Тогда, обозначая через  $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$  единицу в  $G$ , получаем

$$d(\mathbf{1}, \mathbf{1} \cdot y) = d(x \cdot \mathbf{1}, x \cdot \mathbf{1} \cdot y) = d(x, x \cdot y), \quad d(\mathbf{1}, x \cdot \mathbf{1}) = d(\mathbf{1} \cdot y, x \cdot \mathbf{1} \cdot y) = d(y, x \cdot y),$$

поскольку умножение на единичный кватернион слева (справа) является изометрией в  $\mathbb{H}$ .  $\square$

Рассуждения выше показывают, что четыре правильных выпуклых многогранника в  $\mathbb{E}^4$  (гипертетраэдр, гиперкуб, 24-ячейник, 600-ячейник) могут быть представлены как выпуклые оболочки конечных подгрупп в  $Sp(1)$ . Таким образом, множество вершин каждого из этих многогранников однородно по Клиффорду — Вольфу согласно предложению 1.

Отметим, что множество вершин гипероктаэдра, пятого правильного выпуклого многогранника в  $\mathbb{E}^4$ , также является однородным по Клиффорду — Вольфу метрическим пространством согласно предложению 2. Шестым правильным выпуклым многогранником в  $\mathbb{E}^4$  является многогранник с символом Шлефли  $\{5, 3, 3\}$ , так называемый 120-ячейник (гекатоникосахор, гипердодекаэдр, додекаплекс).

Теперь мы можем доказать теорему 1 — основной результат данной работы.

*Доказательство теоремы 1.* Утверждение о том, что множество вершин каждого правильного многогранника размерности  $n \geq 4$ , отличного от 120-ячейника, является однородным по Клиффорду — Вольфу, следует из классификации таких многогранников (см. табл. 4 и табл. 5), предложения 2 и предложения 1.

Нам осталось исследовать 120-ячейник. Можно считать, что длина его ребер равна 1.

Все трехмерные грани 120-ячейника являются правильными додекаэдрами. Покажем, что не существует нетривиальной изометрии  $\psi$  метрического пространства  $(M, d)$ , сдвигающей все точки на расстояние не больше 1.

Предположим, что такая изометрия существует. Тогда существуют точки  $O, O' \in M$  такие, что

$$\psi(O) = O' \quad \text{и} \quad d(O, O') = 1.$$

Проведем в  $\mathbb{E}^4$  гиперплоскость  $\pi$  ( $\pi'$ ) через точку  $O$  (соответственно  $O'$ ) перпендикулярно отрезку  $[O, O']$ . Обозначим через  $U$  ( $U'$ ) открытую полуплоскость, определяемую  $\pi$  и не содержащую  $\pi'$  (соответственно определяемую  $\pi'$  и не содержащую  $\pi$ ). Пусть  $F$  ( $F'$ ) — множество вершин  $K$ , смежных с  $O$  (соответственно с  $O'$ ).

Заметим, что  $F \setminus \{O'\} \subset U$  и  $F' \setminus \{O\} \subset U'$ ,  $\psi(F) = F'$ , и, кроме того,  $|F \setminus \{O'\}| = |F' \setminus \{O\}| \geq 2$ . Изометрия  $\psi$  может переместить не более одной точки из  $F \setminus \{O'\}$  в точку  $O$ . Значит, найдется точка  $A \in F \setminus \{O'\} \subset U$  такая, что  $\psi(A) \in F' \setminus \{O\} \subset U'$ . Тогда должно быть  $d(A, \psi(A)) > 1$ , что противоречит условиям на отображение  $\psi$ .  $\square$

#### §4. Полуправильные многогранники

Полуправильными многогранниками (в отличие от правильных) в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^3$  являются бесконечные семейства правильных призм и антипризм, а также 13 *архимедовых тел*.

*Прямая призма* — многогранник, две грани которого являются конгруэнтными (равными) многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани (называемые боковыми) являются прямоугольниками (перпендикулярными основаниям). Такие многогранники вершино-транзитивные. Когда боковые грани являются квадратами, призма называется *правильной*. В этом случае мы получаем бесконечное семейство полуправильных выпуклых многогранников. *Антипризма* — полуправильный многогранник, у которого две параллельные грани (основания) — равные между собой правильные  $n$ -угольники, а остальные  $2n$  граней (боковые грани) — правильные треугольники. Отметим, что октаэдр является антипризмой с треугольными основаниями. Примеры призм и антипризм приведены на рис. 3.

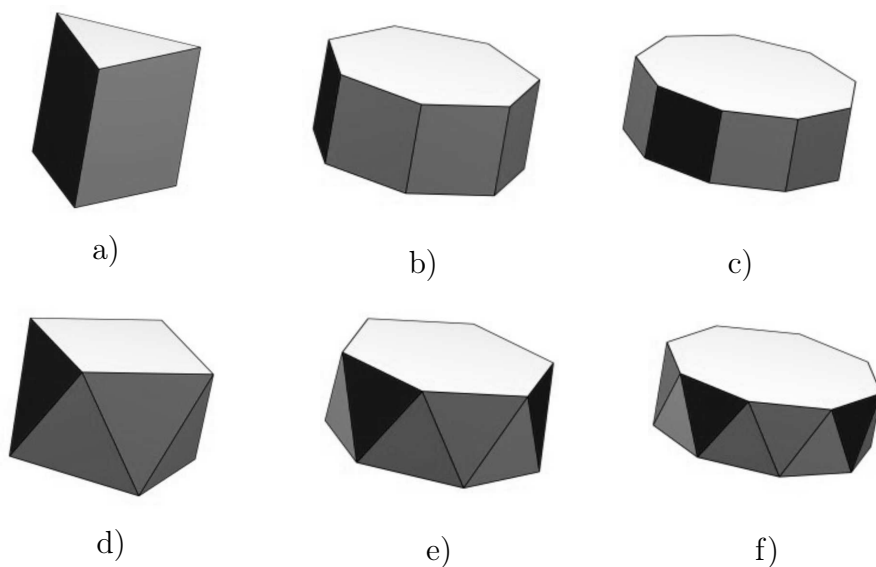


Рис. 3. Прямые призмы и антипризмы:

а) треугольная призма; б) семиугольная призма; в) девятиугольная призма; д) четырехугольная антипризма; е) шестиугольная антипризма; ф) восьмиугольная антипризма.

Остальные полуправильные трехмерные многогранники, архимедовы тела, также хорошо известны. Они изображены на рис. 4, а основные их характеристики приведены в табл. 5. Следует отметить, что курносые куб

и додекаэдр имеют по две энантиоморфные формы (являющиеся зеркальными отражениями друг друга), и на рис. 4 приведена лишь одна из этих форм (см. подробности в [6]). Отметим также, что многогранники, двойственные к архимедовым телам, называются *телами Каталана* (см. [28]).

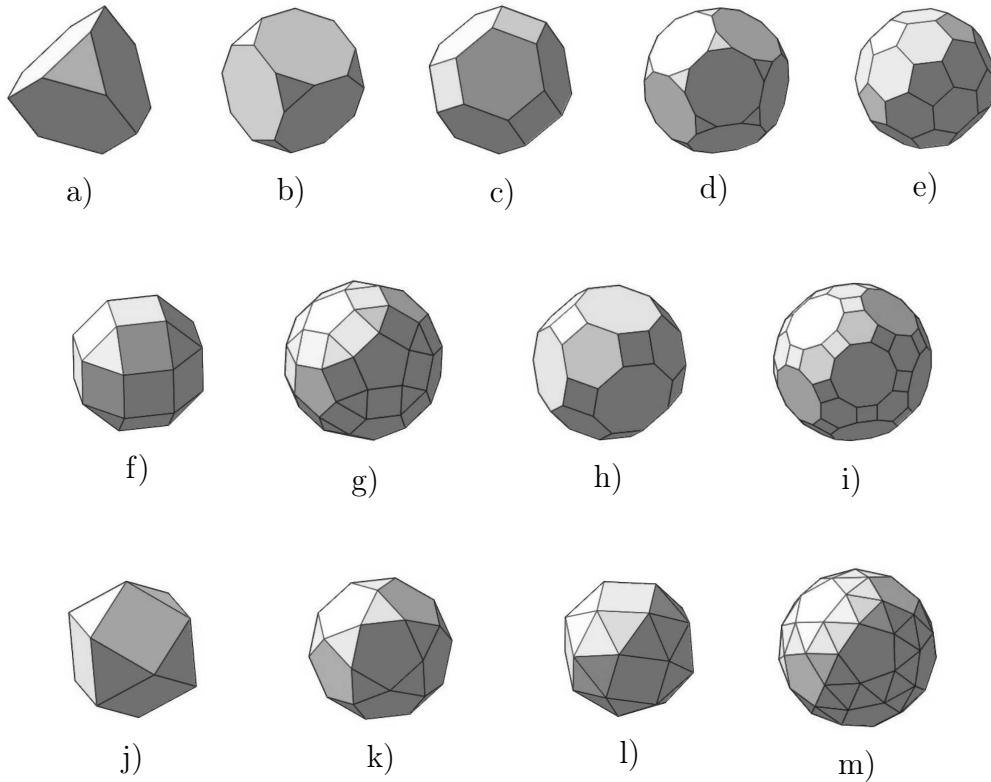


Рис. 4. Архимедовы тела:

а) усеченный тетраэдр; б) усеченный куб; в) усеченный октаэдр; г) усеченный додекаэдр; е) усеченный икосаэдр; ф) ромбокубооктаэдр; г) ромбоикосододекаэдр; х) ромбоусеченный кубооктаэдр; и) ромбоусеченный икосододекаэдр; ж) кубооктаэдр; к) икосододекаэдр; л) курносый куб; м) курносый додекаэдр.

Заметим, что числа  $V$ ,  $E$ ,  $F$  в табл. 5 можно вычислить следующим образом. Пусть полуправильный многогранник получен указанным в § 5 или § 6 способом из платонова тела с символом Шлефли  $\{m, n\}$  и числом вершин, ребер и граней, равным соответственно  $V_1$ ,  $E_1$  и  $F_1$ .

Для усеченных платоновых тел имеем

$$V = 2E_1, \quad F = F_1 + V_1, \quad E = E_1 + mF_1 = E_1 + nV_1.$$



**Таблица 5.** Полуправильные 3-мерные многогранники:

$V$  — количество вершин;  $E$  — количество ребер;  $F$  — количество граней;  $F_k$  — количество  $n_k$ -угольных граней;  $s$  — количество граней, содержащих произвольную вершину;  $s_k$  — количество  $n_k$ -угольных граней среди них,  $k = 1, 2, 3$

Многогранник	$V$	$E$	$F$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s$
Усеченный тетраэдр	12	18	8	6	3	-	4	4	-	2	1	-	3
Усеченный куб	24	36	14	8	3	-	6	8	-	2	1	-	3
Усеченный октаэдр	24	36	14	6	4	-	8	6	-	2	1	-	3
Усеченный додекаэдр	60	90	32	10	3	-	12	20	-	2	1	-	3
Усеченный икосаэдр	60	90	32	6	5	-	20	12	-	2	1	-	3
Ромбокубооктаэдр	24	48	26	4	3	-	18	8	-	3	1	-	4
Ромбоикосододекаэдр	60	120	62	4	3	5	30	20	12	2	1	1	4
Ромбоусеченный кубооктаэдр	48	72	26	4	6	8	12	8	6	1	1	1	3
Ромбоусеченный икосододекаэдр	120	180	62	4	6	10	30	20	12	1	1	1	3
Кубооктаэдр	12	24	14	3	4	-	8	6	-	2	2	-	4
Икосододекаэдр	30	60	32	3	5	-	20	12	-	2	2	-	4
Курносый куб	24	60	38	3	4	-	32	6	-	4	1	-	5
Курносый додекаэдр	60	150	92	3	5	-	80	12	-	4	1	-	5
Правильная призма ( $n \geq 3$ )	$2n$	$3n$	$n+2$	4	$n$	-	$n$	2	-	2	1	-	3
Антипризма ( $n \geq 4$ )	$2n$	$4n$	$2n+2$	3	$n$	-	$2n$	2	-	3	1	-	4

Для кубооктаэдра и икосододекаэдра  $V = E_1$ ,  $F = F_1 + V_1$ . Для ромбокубооктаэдра и ромбоикосододекаэдра  $V = mF_1 = nV_1$ ,  $F = V_1 + E_1 + F_1$ . У ромбоусеченных кубооктаэдра и икосододекаэдра  $V = 2mF_1 = 2nV_1$ ,  $F = V_1 + E_1 + F_1$ . У курносых куба и додекаэдра

$$V = mF_1 = nV_1, \quad E = \frac{5}{2}mF_1 = \frac{5}{2}nV_1 = \frac{5}{2}V.$$

Остальные числа в табл. 5 находятся по формуле Эйлера.

В работе [2] исследованы метрические свойства множества вершин (с индуцированной из евклидова пространства метрикой) для каждого архимедова тела. В частности, показано, что каждое такое множество является однородным, но не является нормальным однородным [2, теорема 9].

Следует отметить также, что множества вершин любой прямой призмы и множество вершин антипризмы являются однородными по Клиффорду — Вольфу, что существенно отличает призмы и антипризмы от архимедовых тел.

Согласно классификации полуправильных многогранников в  $\mathbb{E}^n$ ,  $n \geq 4$  (см. [15; 20]), помимо правильных многогранников существуют лишь 3 полуправильных многогранника (полностью усеченный пятиячейник, полностью усеченный 600-ячейник и курносый 24-ячейник) в  $\mathbb{E}^4$  (подробности см., например, на сайте [19]) и по одному полуправильному многограннику в  $\mathbb{E}^n$ ,  $n = 5, 6, 7, 8$ .

В следующих двух параграфах мы представим (пользуясь элементарными методами) множество вершин произвольного архимедова тела как орбиту некоторой точки подходящего правильного многогранника относительно группы изометрий этого многогранника. Такие представления известны в литературе [22; 23], особенность нашего подхода состоит в том, что мы используем точные вычисления.

### §5. 11 полуправильных многогранников в размерности 3

В этом параграфе мы укажем точки правильных многогранников в  $\mathbb{E}^3$ , орбиты которых относительно групп изометрий этих многогранников совпадают с множеством вершин полуправильных многогранников, отличных от курносых куба и додекаэдра.

*Усеченные тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр* — это выпуклая оболочка орбиты произвольной точки на ребре тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра, додекаэдра соответственно, отстоящей на расстоянии  $1/3$  длины ребра от вершины на ребре, относительно группы изометрий соответствующего правильного многогранника.

Легко описать выпуклую оболочку орбиты середины произвольного ребра (другими словами, выпуклую оболочку множества середин всех ребер) заданного платонова тела: для тетраэдра — это октаэдр; для октаэдра и куба — *кубооктаэдр*, а для икосаэдра и додекаэдра — *икосододекаэдр*.

В остальных случаях приходится брать точку внутри грани правильного многогранника и использовать в вычислениях двугранный угол  $\alpha$  многогранника.

На грани куба с ребром единичной длины берется точка на диагонали

грани, отстоящая от двух ее сторон на расстоянии  $x$ ,  $0 < x < 1/2$ , таком, что  $\sqrt{2}x = 1 - 2x$ , т. е.  $x = 1 - \sqrt{2}/2$ . Выпуклая оболочка орбиты такой точки относительно группы изометрий куба есть *ромбокубооктаэдр*.

Далее, рассмотрим границу грани правильного додекаэдра, вписанную в окружность радиуса 1 с центром  $O$ . На сторонах  $OA$  и  $OB$  треугольника  $OAB$ , где  $AB$  — ребро додекаэдра, возьмем точки  $A'$  и  $B'$  так, что  $|OA'| = |OB'| = k|OA|$ ,  $0 < k < 1$ . Пусть  $h$  — высота треугольника  $OAB$  с основанием  $AB$ . Выпуклая оболочка орбиты точки  $A'$  — *ромбоикосододекаэдр*, если  $(1 - k)h \cdot 2 \sin(\alpha/2) = k|AB|$ . На основании табл. 1 (и вычислений в п. 7.3) это равенство можно записать в виде

$$\frac{\varphi 2(1 - k)\sqrt{\varphi}}{2 \sqrt[4]{5}} = \frac{k\sqrt[4]{5}}{\sqrt{\varphi}} \Leftrightarrow \frac{k}{1 - k} = \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}.$$

Впишем в грань куба, т. е. в квадрат со сторонами 2, правильный 8-угольник, 4 стороны которого, в том числе  $AB$ , лежат на сторонах квадрата. На сторонах  $OA$  и  $OB$  треугольника  $OAB$ , где  $O$  — центр квадрата, возьмем точки  $A'$  и  $B'$  так, что  $|OA'| = |OB'| = k|OA|$ ,  $0 < k < 1$ . Пусть  $h = 1$  — высота треугольника  $OAB$  с основанием  $AB$ . Выпуклая оболочка орбиты точки  $A'$  — *ромбоусеченный кубооктаэдр*, если

$$(1 - k)h \cdot 2 \sin(\alpha/2) = k|AB| \Leftrightarrow \frac{k}{1 - k} = \frac{\sqrt{2}}{|AB|} := \frac{\sqrt{2}}{x}.$$

Поскольку  $x = \frac{2-x}{2} \cdot \sqrt{2}$ , получаем  $x = 2/(1 + \sqrt{2})$  и  $k/(1 - k) = 1 + \sqrt{2}/2$ .

Рассмотрим границу грани правильного додекаэдра, т. е. правильный выпуклый 5-угольник, как вписанный в окружность радиуса 1 с центром  $O$ . Из выражения для  $\sin \pi/5$  следует, что его сторона равна  $\sqrt[4]{5}/\sqrt{\varphi}$ . Впишем в 5-угольник правильный 10-угольник, 5 сторон которого, в том числе  $AB$ , лежат на сторонах 5-угольника. На сторонах  $OA$  и  $OB$  треугольника  $OAB$ , где  $O$  — центр 5-угольника, возьмем точки  $A'$  и  $B'$  так, что  $|OA'| = |OB'| = k|OA|$ ,  $0 < k < 1$ . Пусть  $h$  — высота треугольника  $OAB$  с основанием  $AB$ .

Выпуклая оболочка орбиты точки  $A'$  — *ромбоусеченный икосододекаэдр*, если

$$(1 - k)h \cdot 2 \sin(\alpha/2) = k|AB| \Leftrightarrow \frac{k}{1 - k} = \frac{2h\sqrt{\varphi}}{|AB|\sqrt[4]{5}}.$$

Пусть  $|AB|=x$ . Тогда  $h = \cos(\pi/5) = \varphi/2$ ,  $k/(1 - k) = \varphi\sqrt{\varphi}/(|AB|\sqrt[4]{5})$ ,

$$x = \frac{\sqrt[4]{5}/\sqrt{\varphi} - x}{2} \cdot 2 \sin(3\pi/10), \quad x = \frac{\sqrt[4]{5} \sin(3\pi/10)}{\sqrt{\varphi}(1 + \sin(3\pi/10))},$$

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\varphi^2(1 + \sin(3\pi/10))}{\sqrt{5} \sin(3\pi/10)}.$$

Заметим, что существует другой способ получить усечения тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра как выпуклую оболочку орбиты некоторой точки на линии зеркальной симметрии грани многогранников, двойственных к упомянутым многогранникам, относительно группы движений (исходных или двойственных им многогранников).

Рассмотрим грань произвольного правильного выпуклого многогранника  $K$  как правильный  $n$ -угольник  $M$ , вписанный в окружность единичного радиуса с центром  $O$ , и треугольник  $OAB$  со стороной  $AB$  у  $M$  и высотой  $OC$ . Пусть  $D$  — точка на  $OC$  такая, что  $|OD| = k|OC|$ , где  $0 < k < 1$ . Тогда  $|OC| := h = \sin(\pi/n)$ ,  $|OD| = k \sin(\pi/n)$ . Выпуклая оболочка орбиты точки  $D$  относительно группы изометрий многогранника  $K$  будет усечением двойственного к  $K$  правильного многогранника, если

$$2k \sin^2(\pi/n) = 2(1 - k) \sin(\pi/n) \sin(\alpha/2),$$

где  $\alpha$  — двугранный угол при ребре многогранника  $K$ . Следовательно,

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}. \quad (2)$$

Далее применим в каждом случае проведенные ранее вычисления и равенство (2).

В случае тетраэдра имеем

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Выпуклая оболочка орбиты точки  $D$  относительно тетраэдральной группы  $T$  — усеченный тетраэдр.

В случае октаэдра

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{3}, \quad k = \frac{2}{5}.$$

Выпуклая оболочка орбиты точки  $D$  относительно октаэдральной группы  $O$  — усеченный куб.

В случае икосаэдра

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\varphi/\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\varphi}{3}.$$

Выпуклая оболочка орбиты точки  $D$  относительно икосаэдральной группы  $I$  — усеченный додекаэдр.

В случае куба

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Выпуклая оболочка орбиты точки  $D$  относительно октаэдральной группы  $O$  — усеченный октаэдр.

В случае додекаэдра

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\sqrt{\varphi}/\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}/2\sqrt{\varphi}} = \frac{2\varphi}{\sqrt{5}}.$$

Выпуклая оболочка орбиты точки  $D$  относительно икосаэдральной группы  $I$  — усеченный икосаэдр.

## §6. Курносые куб и додекаэдр

Теперь найдем точку  $A_1$  на грани куба, орбита которой относительно октаэдральной группы изометрий дает множество вершин *курносого куба*.

Рассмотрим куб со стороной 2, грани которого лежат в плоскостях  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  и  $z = \pm 1$ , а также его грань в плоскости  $y = -1$ . Вершины квадрата внутри этой грани являются вершинами курносого куба, если они лежат на двух прямых

$$z = kx, \quad y = -1; \tag{3}$$

$$z = -\frac{1}{k}x, \quad y = -1 \tag{4}$$

при некотором  $k$ , где  $0 < k < 1$ , и квадрат симметричен относительно центра  $O_1 = (0, -1, 0)$  грани. Плоскость  $z = -\frac{1}{k}x$  пересекает плоскость  $z = 1$  по прямой  $x = -k$ ,  $z = 1$ . На этой прямой должна лежать вершина  $A_0$  курносого куба, полученная вращением вокруг оси  $x$  вершины  $A_1$ , лежащей на пересечении плоскостей  $x = -k$ ,  $y = -1$ ,  $z = kx$  [6]. Тогда  $A_1 = (-k, -1, -k^2)$ ,  $A_0 = (-k, -k^2, 1)$ . При этом точка  $A_2 = (-k^2, -1, k)$  лежит на прямой (4),  $|A_2O_1|^2 = |A_1O_1|^2$ , и поэтому должна быть вершиной курносого куба, причем  $|A_1A_2|^2 = |A_0A_2|^2$ .

Последнее равенство запишется в виде

$$(k - k^2)^2 + (k + k^2)^2 = (k - k^2)^2 + (1 - k^2)^2 + (1 - k)^2,$$

что дает в результате кубическое уравнение

$$k^3 + k^2 + k - 1 = 0. \tag{5}$$

Кроме того, должно быть  $|A_0A_2|^2 = |A_4A_2|^2$ , где  $A_4$  лежит в плоскости  $z = 1$  и получается вращением вокруг оси  $x$  точки  $A_3$ , симметричной

точке  $A_2$  относительно  $O_1$ . Тогда  $A_3 = (k^2, -1, -k)$ ,  $A_4 = (k^2, -k, 1)$  и указанное равенство квадратов расстояний запишется в виде

$$(k - k^2)^2 + (1 - k^2)^2 + (1 - k)^2 = 4k^4 + 2(1 - k)^2,$$

что дает после преобразований уравнение 4-й степени  $k^4 + k^3 + k^2 - k = 0$ , эквивалентное кубическому уравнению (5), поскольку  $k > 0$ .

Теперь найдем действительный корень уравнения (5). Согласно известным правилам подстановка  $k = x - 1/3$  приводит уравнение (5) к каноническому виду  $x^3 + px + q = 0$  (см. п. 7.1), где в нашем случае  $p = 2/3$ ,  $q = -34/27$ , т. е. получаем уравнение

$$x^3 + \frac{2x}{3} - \frac{34}{27} = 0. \tag{6}$$

Дискриминант  $D = -44$  уравнения (6) в рассматриваемом случае отрицателен, поэтому уравнение (6) имеет один действительный корень и два комплексных сопряженных корня. Нас интересует только действительный корень.

По формуле Кардано (см. п. 7.1) получаем

$$x = \frac{1}{3} \left( (17 + 3\sqrt{33})^{1/3} - (3\sqrt{33} - 17)^{1/3} \right).$$

Так как  $k = x - 1/3$ , имеем

$$k = \frac{1}{3} \left( (17 + 3\sqrt{33})^{1/3} - (3\sqrt{33} - 17)^{1/3} - 1 \right) = \frac{\gamma^2 - \gamma - 2}{3\gamma}, \quad \gamma = (17 + 3\sqrt{33})^{1/3}.$$

Приближенное значение этого числа таково:  $k = 0.5436890125 \dots$

Теперь займемся *курносым додекаэдром*. Здесь мы столкнемся с более замысловатыми вычислениями. Далее символами  $\cdot$  и  $\times$  обозначаются соответственно скалярное и векторное произведения. Пусть  $l$  — длина ребра,  $r$  — радиус описанной около грани окружности,  $h$  — расстояние от центра сферы до центра грани для правильного додекаэдра с единичным радиусом описанной сферы с центром в начале координат.

Предположим, что две диаметрально противоположные грани додекаэдра горизонтальны и сделано вертикальное сечение додекаэдра вдоль линии симметрии верхней грани с центром  $O_1$ ,  $O$  — центр сферы. Тогда часть такого сечения — треугольник  $OAB$  с высотой  $h = |OO_1|$ , составленный из прямоугольных треугольников  $OAO_1$  с гипотенузой  $|OA| = 1$ , основанием  $|AO_1| = r$ , высотой  $h$  и  $OBO_1$  с основанием  $h_1 = |BO_1| = r \cos(\pi/5)$  и углом при вершине  $B$ , равном  $\alpha/2$ , где  $\alpha$  — двугранный угол додекаэдра.

Пользуясь вычислениями из пп. 7.2 и 7.3, получаем

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos(\alpha/2) = \frac{\varphi^{1/2}}{5^{1/4}}, \quad d = \frac{\varphi}{\sqrt{3}},$$

$$l = \frac{2}{\varphi\sqrt{3}}, \quad h = d \sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}, \quad h_1 = d \cos(\alpha/2) = \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}}.$$

Поменяем ролями  $x$  и  $y$  в выбранной в п. 7.3 системе координат. Тогда векторы

$$n_1 = (0, 0, 1), \quad n_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

являются нормальными к соседним граням додекаэдра, а центры этих граней имеют вид

$$O_1 = hn_1 = \left(0, 0, \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}\right), \quad O_2 = hn_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}\right).$$

Ясно, что всякая прямая  $L$  в первой грани, не ортогональная ее общему ребру со второй гранью и проходящая через ее центр  $O_1$ , задается уравнениями

$$y = kx, \quad z = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}.$$

При этом эта прямая пересечет внутри общее ребро первой и второй граней, если

$$k > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} = \varphi^{3/2} 5^{-1/4} \implies k^2 > \varphi^3 5^{-1/2}.$$

Это должно произойти, когда выполнены условия

$$y = kx = h_1 = \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}}, \quad x = \frac{\varphi^{1/2}}{k\sqrt{3\sqrt{5}}}.$$

Тогда точка пересечения имеет вид

$$B = \left(\frac{\varphi^{1/2}}{k\sqrt{3\sqrt{5}}}, \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}\right)$$

и длина отрезка прямой  $L$  от  $O_1$  до точки  $B$  равна

$$D = \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}} \sqrt{1/k^2 + 1} = \frac{\varphi^{1/2}}{k\sqrt{3\sqrt{5}}} \sqrt{1 + k^2}.$$

Прямая  $L$  (при некотором  $k$ ) является осью зеркальной симметрии некоторой грани курносого додекаэдра, являющейся частью первой грани додекаэдра. Плоскость  $P$ , ортогональная первой грани додекаэдра и отсекающая на ней прямую  $L$ , имеет внешнюю нормаль

$$n = (0, 0, 1) \times (1, k, 0) = (-k, 1, 0).$$

При этом направляющий вектор прямой  $L_1$ , высекаемой плоскостью  $P$  из второй грани, параллелен вектору

$$n_2 \times n \parallel (0, 2, 1) \times (-k, 1, 0) = (-1, -k, 2k) \parallel (1, k, -2k) =: W.$$

Прямая  $L_1$  содержит сторону некоторого правильного пятиугольника, являющегося гранью  $\Gamma$  (с центром  $O_2$ ) курносого додекаэдра. Направляющий вектор прямой  $L_2$ , проходящей через  $O_2$ , ортогональной  $L_1$  и лежащей во второй грани, равен

$$\begin{aligned} n_2 \times W &\parallel (0, 2, 1) \times (1, k, -2k) = (-5k, 1, -2) \parallel (5k, -1, 2) =: V; \\ \overline{O_2B} &= \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{5}}} \left( \frac{\varphi^{1/2}}{k}, \varphi^{1/2} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{2 + \sqrt{5}}, \sqrt{2 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{2 + \sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{5}}} \left( \frac{\varphi^{1/2}}{k}, -\frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\varphi^{1/2}}{\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

Расстояние от точки  $O_2$  до прямой  $L_1$  реализуется расстоянием  $|O_2C|$  и равно

$$d = \frac{V}{|V|} \cdot \overline{O_2B} = \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3 \cdot 5\sqrt{5}(1 + 5k^2)}} \left( 5 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2\varphi^{3/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1 + 5k^2)}}.$$

Тогда радиус описанной окружности грани  $\Gamma$  равен

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{d}{\cos(\pi/5)} = \frac{2\varphi^{3/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1 + 5k^2)}} \frac{2}{\varphi} = \frac{4\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1 + 5k^2)}}; \\ \frac{l_1}{2} &= d \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{2\varphi^{3/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1 + 5k^2)}} \frac{5^{1/4}}{\varphi^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{3(1 + 5k^2)}}; \\ D - r_1 &= \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}} \left( \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k} - \frac{4}{\sqrt{1 + 5k^2}} \right) \\ &= \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1 + 5k^2)}} \left( \sqrt{(1 + k^2)(1 + 5k^2)}/k^2 - 4 \right). \end{aligned}$$

Находим расстояние  $D_1 = |BC|$  следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \sqrt{|O_2B|^2 - d^2} = \sqrt{D^2 - d^2} = \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}} \sqrt{\frac{1 + k^2}{k^2} - \frac{4\varphi^2}{1 + 5k^2}} \\ &= \frac{\varphi^{1/2}}{k\sqrt{3\sqrt{5}(1 + 5k^2)}} \sqrt{(1 + k^2)(1 + 5k^2) - k^2(6 + 2\sqrt{5})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi^{1/2}(\sqrt{5}k^2 - 1)}{k\sqrt{3\sqrt{5}(1+5k^2)}}; \\
D_1 - \frac{l_1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{3(1+5k^2)}} \left( \frac{\varphi^{1/2}(\sqrt{5}k^2 - 1)}{k5^{1/4}} - 2 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{5}(1+5k^2)k^2}} \left( \varphi^{1/2}(\sqrt{5}k^2 - 1) - 2k5^{1/4} \right).
\end{aligned}$$

Точка  $B$  пересечения прямых  $L$  и  $L_1$  находится на расстоянии  $a := D - r_1$  от некоторой точки  $A$  на прямой  $L$  между  $O_1$  и  $B$  и на расстоянии  $b := D_1 - l_1/2$  от некоторой точки  $E$  на прямой  $L_1$  между  $B$  и  $C$ . Тогда по теореме косинусов евклидовой геометрии получаем

$$\begin{aligned}
c^2 &:= |AE|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle(\overline{BA}, \overline{BE}) \\
&= \frac{\varphi}{3\sqrt{5}(1+5k^2)} \left( a_1^2 + b_1^2 + 2\sqrt{(1+k^2)/(1+5k^2)}a_1b_1 \right),
\end{aligned}$$

где

$$a_1 = \sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)/k^2} - 4, \quad b_1 = \left( \sqrt{5}k - \frac{1}{k} - \frac{2\sqrt[4]{5}}{\varphi^{1/2}} \right). \quad (7)$$

Точки  $A$  и  $E$  должны быть вершинами курносого додекаэдра, соединенными ребром. Поэтому  $c = l_1$  и

$$a_1^2 + b_1^2 + 2\sqrt{(1+k^2)/(1+5k^2)}a_1b_1 = \frac{16\sqrt{5}}{\varphi}. \quad (8)$$

Так как

$$|O_1A| = x_0\sqrt{1+k^2} = r_1 = \frac{4\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1+5k^2)}},$$

имеем

$$A = \left( \frac{4\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1+k^2)(1+5k^2)}}, \frac{4k\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}(1+k^2)(1+5k^2)}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}} \right). \quad (9)$$

Пусть  $F = \left( 0, \varphi^{1/2}/\sqrt{3\sqrt{5}}, \sqrt{(2+\sqrt{5})/3\sqrt{5}} \right)$  — середина общего ребра первой и второй граней,

$$N := \frac{n_1 + n_2}{|n_1 + n_2|} = \frac{(0, 2, 1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{\sqrt{5}\varphi}} = 5^{-1/4} (0, \varphi^{-1/2}, \varphi^{1/2}).$$

Зеркальная симметрия относительно прямой  $L_0$ , проходящей через точку  $F$  параллельно  $N$  (другими словами, вращение на угол  $\pi$  с осью  $L_0$ ), переводит точку  $A$  в точку  $G$  курносого додекаэдра, соединенную его ребром с точкой  $A$ , т. е.  $|AG| = l_1$ ; другими словами, расстояние от точки  $A$  до прямой  $L_0$  равно  $l_1/2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} U := \overline{FA} &= \frac{\varphi^{1/2}}{\sqrt{3\sqrt{5}}} \left( \frac{4}{\sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)}}, \frac{4k}{\sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)}} - 1, 0 \right), \\ U \cdot U &= \frac{\varphi \left( 16 + (4k - \sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)})^2 \right)}{3\sqrt{5}(1+k^2)(1+5k^2)}, \\ N \cdot U &= \frac{4k - \sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)}}{\sqrt{3 \cdot 5}(1+k^2)(1+5k^2)}, \\ \frac{2}{\sqrt{3(1+5k^2)}} &= \frac{l_1}{2} = \sqrt{U \cdot U - (N \cdot U)^2} \\ &= \frac{\sqrt{16\sqrt{5}\varphi + (\varphi\sqrt{5} - 1)(4k - \sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)})^2}}{\sqrt{3 \cdot 5}(1+k^2)(1+5k^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 20(1+k^2) &= 16\sqrt{5}\varphi + (\varphi\sqrt{5} - 1)(4k - \sqrt{(1+k^2)(1+5k^2)})^2, \\ 25k^8 + (100\sqrt{5} - 400)k^6 + (290 - 140\sqrt{5})k^4 + (188\sqrt{5} - 40)k^2 + 44\sqrt{5} + 141 \\ &= (25k^6 + (110\sqrt{5} - 375)k^4 + (135 - 180\sqrt{5})k^2 + 62\sqrt{5} - 265)(k^2 - 1 - 2/\sqrt{5}) = 0. \end{aligned}$$

Корень этого уравнения

$$k^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^3}{\sqrt{5}}$$

не удовлетворяет указанному ранее неравенству  $k^2 > \varphi^3/\sqrt{5}$ . Единственным подходящим (положительным) решением полиномиального уравнения 6-й степени относительно  $k$  (3-й степени относительно  $k^2$ ), получаемого исключением этого корня, является число

$$k = \sqrt{\frac{4m^{2/3} + (75 - 22\sqrt{5})m^{1/3} + 1910 - 690\sqrt{5}}{15m^{1/3}}},$$

где  $m = 13275 - 5540\sqrt{5} + 30\sqrt{8535 - 3810\sqrt{5}}$ . Его приближенное значение таково:  $k = 2.614371443\dots$ . Вычисленное число  $k$  является и корнем уравнения (8) для  $a_1, b_1$  из (7). Подстановка числа  $k$  в (9) дает точку  $A$ , орбита

которой относительно группы всех сохраняющих ориентацию изометрий правильного додекаэдра — множество всех вершин полуправильного курносового додекаэдра.

Из результатов этого и предыдущего параграфов сразу следует, что множество вершин произвольного архимедова тела можно получить как орбиту некоторой точки на гранях правильных тетраэдра, куба или додекаэдра относительно группы движений этих многогранников.

## §7. Дополнения

**7.1. Формула для решения кубического уравнения.** Здесь мы напомним формулу Кардано для нахождения корней канонической формы кубического уравнения. Кубическое уравнение общего вида  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  при помощи замены переменной  $x = y - \frac{b}{3a}$  приводится к канонической форме

$$y^3 + py + q = 0,$$

где

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Дискриминант этого многочлена вычисляется по формуле

$$D = -108 \left( \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 \right).$$

Для уравнения с вещественными коэффициентами знак  $D$  определяет количество вещественных корней. При  $D < 0$  имеется один вещественный корень и два сопряженных комплексных корня, при  $D = 0$  все корни вещественные и один из них имеет кратность  $\geq 2$ , при  $D > 0$  имеются три различных вещественных корня.

По формуле Кардано корни кубического уравнения в канонической форме представляются следующим образом:

$$y_1 = \alpha + \beta, \quad y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i \frac{\alpha - \beta}{2} \sqrt{3},$$

где

$$i = \sqrt{-1}, \quad \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}}.$$

Отметим, что для каждого из трех значений  $\alpha$  необходимо брать такое  $\beta$ , при котором  $\alpha\beta = -p/3$ . При  $D < 0$  единственным вещественным корнем будет  $y_1$ .

**7.2.** Вычисления  $\cos(\pi/5)$  и  $\sin(\pi/5)$ . Пусть  $\beta = \pi/5$ . Тогда

$$\sin \beta = \sin(\pi - \beta) = \sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cos 2\beta = 4 \sin \beta \cos \beta (2 \cos^2 \beta - 1),$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0, \quad x = \cos \beta.$$

Нетрудно проверить, что одним из корней этого уравнения будет

$$x = (1 + \sqrt{5})/4 = \varphi/2;$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{\varphi}{2}\right) \left(x^2 + \frac{\varphi}{2}x + \frac{1}{4\varphi}\right).$$

Кроме того, легко заметить, что оба корня уравнения

$$x^2 + \frac{\varphi}{2}x + \frac{1}{4\varphi} = 0$$

вещественны и отрицательны. Следовательно,

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4}} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}/4 = 5^{1/4}/2\varphi^{1/2}. \quad (10)$$

Существует другой, более геометричный и интересный, способ вычисления  $\cos(\pi/5)$  как корня квадратного уравнения.

Найдется единственный равнобедренный треугольник  $\triangle ACE$  с основанием  $CE := a$ , разбиваемый на два равнобедренных треугольника:  $\triangle ABC$  и  $\triangle BCE$ .

Действительно, пусть  $\gamma$  — угол при основании у  $\triangle ACE$ . Тогда

$$BC = BA = a, \quad \angle CBE = \gamma, \quad \angle BAC = \angle BCA = \frac{\gamma}{2},$$

сумма углов в треугольнике  $\triangle ACE$  равна  $\gamma + \gamma + \gamma/2 = \pi$ ,  $\gamma = 2\pi/5$ ,  $\gamma/2 = \pi/5$ ;

$$AE = AC = 2a \cos \frac{\gamma}{2}, \quad BE = a \left(2 \cos \frac{\gamma}{2} - 1\right) = 2a \cos \gamma = 2a \left(2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1\right),$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0, \quad x = \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом,

$$AE = a\varphi, \quad BE = a(\varphi - 1) = a/\varphi, \quad AE/AB = AB/BE = \varphi,$$

т. е. точка  $B$  делит сторону  $AE$  в среднем и крайнем отношении или образует ее *золотое сечение*. Рис. 21 треугольника  $\triangle ACE$ , разбитого на треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle BCE$ , вместе с рис. 20 построения золотого сечения из книги Дэна Пидоу [9] представляют собой изложение метода Евклида построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки.

**7.3. Двугранные углы и координатные представления платоновых тел.** Приведем вычисления двугранных углов тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Пусть  $\alpha$  — двугранный угол правильного многогранника  $M$ . Тогда

$$-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha) = n_1 \cdot n_2,$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — единичные внешние нормали смежных граней у  $M$ , а символ  $\cdot$  обозначает скалярное произведение векторов. В качестве таких нормалей можно брать радиус-векторы соседних вершин двойственного многогранника  $M^*$  при условии, что началом радиус-векторов является центр описанной сферы единичного радиуса для  $M^*$ . Из известной тригонометрической формулы следует, что

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + n_1 \cdot n_2}{2}}.$$

1. *Куб* с вершинами вида  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  в  $\mathbb{R}^3$ . Понятно, что  $\alpha = \pi/2$ .
2. *Октаэдр* с нормальными  $n_1, n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \pm 1)$ . Тогда

$$\cos \alpha = -n_1 \cdot n_2 = -1/3, \quad \sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + 1/3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. *Тетраэдр*. В качестве его вершин можно взять произвольную вершину куба, например,  $(1, 1, 1)$  и три вершины куба, являющиеся противоположными к ней на содержащих ее гранях; в выбранном случае — это  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ . Таким образом, ввиду самодвойственности тетраэдра можно взять

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1).$$

Тогда

$$\cos \alpha = -n_1 \cdot n_2 = 1/3, \quad \sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - 1/3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. *Додекаэдр*. Выше уже были вычислены величины  $\cos(\pi/5) = \varphi/2$  и  $\sin(\pi/5) = 5^{1/4}/2\varphi^{1/2}$ . Следовательно,  $\cos(2\pi/5) = 1/2\varphi$ . Додекаэдр допускает зеркальные и центральные симметрии, и каждая центральная симметрия переводит каждую грань в параллельную ей. Поэтому можно выбрать декартову систему координат с началом в его центре так, что две единичные нормали соседних граней имеют вид  $n_1 = (0, 0, 1)$ ,  $(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$ . При вращении на угол  $2\pi/5$  вокруг оси  $z$  додекаэдр перейдет сам в себя, а нормали  $n_1, n_2$  перейдут в нормали

$$n_1, n'_2 = (\cos(2\pi/5) \sin \alpha, \sin(2\pi/5) \sin \alpha, -\cos \alpha).$$

Тогда

$$-\cos \alpha = n_2 \cdot n'_2 = \frac{1}{2\varphi} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{2\varphi}\right) + \frac{1}{2\varphi}.$$

Это равенство влечет квадратное уравнение

$$\cos^2 \alpha + \frac{2\phi}{\sqrt{5}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

относительно  $\cos \alpha$ , имеющее решения

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\varphi \pm \frac{1}{\varphi}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, -1.$$

Таким образом,

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos(\alpha/2) = \frac{1}{5^{1/4}\sqrt{\varphi}}, \quad \sin(\alpha/2) = \frac{\sqrt{\varphi}}{5^{1/4}}.$$

5. *Икосаэдр.* Пусть радиус описанной сферы додекаэдра равен 1, а  $d$  и  $h$  — соответственно расстояния от центра сферы до середины ребра и центра грани додекаэдра,  $h_1$  — расстояние от центра грани додекаэдра до середины ее ребра,  $l$  — длина ребра додекаэдра. Тогда

$$\begin{aligned} h &= d \sin(\alpha/2), \quad h_1 = d \cos(\alpha/2), \quad \frac{l}{2} = h_1 \operatorname{tg}(\pi/5) = \frac{d \cos(\alpha/2) \sin(\pi/5)}{\cos(\pi/5)}, \\ 1 &= d^2 + (l/2)^2 = d^2 \left(1 + \frac{\cos^2(\alpha/2) \sin^2(\pi/5)}{\cos^2(\pi/5)}\right) = d^2 \left(1 + \frac{1}{\varphi^4}\right), \\ d &= \frac{\varphi^2}{\sqrt{1 + \varphi^4}} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, \quad \frac{l}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^4}} = \frac{1}{\varphi\sqrt{3}}, \quad n_1, n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\varphi, \frac{\pm 1}{\varphi}\right). \end{aligned}$$

Обозначая через  $\beta$  двугранный угол икосаэдра, получаем

$$\cos \beta = -n_1 \cdot n_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \sin(\beta/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} = d.$$

Таким образом, синус половинного двугранного угла икосаэдра равен расстоянию от центра единичной описанной сферы додекаэдра до середины его ребра. Заменяя в проведенных вычислениях число 5 числом  $m$  сторон грани произвольного правильного многогранника и понимая под  $\alpha$  его двугранный угол, получаем следующее общее утверждение.

**Предложение 1.** Синус половинного двугранного угла произвольного правильного многогранника в  $\mathbb{R}^3$  равен отношению расстояния от центра описанной сферы двойственного многогранника до середины его ребра к радиусу этой сферы.

Как следствие, синус половинного двугранного угла правильного тетраэдра равен отношению расстояния от центра его описанной сферы до середины ребра к радиусу этой сферы.

Напомним, что множество всех середин ребер двойственных платоновых тел дают одно и то же платоново или архимедово тело. Из тетраэдра, куба и октаэдра, додекаэдра и икосаэдра получаются соответственно октаэдр, кубооктаэдр и икосододекаэдр.

Некоторое дополнение к проведенным рассуждениям и вычислениям позволяет указать координаты вершин всех правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$ .

Координаты вершин куба и правильного тетраэдра уже указаны.

Точки  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1)$  — вершины правильного октаэдра.

Набор всех единичных нормалей к граням додекаэдра даст вершины правильного икосаэдра с единичным радиусом описанной сферы. Две его нормали фактически уже известны — это  $n_1 = (0, 0, 1)$ ,  $n_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$ . Из вычисленных значений  $\cos(\pi/5)$ ,  $\sin(\pi/5)$ ,  $\cos(2\pi/5)$  находим, что

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{5^{1/4}\varphi^{1/2}}{2}, & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\varphi}{2}, \\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5^{1/4}}{2\varphi^{1/2}}.\end{aligned}$$

В результате вращений  $n_1$  и  $n_2$  вокруг оси  $z$  на углы  $0, \pm 2\pi/5, \pm 4\pi/5$  и последующей центральной симметрии получаем все 12 вершин правильного икосаэдра:

$$\pm(0, 0, 1), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(\varphi^{-1}, \pm 5^{1/4}\varphi^{1/2}, 1), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(-\varphi, \pm 5^{1/4}\varphi^{-1/2}, 1).$$

Для получения вершин правильного додекаэдра заметим, что сумма единичных нормалей трех граней додекаэдра, включающих его вершину, является радиус-вектором этой вершины с некоторым положительным коэффициентом. Получаем

$$n_1 + n_2 + n'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2, 5^{1/4}\varphi^{1/2}, \varphi^3), \quad n_2 + n'_2 + n_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^3, 5^{1/4}\varphi^{3/2}, 1), \quad (11)$$

где  $n_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi, 5^{1/4}\varphi^{-1/2}, -1)$ . Вращение векторов (11) вокруг оси  $z$  на угол  $-\pi/5$  дает точки

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi, 0, \varphi^3), \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi^2, 0, 1).$$

Вращая эти точки вокруг оси  $z$  на углы  $0, \pm 2\pi/5, \pm 4\pi/5$  с последующей центральной симметрией, получаем все 20 вершин правильного додекаэдра:

$$\begin{aligned} & \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(2\varphi, 0, \varphi^3), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(2\varphi^2, 0, 1), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(1, \pm 5^{1/4}\varphi^{3/2}, \varphi^3), \\ & \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(-\varphi^2, \pm 5^{1/4}\varphi^{1/2}, \varphi^3), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(\varphi, \pm 5^{1/4}\varphi^{5/2}, 1), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(-\varphi^3, \pm 5^{1/4}\varphi^{3/2}, 1). \end{aligned}$$

Данные координатные представления вершин платоновых тел и способы получения архимедовых тел из платоновых (см. § 5, 6) позволяют получить координаты вершин каждого архимедова тела.

### Список литературы

1. Александров А. Д. *Избранные труды*. Т. 2: *Выпуклые многогранники*. Новосибирск: Наука, 2007.
2. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Конечные однородные метрические пространства // *Сиб. матем. журн.* 2019. Т. 60, № 5. С. 973–995.
3. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях // *Сиб. матем. журн.* 2008. Т. 49, № 3. С. 497–514.
4. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. *Риманова геометрия и однородные геодезические*. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.
5. Берже М. *Геометрия*. М.: Мир, 1984. Т. 1.
6. Веннинджер М. *Модели многогранников*. М.: Мир, 1974.
7. Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны*. М.: Наука, 1982.
8. Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей*. Т. 2: *Геометрия*. М.: Наука, 1987.
9. Пидоу Д. *Геометрия и искусство*. М.: Мир, 1979.
10. Смирнов Е. Ю. *Группы отражений и правильные многогранники*. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2018.
11. Berestovskii V. N. and Guijarro L. A metric characterization of Riemannian submersions // *Ann. Global Anal. Geom.* 2000. V. 18, N 6. P. 577–588.
12. Berestovskii V. N. and Nikonorov Yu. G. Clifford–Wolf homogeneous Riemannian manifolds // *J. Differ. Geom.* 2009. V. 82, N 3. P. 467–500.
13. Berestovskii V. N. and Nikonorov Yu. G. Generalized normal homogeneous Riemannian metrics on spheres and projective spaces // *Ann. Global Anal. Geom.* 2014. V. 45, N 3. P. 167–196.
14. Berestovskii V. N. and Nikonorov Yu. G. *Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics* / Springer Monographs in Mathematics. Cham: Springer, 2020.



15. *Blind G. and Blind R.* The semiregular polytopes // *Comment. Math. Helv.* 1991. V. 66, N 1. P. 150–154.
16. *Coxeter H. S. M.* *Regular Polytopes*. 3d ed. New York: Dover, 1973.
17. *Coxeter H. S. M.* *Regular Complex Polytopes*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
18. *Cromwell P. R.* *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
19. Four-Dimensional Euclidean Space. <http://eusebeia.dyndns.org/4d/index>
20. *Gosset Th.* On the regular and semi-regular figures in space of  $n$  dimensions // *Messenger Math.* 1900. V. 29. P. 43–48.
21. *Grünbaum B.* *Convex Polytopes*. 2nd ed. / Graduate Texts in Mathematics, 221. New York: Springer, 2003.
22. *Har'el Z.* Uniform solution for uniform polyhedra // *Geom. Dedicata*. 1993. V. 47, N 1. P. 57–110.
23. *Koca M., Al-Ajmi M., and Koç R.* Polyhedra obtained from Coxeter groups and quaternions // *J. Math. Phys.* 2007. V. 48, N 11, 113514, 14 p.
24. *Koca M. and Koca N.Ö.* Coxeter groups, quaternions, symmetries of polyhedra and 4D polytopes // *Mathematical Physics / Proc. of the 13th Regional Conf., Antalya, Turkey, October 27–31, 2010* / Eds. Camci, Ugur et al. Hackensack, NJ: World Scientific, 2013. P. 40–60.
25. *Littlewood D. E.* The groups of the regular solids in  $n$ -dimensions // *Proceedings L.M.S.* 1930. V. 32. P. 10–20.
26. *Martini H.* A hierarchical classification of Euclidean polytopes with regularity properties // *Polytopes: Abstract, Convex and Computational* / Proc. of the NATO Advanced Study Institute, Scarborough, Ontario, Canada, August 20–September 3, 1993 / Eds. T. Bisztriczky et al. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci. 440, 1994. P. 71–96.
27. *Sikirić M. D.* <http://mathieudutour.altervista.org/Regular/>
28. *Wenninger M. J.* *Dual Models*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.

*Берестовский Валерий Николаевич*

Институт математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Академика Коптюга, 4,  
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.  
E-mail: vberestov@inbox.ru

Поступила в редакцию  
25 апреля 2020 г.

Получена после доработки  
29 июня 2020 г.

Принята к публикации  
7 июля 2020 г.

*Никоноров Юрий Геннадьевич*

Южный математический институт  
ВНЦ РАН и РСО-А,  
ул. Маркуса, 22,  
Владикавказ, 362027 РОССИЯ.  
E-mail: nikonorov2006@mail.ru