M. Sh. Birman, A simple embedding theorem for the kernels of integral trace-class operators on $L^2(\mathbb{R}^m)$. An application to the Fredholm trace formula,
Algebra i Analiz, 2015, Volume 27, Issue 2, 211–217

https://www.mathnet.ru/eng/aa1430

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №2

ЛЕГКОЕ ЧТЕНИЕ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛА

ПРОСТАЯ ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЯДЕР ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛЕДОВОГО КЛАССА В $L^2(\mathbb{R}^m)$. ПРИМЕНЕНИЕ К ФОРМУЛЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ СЛЕДА

© М. Ш. БИРМАН

Публикуемая статья Михаила Шлёмовича Бирмана была написана в 1989 г. и циркулировала среди специалистов в качестве препринта, изданного в университете Линчёпинга на английском языке (рукопись М. Ш. Бирмана была переведена А. А. Лаптевым). В статье найден прозрачный подход к оправданию формулы Фредгольма для следа ядерных интегральных операторов. Как указал нам Д. Р. Яфаев, М. Ш. Бирман не стал публиковать статью, обнаружив, что похожая конструкция фигурирует в книге М. А. Шубина по псевдодифференциальным операторам. Это так, но изложение в публикуемом тексте значительно более общее, ясное и подробное. В связи с этим, а также с возобновлением интереса к интегральным формулам для следов интегральных операторов, редколлегия решила опубликовать статью в рубрике „Легкое чтение для профессионала".

Статья основана на докладе, прочитанном автором на семинаре профессора Л. Хедберга в Университете Линчёпинга 5 июня 1989 г.

1. Цель настоящей статьи в основном методическая. Мы устраним одно рутинное недоразумение, связанное с распространением классической формулы Фредгольма

$$\sum_n \lambda_n(K) = \int \mathcal{K}(x,x)\,dx \tag{1}$$

на произвольные операторы следового класса S_1 в $L^2(\mathbb{R}^m)$. Здесь $\lambda_n(K)$ — собственные значения оператора K. Если $K \in S_1$, то согласно известной теореме Лидского (см. [1, 2]) левая часть в (1) совпадает с функционалом

Ключевые слова: формула Фредгольма.

При жизни автора настоящий текст был издан в качестве препринта:
Birman M. Sh., *A proof of the Fredholm trace formula as an application of a simple embedding for kernels of integral operators of trace class in* $L^2(\mathbb{R}^m)$, Preprint, Dept. Math., Inst. Technol., Linköping Univ., LITH-MAT-R-89-30, 1989.

$\operatorname{Tr} K$, т.е. с „матричным следом“ оператора K. Таким образом, остается проверить равенство

$$\operatorname{Tr} K = \int \mathcal{K}(x,x)\,dx, \quad K \in S_1, \tag{2}$$

где $\mathcal{K}$ — ядро оператора K. Последний записывается как интегральный оператор: для п.в. $x \in \mathbb{R}^m$

$$(Ku)(x) = \int \mathcal{K}(x,y)u(y)\,dy. \tag{3}$$

Однако ядро $\mathcal{K}$ в представлении (3) требуется знать лишь с точностью до эквивалентности по мере Лебега в $\mathbb{R}^{2m}$. „Диагональ“ $x = y$ имеет в $\mathbb{R}^{2m}$ нулевую меру. Это заставляет внимательней отнестись к интерпретации формулы (2), если ядро не непрерывно. Оказывается (см. п. 4), для $K \in S_1$ ядро $\mathcal{K}$ после замены переменных $y = x + a$ становится непрерывной функцией от a со значениями в $L^1(\mathbb{R}^m)$ по x. Эта „теорема вложения“ снимает затруднение, связанное с формулой (2).

2. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство; $S_p = S_p(\mathcal{H})$, $p = 1, 2,$ — соответственно следовой класс и класс операторов Гильберта–Шмидта в $\mathcal{H}$; $\|\cdot\|_p$ — норма в S_p. Если $K \in S_1$, то существует (не единственное) представление

$$K = LM, \quad L, M \in S_2. \tag{4}$$

Если (4) выполнено, то

$$\|K\|_1 \leqslant \|L\|_2 \|M\|_2, \tag{5}$$

$$\|K\|_1 = \min_{L,M} \|L\|_2 \|M\|_2 \quad (K = LM). \tag{6}$$

Отметим следующее элементарное предложение.

Предложение. *Пусть множество $\widetilde{S}_2$ $(\subset S_2)$ плотно в S_2. Тогда множество $\widetilde{S}_1 = \{K : K = LM, L \in \widetilde{S}_2, M \in \widetilde{S}_2\}$ плотно в S_1.*

Доказательство. Действительно, в силу (5) дело сводится к оценке

$$\begin{aligned}\|K - \widetilde{K}\|_1 &= \|(L - \widetilde{L})M + \widetilde{L}(M - \widetilde{M})\|_1 \\ &\leqslant \|M\|_2 \|L - \widetilde{L}\|_2 + \|\widetilde{L}\|_2 \|M - \widetilde{M}\|_2.\end{aligned}$$

□

3. Мы рассмотрим сначала более общий случай, чем в п. 1. Пусть $\mathcal{H} = L^2(X,\mu)$, где X — сепарабельное пространство с мерой μ. Нам понадобится также тензорный квадрат пространства $\mathcal{H}$, т.е. пространство $L^2(\Omega,\nu)$, где $\Omega = X^2$, $\nu = \mu\times\mu$. Как известно, каждый оператор $K\in S_2$ можно представить в интегральной форме:

$$(Ku)(x) = \int\limits_X \mathcal{K}(x,y)u(y)\,d\mu(y). \tag{7}$$

При этом ядро $\mathcal{K}\in L^2(\Omega,\nu)$. Более того, формула (7) осуществляет изометрический изоморфизм между гильбертовыми пространствами $S_2(\mathcal{H})$ и $L^2(\Omega,\nu)$:

$$\|K\|_2^2 = \iint\limits_{X^2} |\mathcal{K}(x,y)|^2\,d\mu(x)d\mu(y). \tag{8}$$

Представление (4) в терминах ядер означает, что

$$\mathcal{K}(x,y) = \int\limits_X \mathcal{L}(x,z)\mathcal{M}(z,y)\,d\mu(z). \tag{9}$$

Чтобы задать оператор K, достаточно знать ядро $\mathcal{K}\in L^2(\Omega,\nu)$ (ν)-п.в. на Ω. В то же время для $K\in S_1$ ядро $\mathcal{K}$ определено формулой (9) для (μ)-п.в. $x\in X$ и для (μ)-п.в. $y\in X$, причем исключительные множества нулевой меры μ не зависят друг от друга. Такое ядро („представитель“ класса эквивалентности $\mathcal{K}\in L^2(\Omega,\nu)$) будем называть *регуляризованным ядром* оператора $K\in S_1$ и обозначать $\mathcal{K}_0$. (Относительно регуляризованного ядра в связи с теорией рассеяния см. [3].) Отметим, что регуляризованное ядро $\mathcal{K}_0(x,y)$ уже определено (μ)-п.в. на диагонали $x=y$. Более того, справедлива формула

$$\operatorname{Tr} K = \int\limits_X \mathcal{K}_0(x,x)\,d\mu(x). \tag{10}$$

Действительно, обозначим $\mathcal{M}^*(x,y) = \overline{\mathcal{M}(y,x)}$. Тогда

$$\operatorname{Tr} K = \operatorname{Tr} LM = (\mathcal{L},\mathcal{M}^*)_{L^2(\Omega,\nu)} = \iint\limits_{X^2} \mathcal{L}(x,z)\mathcal{M}(z,x)\,d\mu(x)d\mu(z),$$

что совпадает с (10).

Казалось бы, цель достигнута. Однако при таком подходе определение канонического (регуляризованного) представителя для $\mathcal{K}\in L^2(\Omega,\nu)$

требует предварительной факторизации вида (4). Хотелось бы иметь способ построения $\mathcal{K}_0$ непосредственно в терминах функции $\mathcal{K}$. Это удается сделать в случае $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$.

4. Итак, предположим теперь, что $X = \mathbb{R}^m$, μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^m$, т.е. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$. Положим

$$\widehat{\mathcal{K}}(x,a) = \mathcal{K}(x, x+a), \quad x, a \in \mathbb{R}^m. \tag{11}$$

Ядра $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{K}$ однозначно определяют друг друга п.в. на $\mathbb{R}^{2m}$. Если $\mathcal{K}$ регуляризовано представлением (9), то

$$\begin{aligned}\Big(\int |\widehat{\mathcal{K}}(x,a)|\,dx\Big)^2 &\leqslant \Big(\iint |\mathcal{L}(x,z)|^2\,dxdz\Big)\Big(\iint |\mathcal{M}(z,x+a)|^2\,dxdz\Big)\\ &= \|L\|_2^2\|M\|_2^2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4), (6) для $K \in S_1\big(L^2(\mathbb{R}^m)\big)$ следует, что (в понятных обозначениях)

$$\widehat{\mathcal{K}} \in L^\infty(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x)), \tag{12}$$

$$\|\widehat{\mathcal{K}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m_a;L^1(\mathbb{R}^m_x))} \leqslant \|K\|_1. \tag{13}$$

Из сказанного в п. 2 видно, что множество операторов с ядрами класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ плотно в $S_1(L^2(\mathbb{R}^m))$. Вместе с оценкой (13) это позволяет заменить (12) более сильным соотношением

$$\widehat{\mathcal{K}} \in C_0(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x)). \tag{14}$$

Включение (14) означает, что вектор-функция $\widehat{\mathcal{K}}(\cdot, a)$ со значениями в $L^1(\mathbb{R}^m)$ непрерывна по a и стремится к нулю при $|a| \to \infty$. Таким образом, справедлива следующая *теорема вложения*.

Теорема. *Пусть* $K \in S_1(L^2(\mathbb{R}^m))$, $\mathcal{K}$ *— соответствующее ядро из представления* (7) *и* $\widehat{\mathcal{K}}$ *определено в* (11). *Тогда справедливы включение* (14) *и оценка* (13).

Естественное отождествление оператора класса S_1 и отвечающего ему ядра (11) позволяет записать (13), (14) в виде вложения

$$S_1(L^2(\mathbb{R}^m)) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x)). \tag{15}$$

При этом, как обычно, вложение понимается так, что для $K \in S_1$ ядро $\widehat{\mathcal{K}}$ с точностью до эквивалентности по мере Лебега на $\mathbb{R}^{2m}$ совпадает с некоторым элементом пространства $C_0(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x))$.

В дополнение к (13) приведем оценку для модуля непрерывности $\omega_h\big(\widehat{\mathcal{K}}; C_0(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x))\big)$ функции $\widehat{\mathcal{K}}$ по переменной a. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\left(\int |\widehat{\mathcal{K}}(x,b)-\widehat{\mathcal{K}}(x,a)|\,dx\right)^2\\&\quad=\left(\int\left|\int \mathcal{L}(x,z)\left(\mathcal{M}(z,x+b)-\mathcal{M}(z,x+a)\right)\,dz\right|dx\right)^2\\&\quad\leqslant \|L\|_2^2\iint |\mathcal{M}(z,x+b)-\mathcal{M}(z,x+a)|^2\,dxdz,\end{aligned}$$

т.е.

$$\omega_h\big(\widehat{\mathcal{K}}; C_0(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x))\big)\leqslant \|L\|_2\,\omega_h(\mathcal{M}; L^2(\mathbb{R}^{2m})). \tag{16}$$

Из доказательства оценки (16) видно, что для $\omega_h(\widehat{\mathcal{K}})$ нельзя получить оценку, равномерную на единичном шаре в пространстве $S_1(L^2(\mathbb{R}^m))$.

5. При выводе (13), (14) использовалось регуляризованное значение $\mathcal{K}_0$ ядра $\mathcal{K}$. Таким образом, в условиях теоремы справедлива формула (10), которая теперь принимает вид

$$\operatorname{Tr} K=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathcal{K}_0(x,x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widehat{\mathcal{K}}(x,0)\,dx. \tag{17}$$

Значение $\widehat{\mathcal{K}}(x,0)$ вполне определяется при п.в. x по ядру $\mathcal{K}$ из соображений непрерывности.

Пусть теперь Γ_a — оператор „сдвига на a“, т.е. $\Gamma_a : u(y)\to u(y-a)$. Тогда $\mathcal{K}(x,y+a)$ — ядро оператора $K\Gamma_a$. При $K\in S_1$ формула (17) дает

$$\operatorname{Tr} K\Gamma_a=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathcal{K}_0(x,x+a)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widehat{\mathcal{K}}(x,a)\,dx. \tag{18}$$

При $a\to 0$ формула (18) переходит в (17). Для вычисления $\operatorname{Tr} K$ можно использовать любой процесс усреднения, дающий в пределе значение непрерывной функции в фиксированной точке. В частности, обычное усреднение по шару $|a|\leqslant h$ сразу приводит к естественному и эффективному выражению

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} K&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\kappa_m h^m}\int\limits_{|a|\leqslant h}da\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widehat{\mathcal{K}}(x,a)\,dx\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\kappa_m h^m}\iint\limits_{|y-x|\leqslant h}\mathcal{K}(x,y)\,dxdy;\end{aligned} \tag{19}$$

здесь $\varkappa_m$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$. Не составляет труда написать и другие варианты эффективных представлений для $\operatorname{Tr} K$.

6. Соображения п. 4, 5 автоматически переносятся на случай

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m; H),$$

где H — вспомогательное гильбертово пространство, $\dim H \leqslant \infty$. Тогда в представлении (3) ядро $\mathcal{K}$ является уже оператор-функцией: $\mathcal{K}(x,y) \in S_2(H)$ при п.в. $(x,y) \in \mathbb{R}^{2m}$. Соотношение вида (8) переходит в формулу

$$\|K\|^2_{2,\mathcal{H}} = \iint\limits_{\mathbb{R}^{2m}} \|\mathcal{K}(x,y)\|^2_{2,H}\, dxdy.$$

Если $K \in S_1(\mathcal{H})$ и выполнено (4), то формула (9) (при $d\mu(z) = dz$) сохраняет смысл для ядер $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ со значениями в $S_2(H)$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}(x,y) \in S_1(H)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$ и п.в. $y \in \mathbb{R}^m$. Ядро $\widehat{\mathcal{K}}$ по-прежнему определяется в (11). Соотношение (14) тогда заменяется включением

$$\widehat{\mathcal{K}} \in C_0\left(\mathbb{R}^m_a; L^1(\mathbb{R}^m_x; S_1(H))\right),$$

а оценка (13) — неравенством

$$\sup_a \int\limits_{\mathbb{R}^m} \|\widehat{\mathcal{K}}(x,a)\|_{1,H}\, dx \leqslant \|K\|_{1,\mathcal{H}}.$$

Наконец, формула (17) принимает вид

$$\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} K = \int (\operatorname{Tr}_H \mathcal{K}_0(x,x))\, dx = \int \Big(\operatorname{Tr}_H \widehat{\mathcal{K}}(x,0)\Big)\, dx.$$

Справедлива также очевидная модификация формулы (19).

Отметим, что представление оператора в виде интегрального оператора с операторнозначным ядром часто используется в математической теории рассеяния (см. [3, 4]).

7. Материал п. 4–6 переносится на случай пространства $\mathcal{H} = L^2(X, \mu; H)$, когда X — группа и μ — мера, инвариантная относительно сдвигов.

8. В литературе большое внимание уделялось вложениям вида

$$W \hookrightarrow S_1(L^2(\mathbb{R}^m)),$$

где W — какой-либо подходящий функциональный класс на $\mathbb{R}^{2m}$ (класс ядер). По этому поводу см., например, [1, 5]. В то же время простое вложение (15), по-видимому, не замечалось. Что касается формул типа (19), то в [1] (для $m = 1$ и конечного промежутка $[\alpha, \beta]$) приведено более сложное соотношение

$$\operatorname{Tr} K = \lim_{h \to 0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathcal{K}_h(x, x)\, dx,$$

$$\mathcal{K}_h(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int\limits_{x-h}^{x+h} \int\limits_{y-h}^{y+h} \mathcal{K}(x', y')\, dx' dy'.$$

Ядро $\mathcal{K}_h$ непрерывно на $[\alpha, \beta]^2$.

9. Автор благодарит С. В. Кислякова и А. А. Лаптева за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Гохберг И. Г., Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.

[2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Лань, СПб., 2010.

[3] Бирман М. Ш., Энтина С. Б., *Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **31** (1967), №2, 401–430.

[4] Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Общая схема в стационарной теории рассеяния*, Пробл. мат. физ., вып. 12, ЛГУ, Л., 1987, с. 89–117.

[5] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32** (1977), №1, 17–84.