С. М. Гуриев, Модель формирования сбережений и спроса на деньги. Часть 2,
Матем. моделирование, 1994, том 6, номер 7, 41–54

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **6** номер **7** год **1994**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СБЕРЕЖЕНИЙ И СПРОСА НА ДЕНЬГИ: II

© С.М.Гуриев[1]
Вычислительный Центр РАН, Москва

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1]. Полученные в [1] функции предложения сбережений и спроса на деньги для домашних хозяйств с различными коэффициентами дисконтирования используются в равновесной модели замкнутой экономики с ненулевой ставкой процента на деньги. Доказано, что назначение процента на деньги на уровне ρ процентов в год приводит к увеличению темпа инфляции на те же ρ процентов. Исследуется равновесие рынка, на котором действуют домашние хозяйства с различными коэффициентами дисконтирования. Оказывается, что такое равновесие принципиально отличается от равновесия с одинаковым коэффициентом дисконтирования у всех домашних хозяйств. Рассматривается модель отбора коэффициентов дисконтирования. Показано, какую роль играет положительность коэффициентов дисконтирования.

A Model of Saving and Demand for Money: II

S.M.Guriev

The work continues [1]. The demand for money and saving supply functions obtained in [1] are used in a close general equilibrium model with a nonzero interest payments on cash. It is shown that interest of ρ per cent per annum paid on cash will give rise to an increase of ρ per cent per annum in the inflation rate. The dynamic equilibrium in an economy with heterogeneous households is studied. The equilibrium turns out to differ significantly from the one in a homogeneous economy. A model of selection of households' time preference rates is considered. The model proves the positiveness of the rate of pure time preference.

Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], используя сквозную нумерацию разделов и формул, начатую в [1]. В [1] были получены функции спроса на деньги и ценные бумаги в зависимости от цен и ставок процента (в том числе от ставки процента на наличные деньги, которая условно предполагалась не равной нулю). В данной работе эти функции спроса на деньги и ценные бумаги будут использованы для исследования

[1]Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. И.Г.Поспелову за помощь в выполнении работы, чл.-корр. РАН А.А.Петрову и д.ф.-м.н. А.А.Шананину за внимание к работе и полезные замечания, а также М.Б.Шаховой за проведение вычислительного эксперимента

рыночного равновесия (подобного равновесию в неоклассической макромодели Патинкина [2]) в замкнутой экономике с ненулевой ставкой процента по наличным деньгам. В отличие от незамкнутых моделей спроса на деньги, в которых отличный от нуля процент на деньги задается экзогенно ([3]), в данной работе удается показать, каким образом процент на наличные деньги автоматически добавляется к темпу инфляции.

Работа [3] примечательна также тем, что в ней исследовались существование и свойства равновесия в экономике с различными коэффициентами дисконтирования. Дисконтирование полезности потребления традиционно используется в моделях формирования сбережений и спроса на деньги для описания предпочтения сегодняшнего потребления будущему. Индивидуальный коэффициент дисконтирования (pure time preference) может трактоваться по разному — как величина, определяющая фактический горизонт планирования или степень уверенности в завтрашнем дне и т.д., но во всех своих ипостасях коэффициент дисконтирования выступает как индивидуальная характеристика экономического агента. В то же время, практически всегда в теории рациональных ожиданий (см., например, [4]) предполагается (обычно ради простоты изложения), что все домашние хозяйства обладают одним и тем же коэффициентом дисконтирования. Это предположение может быть основываться либо на том, что совокупность экономических агентов с различными коэффициентами дисконтирования может быть корректно представлена совокупностью экономических агентов с единым репрезентативным коэффициентом дисконтирования, либо на том, что вследствие некоторых объективных экономических процессов происходит отбор коэффициентов дисконтирования, так что реально все агенты действительно выбирают один и тот же коэффициент дисконтирования.

В рассмотренной ниже модели взаимодействия домашних хозяйств с различными коэффициентами дисконтирования выявляются сразу два принципиальных отличия экономик с одинаковыми и различными коэффициентами дисконтирования. Во-первых, равновесие в системе с различными коэффициентами дисконтирования нестационарно даже при постоянных параметрах, а во-вторых рыночный курс ценных бумаг оказывается систематически завышенным при наличии в системе различных коэффициентов дисконтирования.

Таким образом, остается проверить предположение о наличии в экономике механизмов отбора коэффициентов дисконтирования. В работе предложена простейшая модель отбора. Показано, что в стационарных условиях все отрицательные коэффициенты дисконтирования рано или поздно выбывают из системы, а среди оставшихся положительных все большая часть богатства системы переходит со временем к домашним хозяйствам с наименьшим коэффициентом дисконтирования.

3 Взаимодействие экономических агентов с различными коэффициентами дисконтирования.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим замкнутую модель взаимодействия домашних хозяйств, управляющих своими активами, как это описано в [1]. Как показано в разделе 2 [1], поведение домашних хозяйств зависит от их ожиданий изменения таких внешних параметров, как ставки процента по наличным деньгам и ценным бумагам, инфляция, скорость роста курса акций и т.д. Для определения этих параметров мы рассмотрим равновесие между спросом и предложением на товарном рынке, на рынке ценных бумаг и на рынке наличных денег. Мы уже описали спрос на товары, спрос на ценные бумаги (предложение сбережений) и спрос на деньги. Мы будем считать, что предложение денег и выплата процентов по деньгам является прерогативой государства, а производство товаров и выпуск акций осуществляется предприятиями. Детальное описание процессов производства не входит в цели данной работы, поэтому описание деятельности предприятий и государства будет ограничено лишь степенью их влияния на рынок сбережений.

Предположим, что рост индекса цен определяется относительным превышением спроса над предложением на товарном рынке:

$$i = \frac{\dot{p}}{p} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{C+G+I-Y}{Y} \tag{3.1}$$

где ζ — достаточно малая постоянная времени, характеризующая скорость установления равновесия на товарном рынке, Y — предложение (внутренний валовый продукт), C — суммарное конечное потребление, I — затраты продукта на расширение производства, G — государственное потребление.

Предположим, что экономика находится в режиме сбалансированного экспоненциального роста с темпом γ:

$$\dot{Y} = \gamma Y\ , \tag{3.2}$$

тогда затраты продукта на прирост производства пропорциональны этому приросту:

$$I = b\gamma Y\ . \tag{3.3}$$

Естественно предположить, что инвестиции производятся за счет выпуска и продажи новых акций:

$$pI = \sigma \dot{D}\ , \tag{3.4}$$

где σ — рыночный курс акций (рублей за штуку), $\dot{D}$ — выпуск, а D — общее количество акций на руках у населения (в штуках). Предположив, что акции продаются по рыночному курсу, мы пренебрегаем временем установления равновесной цены на акции. В принципе, можно было бы и на этом рынке рассмотреть переходные процессы, как это было сделано для товарного рынка (3.1), однако на фондовом рынке равновесие устанавливается еще быстрее, чем на товарном, где, как мы позже покажем, это происходит за время порядка ζ.

Предположим, что государственное потребление G пропорционально национальному продукту :

$$G = \pi Y.$$

Будем считать, что производимого в экономике продукта хватает на расширение производства и государственное потребление, то есть выполнено условие продуктивности экономики: $1 - \pi - b\gamma > 0$.

Чтобы не вводить лишних параметров в модель (более тщательное описание взаимодействия экономических агентов с государством см., например, в [5]), предположим, что государственные расходы на покупку продукта pG покрываются эмиссией наличности (или других государственных ценных бумаг, которые в силу своей абсолютной надежности могут служить средством платежа при покупке потребительских товаров). Если по этим бумагам государство обязуется к тому же платить процент ρ, то

$$\dot{M} = \rho M + \pi p Y. \tag{3.5}$$

Здесь M — эмиссия, а M — общее количество денег в обращении.

Рассмотрим теперь спрос на продукт потребления C и на акции D со стороны населения. Пренебрежем заработной платой и рассмотрим экономику "чистых рантье". Будем считать, что население представляет собой совокупность рассмотренных в разделе 2 потребителей (домашних хозяйств) с различными коэффициентами дисконтирования δ. Если потребителей достаточно много, и каждый из них не слишком богат, то ни один из них не может существенно повлиять своими действиями ни на цены на рынке, ни на ставки процентов. В то же время его поведение существенно зависит от изменения этих параметров. В разделе 2 показано, что если потребитель предполагает, что эти параметры останутся постоянными и рассчитывает свое поведение на достаточно длительный интервал времени, он быстро (за время порядка Δ) приводит отношение объемов имеющихся у него активов к магистральному $S/M = \bar{k}$ (см.(2 11) в [1]). Предположим, что поведение потребителя подчиняется следующему правилу: в каждый момент времени он пересчитывает оптимальное $\bar{k}$ в предположении, что текущие ставки процентов и темпы изменения цен и рыночного курса акций сохранятся на том же уровне достаточно долго. Когда эти внешние параметры изменяются, потребитель вновь пересчитывает $\bar{k}$ и продает излишние активы и т.д. Такой метод планирования называется процедурой скользящего планирования.

Оптимальное соотношение между активами $\bar{k}(t)$ является непрерывной функцией внешних параметров. Ниже будет показано, что внешние параметры непрерывно зависят от времени, так что рассчитываемое таким образом значение $\bar{k}(t)$ также непрерывно зависит от времени. Поэтому даже при конечно малых Δ каждый из потребителей перманентно остается на магистрали, которая непрерывно смещается вслед за изменением внешних параметров. Ниже будут рассмотрены условия, при которых оправдываются предположения домашних хозяйств о постоянстве внешних параметров.

Предположим, что потребители различаются только коэффициентами дисконтирования δ, а степень однородности функции полезности β (относительное отвращение к риску по Эрроу-Пратту) у них одна и та же. Таким образом, население расслаивается на группы с одним и тем же дисконтированием будущей полезности. Из полученного в разделе 2 выражения для оптимального соотношения между активами $\bar{k}$ ясно, что в заданный момент времени внутри каждой такой группы $\bar{k}$ одно и то же. Поэтому поведение всех домашних хозяйств внутри этих групп будет одинаковым, и совокупность домашних хозяйств представляется совокупностью групп. Обозначим через $c(\delta,t)d\delta$, $m(\delta,t)d\delta$, $s(\delta,t)d\delta$ текущее потребление, количество денег и ценных бумаг у домашних хозяйств с коэффициентом дисконтирования δ в момент времени t, а через $w(\delta,t)d\delta = (m(\delta,t)+s(\delta,t))d\delta$ - их совокупное богатство. Тогда потребление C, количества денег M и ценных бумаг S и совокупное богатство W *всех* домашних хозяйств записываются в виде:

$$C(t) = \int c(\delta,t)\, d\delta,\ M(t) = \int m(\delta,t)\, d\delta\ \ S(t) = \int d(\delta,t)\, d\delta,\ W(t) = \int w(\delta,t)\, d\delta,$$

В силу описанной выше процедуры скользящего планирования, в любой момент времени выполняется соотношение между активами $s(\delta,t) = \bar{k}(\delta,t)m(\delta,t)$, которое нам удобнее будет использовать в виде

$$m(\delta,t) = \mu(\delta,t)\, w(\delta,t)\ ,\ \ s(\delta,t) = (1-\mu(\delta,t))\ w(\delta,t) \tag{3.6}$$

где

$$\mu(\delta,t) = 1/(\bar{k}(\delta,t)+1) = (\hat{r}-\nu(\delta,t))/(\hat{r}-\rho+\frac{1}{\tau}), \tag{3.7}$$

Темп роста производства γ складывается из темпа роста рабочей силы и повышения производительности труда. Будем считать, что темп роста рабочей силы совпадает с темпом роста населения, а повышение производительности труда сопровождается приблизительно равным ему увеличением стандарта потребления на душу населения. Тогда сумма темпов роста населения и темпа увеличения стандарта потребления также равна γ. Будем считать, что внутри групп с различными коэффициентами дисконтирования население растет равномерно. Тогда можно рассматривать каждую такую группу как семью, численность которой растет с темпом n, в то время как стандарт потребления растет с темпом $\gamma - n$. Такая постановка задачи рассматривалась в подразделе 1.2 [1], где было показано, что в этом случае решение задачи управления активами остается таким же, как и для индивидуума, лишь темп роста ν становится равным

$$\nu(\delta, t) = i + \gamma + (\hat{r}(t) - i(t) - \gamma - \delta)/\beta \tag{3.8}$$

Отметим, что так как в каждый момент времени потребитель находится на магистрали, ограничение ликвидности выполняется как равенство $p(t)c(\delta, t) = m(\delta, t)/\tau$, следовательно, и суммарное потребление подчиняется следующему условию

$$pC = M/\tau \tag{3.9}$$

Таким образом, из (3.1)-(3.9) получаем полную систему уравнений, описывающую поведение всей совокупности экономических агентов:

$$\dot{w}(\delta) = \nu(\delta)w(\delta), \tag{3.10}$$

$$M = \int \mu(\delta)w(\delta)d\delta, \tag{3.11}$$

$$S = \int (1 - \mu(\delta))w(\delta)d\delta, \tag{3.12}$$

$$\dot{M} = \rho M + \pi pY, \tag{3.13}$$

$$b\gamma pY = \dot{S} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}S, \tag{3.14}$$

$$i = -\frac{1}{\zeta}\,\frac{pY(1 - \pi - b\gamma) - M/\tau}{pY}. \tag{3.15}$$

$$\dot{Y} = \gamma Y, \quad \dot{p} = ip. \tag{3.16}$$

с известными начальными условиями $Y(0) = Y_0$, $w(\delta, 0) = w_0(\delta)$, $p(0) = p_0$, $\sigma(0) = \sigma_0$ и параметрами π, b, γ, τ.

Рассмотрим полученные уравнения подробнее. Уравнение (3.10) описывает поведение домашних хозяйств, применяющих процедуру скользящего планирования. Уравнения (3.11)-(3.12) задают функции спроса на деньги и предложения сбережений (т.е. спроса на ценные бумаги). Уравнения (3.13)-(3.14) описывают предложение денег и спрос на сбережения (т.е. предложение ценных бумаг).

Уравнение (3.15) показывает соотношение между спросом и предложением на рынке продукта[2]. Уравнения (3.16) замыкают систему.

[2]Вместо M/τ в этом уравнении должно быть pC, но ради простоты изложения мы сделали подстановку, воспользовавшись уравнением спроса на продукт со стороны домашних хозяйств (3.9)

Подставляя спрос на деньги (3.11) в уравнение (3.13), мы получаем уравнение баланса между спросом и предложением на рынке денег, при помощи которого нужно определить ρ. Подставляя спрос на ценные бумаги (3.12) в уравнение (3.14), мы получаем уравнение баланса между спросом и предложением на рынке ценных бумаг. Из этого уравнения можно определить $\hat{r}$ или $\dot{\sigma}/\sigma$. Уравнение (3.15) определяет величину i.

Таким образом, хотя система (3.10)-(3.16) и включает все необходимые по смыслу уравнения, все же для того, чтобы определить все переменные ρ, $\hat{r}$, $\dot{\sigma}/\sigma$, i, не хватает ровно одного уравнения. Оказывается, что возможно найти связь между переменными, однако нельзя однозначно определить каждую из них — одну из переменных (скажем, ρ) можно задать произвольно. Смысл этой неоднозначности становится ясен из решения системы.

3.2 Значение ставки процента по наличным деньгам

В этом подразделе мы определим темп инфляции в самых общих предположениях. не требуя, чтобы параметры τ и ρ были постоянными. Продифференцируем по времени уравнение (3.15) с учетом (3.16) и выразим производную $\dot{M}$:

$$\dot{M} = \tau(i+\gamma)pY(\zeta i + 1 - \pi - b\gamma) + \tau pY\zeta\frac{di}{dt} + \dot{\tau}pY(\zeta i + 1 - \pi - b\gamma)$$

Затем подставим $\dot{M}$ в уравнение (3.13), разделим его на τpY и получим дифференциальное уравнение на темп инфляции:

$$\zeta\frac{di}{dt} = \frac{\pi}{\tau} - (i + \gamma - \rho + \frac{\dot{\tau}}{\tau})(\zeta i + 1 - \pi - b\gamma) \tag{3.17}$$

Так как уравнение (3.17) — дифференциальное, для того, чтобы определить $i(t)$, необходимо знать константу $i(0)$. Однако в Приложении показано, что при $\zeta \to 0$ решение уравнения (3.17) сходится к

$$i = \rho - \gamma - \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)} \tag{3.18}$$

для всех $i(0)$ за время порядка ζ. Поскольку столь быстрые переходные процессы не представляют особого интереса, в дальнейших рассуждениях мы будем рассматривать только медленные процессы и использовать только старший член (3.18) регулярного разложения по малому параметру ζ:

$$i + \gamma = \rho - \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)} \tag{3.19}$$

Эта формула выявляет источники инфляции в данной модели. Последний член показывает, как дефицит государственного бюджета непосредственно влияет на инфляцию. Второй член подсказывает монетаристские способы борьбы с инфляцией, прямо следующие из основного соотношения количественной теории денег (1.4) — при увеличении τ (величины, обратной скорости оборота денег) уровень цен p падает. Легко узнать в этой закономерности связь задержек обращения и снижения инфляции, преиодически имеющих место в современной российской экономике. Однако увеличение скорости оборота наличных денег $1/\tau$ не просто вызывает пропорциональный рост цен, оно также усиливает влияние на инфляцию дефицита госбюджета.

Однако наиболее интересным следствием уравнения (3.19) является связь между i и ρ. Возможно, эта связь и объясняет тот факт, что по бумагам, являющимся основным средством платежа, не выплачиваются проценты. Установить ставку процента на деньги на уровне ρ процентов в год (или, что то же самое, покрыть дефицит бюджета выпуском облигаций, не уступающих по ликвидности наличным деньгам) означает просто добавить эти ρ процентов к инфляции, то есть обесценить деньги на те же ρ процентов в год. В этом и содержится ответ на вопрос, поставленный в [1], вот почему наличные деньги как средство платежа занимают положение точки отсчета на шкале ликвидности. Легко также показать, что так как из условий равновесия определяется не сам эффективный процент $\hat{r} = \frac{r}{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$, а разность $\hat{r} - i - \gamma$, ненулевое ρ вносит добавку не только в инфляцию, но и в эффективный процент $\hat{r}$. Таким образом, величины ρ, $i + \gamma$ и $\hat{r}$ определены с точностью до одной той же аддитивной величины. Такой произвол не влияет на оптимальное соотношение между активами. В силу (3.7)-(3.8) $\bar{k}$ и μ зависят только от попарных разностей между этими величинами, а не от их абсолютных значений. Поэтому в дальнейшем будем считать $\rho = 0$.

3.3 Динамическое равновесие

В этом подразделе мы решим задачу определения равновесной ставки процента в предположении, что параметры π, b, γ постоянны. Мы будем пренебрегать временем ζ установления равновесных цен p на товарном рынке. В этом случае темп инфляции равен

$$i = -\gamma - \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)} . \tag{3.20}$$

Пренебрегая в (3.15) слагаемым порядка ζ, получаем $M = pY\tau/(1 - \pi - b\gamma)$, откуда темп роста денежной массы M:

$$\frac{\dot{M}}{M} = i + \gamma + \frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)} .$$

С другой стороны, темп роста денежной массы можно определить из (3.11) и (3.10):

$$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{\int \mu(\delta)\nu(\delta)w(\delta)d\delta}{\int \mu(\delta)w(\delta)d\delta} = \frac{\langle\mu\nu\rangle}{\langle\mu\rangle} .$$

Здесь угловые скобки $\langle\rangle$ означают усреднение по распределению с плотностью $w(\delta)/\int w(\delta)d\delta$. Подставляя (3.7) в последнее уравнение и используя (3.8), получаем

$$\frac{\dot{M}}{M} = i + \gamma + \frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{(\hat{r} - \langle\nu\rangle)\langle\nu\rangle - \frac{\langle\delta^2\rangle - \langle\delta\rangle^2}{\beta^2}}{\hat{r} - \langle\nu\rangle} = \langle\nu\rangle - \frac{D\delta}{\beta^2(\hat{r} - \langle\nu\rangle)} ,$$

где $D\delta = \langle\delta^2\rangle - \langle\delta\rangle^2$ — дисперсия коэффициента дисконтирования. Подставляя (3.8), получаем квадратное уравнение для равновесной эффективной ставки процента $\hat{r}$:

$$\hat{r} - i - \gamma = \langle\delta\rangle + \beta\frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{D\delta}{(\beta - 1)(\hat{r} - i - \gamma) + \langle\delta\rangle},$$

единственное осмысленное[3] решение которого имеет вид

$$\hat{r} = i + \gamma + \langle\delta\rangle + \beta\frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\beta(\langle\delta\rangle + (\beta - 1)\frac{\dot{\tau}}{\tau})}{2(\beta - 1)} \left(\sqrt{1 + \frac{4(\beta - 1)D\delta}{\beta^2(\langle\delta\rangle + (\beta - 1)\frac{\dot{\tau}}{\tau})^2}} - 1 \right) . \tag{3.21}$$

Темп роста рыночного курса акций можно теперь определить при помощи уравнения (3.14):

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = <\nu> - \frac{b\gamma(\hat{r} - <\nu>)}{<\nu> + \frac{1}{\tau}}<\nu> + \frac{D\delta}{\beta^2}\frac{\pi + b\gamma}{\pi(<\nu> + \frac{1}{\tau})} \tag{3.22}$$

где $<\nu>$ — средний темп роста богатства в равновесии:

$$<\nu> = i + \gamma + \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{<\delta> + (\beta - 1)\frac{\dot{\tau}}{\tau}}{2(\beta - 1)}\left(\sqrt{1 + \frac{4(\beta - 1)D\delta}{\beta^2(<\delta> + (\beta - 1)\frac{\dot{\tau}}{\tau})^2}} - 1\right) \tag{3.23}$$

Средний темп роста богатства $<\nu> = \dot{W}/W$ не совпадает с темпом роста денежной массы $\dot{M}/M = i + \gamma + \dot{\tau}/\tau$. Причем, как следует из (3.23), этот эффект возникает вследствие взаимодействия экономических агентов с различными коэффициентами дисконтирования (чем больше дисперсия $D\delta$, тем больше различие темпов роста; при $D\delta = 0$ активы растут сбалансированно).

Этот факт кажется особенно парадоксальным в случае $\tau = const$. Действительно, при $\tau = const$ денежная масса M и валовый внутренний продукт pY растут с одним и тем же темпом $i + \gamma$, отстающим от темпа роста богатства W, который равен

$$<\nu> = i + \gamma + \frac{<\delta>}{2(\beta - 1)}\left(\sqrt{1 + \frac{4(\beta - 1)D\delta}{\beta^2(<\delta>)^2}} - 1\right) > i + \gamma \tag{3.24}$$

Это означает, что реальное богатство на душу населения $\frac{W}{p}e^{-\gamma t}$ возрастает, несмотря на экстенсивный характер роста. Более того, может возникнуть ситуация, когда растет не только суммарное реальное богатство на душу населения, но и реальное богатство на душу населения $\frac{w(\delta)}{p}e^{-\gamma t}$ для *каждой* отдельно взятой подгруппы[4].

Очевидно, что различие в темпах роста богатства $W = M + S$ и валового внутреннего продукта pY вызвано несбалансированным ростом денежной массы M и стоимости ценных бумаг S в равновесии. Темп роста стоимости ценных бумаг $S = \sigma D$ превышает темп роста экономики $i + \gamma$. Таким образом, рыночный курс акций, определяемый из условия (3.14) равновесия спроса и предложения на фондовом рынке, оказывается систематически завышенным. Реальная стоимость ценных бумаг на душу населения $S/e^{(i+\gamma)t}$ растет, в то время как реальный ВВП на душу населения $pY/e^{(i+\gamma)t}$ не изменяется со временем.

3.4 Динамика распределения богатства по коэффициентам дисконтирования

Мы показали, что в каждый момент существуют равновесные цены (3.20), равновесная ставка процента (3.21) и равновесный курс акций (3.22), однозначно определяемые двумя характеристиками распределения $w(\delta)$ богатства по коэффициентам дисконтирования — средним коэффициентом дисконтирования $<\delta>$ и дисперсией коэффициента дисконтирования $D\delta$. Однако, так как богатство домашних хозяйств с различными коэффициентами дисконтирования растет неравномерно, эти характеристики изменяются во времени.

[3]Второе решение соответствует отрицательной реальной дисконтированной ставке процента. Этот нехарактерный для нормальной рыночной экономики случай рассматривается, например, в [6].

[4]Такая ситуация действительно воспроизводится при численных экпериментах с моделью.

В силу (3.8) темп роста богатства линейно убывает по мере увеличения коэффициента дисконтирования в каждый момент времени:

$$\nu(\delta,t) = A(t) - \frac{\delta}{\beta} \tag{3.25}$$

где $A(t) = i+\gamma+(\hat{r}-i-\gamma)/\beta$ — не зависит от δ. Поэтому, если в экономике сосуществуют несколько различных коэффициентов дисконтирования, распределение $w(\delta)$ перманентно смещается в сторону малых δ. Действительно, вычислим производную среднего коэффициента дисконтирования $<\delta>$ по времени. В силу (3.10)

$$\frac{d<\delta>}{dt} = <\nu\delta> - <\nu><\delta> = -\frac{D\delta}{\beta} < 0 \tag{3.26}$$

Для определения динамики распределения богатства по коэффициентам дисконтирования представим уравнение (3.10) в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\delta,t) = (A(t) - \frac{\delta}{\beta})w(\delta,t) \tag{3.27}$$

где $A(t) = (\beta-1)(\hat{r}-i\gamma)/\beta$ — непрерывная функция времени. Уравнение (3.27) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром δ. Интегрируя его, получаем

$$w(\delta,t) = w(\delta,t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(t')dt' - \frac{\delta}{\beta}(t-t_0)\right\} \tag{3.28}$$

Следовательно, для произвольных δ_1, δ_2 при $w(\delta_2, 0) > 0$ в любой момент времени t выполняется следущее соотношение

$$\frac{f(\delta_1,t)}{f(\delta_2,t)} = \frac{f(\delta_1,0)}{f(\delta_2,0)}\exp -\frac{(\delta_1-\delta_2)t}{\beta} \tag{3.29}$$

то есть со временем происходит перемещение плотности распределения w в сторону меньших δ.

Если присутствующие в системе коэффициенты дисконтирования не ограничены снизу (то есть для любого наперед заданного $\tilde{\delta}$ найдется $\delta < \tilde{\delta}$ такое, что $g(\delta) > 0$), то основная масса распределения смещаются со временем в область $\delta = -\infty$. Если же по каким-либо причинам существует нижняя граница коэффициентов дисконтирования

$$\delta_l = \inf_{g(\delta)>0} \delta > -\infty,$$

то со временем плотность распределения будет концентрироваться в правой полуокрестности δ_l:

$$\lim_{t\to\infty} <\delta> = \delta_l \tag{3.30}$$

$$\lim_{t\to\infty} D\delta = 0 \tag{3.31}$$

Таким образом, если распределение богатства изменяется во времени в соответствии с уравнением (3.27), то рано или поздно все богатство переходит к домашним хозяйствам с наименьшим присутствующим в системе коэффициентом дисконтирования.

Однако, мы не должны забывать также наложенные в условии Теоремы 1 раздела 2 [1] ограничения на коэффициент дисконтирования. Как уже отмечалось в разделе 2, потребители с малыми коэффициентами дисконтирования, предпочитающие высокий доход ликвидности, могут испытывать затруднения с текущим потреблением из-за отсутствия наличных денег.

3.5 Модель отбора коэффициентов дисконтирования

Допустим, что изначально в системе присутствуют домашние хозяйства со всевозможными, в том числе и отрицательными, коэффициентами дисконтирования. Вычислим потребление $c(\delta)$ домашних хозяйств с коэффициентом дисконтирования δ:

$$c(\delta) = \mu(\delta)w(\delta)/(p\tau) = \frac{\hat{r} - <\nu> + \frac{\delta - <\delta>}{\beta}}{\hat{r} - \rho + \frac{1}{\tau}} w(\delta)/(p\tau)$$

Таким образом, оказывается, что при $\delta < x = -\beta(\hat{r} - <\nu>) + <\delta>$ потребление неположительно $c(\delta) \leq 0$. При этом нарушается условие Теоремы 1 раздела 2 [1], и задача скользящего планирования не имеет решения (любое управление приводит к минус бесконечному значению функционала). Потребители с $\delta < x$ оказываются слишком скупыми, и хотя они обладают значительным богатством в виде ценных бумаг S, они не могут обеспечить себе минимального уровня потребления из-за недостатка ликвидности. Поэтому мы будем считать, что в системе отсутствуют домашние хозяйства с коэффициентами дисконтирования меньше x.

Однако, граница x является функцией $\hat{r} - i - \gamma$ и, следовательно, может изменяться со временем. Это значит, что некоторые домашние хозяйства, вполне преуспевающие вчера, могут оказаться неспособными продолжать придерживаться своего коэффициента дисконтирования сегодня — их виды на потребление не могут быть удовлетворены в текущей ситуации из-за недостатка ликвидных средств (наличных денег). В реальной жизни экономические агенты в таких ситуациях сходят с магистрали, срочно, пусть и с большими потерями, распродавая свои низколиквидные активы, после чего либо разоряются и их богатство переходит к более предусмотрительным домашним хозяйствам (с большими δ), либо они сами усваивают преподанный им жизнью урок и переориентируются на больший коэффициент дисконтирования, что с точки зрения модели одно и то же — домашние хозяйства рассматриваются только как обладатели богатства, и все равно, участвуют ли в рыночном взаимодействии два домашних хозяйства с одним коэффицентом дисконтирования или одно домашнее хозяйство с тем же коэффициентом дисконтирования с активами, равным сумме их активов. Будем считать, что переориентация происходит следующим образом: богатство находящихся на грани разорения домашних хозяйств $w(x(t), t)$ перераспределяется по остальным $\delta > x$ пропорционально текущему распределению богатства $w(\delta, t)$ (то есть экономические агенты ориентируются на успех той или иной стратегии, мерой которого служит богатство $w = s + m$).

Заметим, что при $\delta > y(t) = \beta(i + \gamma + \frac{1}{\tau}) + \hat{r} - i - \gamma$ условия теоремы 1 также не выполняются и оптимального соотношения между активами $\bar{k}$ не существует ($\mu > 1$). В этом случае, как уже отмечалось в разделе 2 [1], домашние хозяйства не сберегают, а "проедают" накопленные к данному моменту сбережения за время порядка Δ, после чего лишаются всяких средств к существованию и вынуждены переориентироваться на меньшие коэффициенты дисконтирования. Предположим, что переориентация происходит аналогично случаю $\delta < x(t)$.

Таким образом, можно сформулировать правила отбора коэффициентов дисконтирования δ. Будем считать, что любой момент времени в системе отсутствуют домашние хозяйства с коэффициентами дисконтирования, меньшими $x(t)$ или большими $y(t)$

$$w(\delta, t) = 0 \;\; \forall\, \delta < x(t) \;\text{ или }\; \delta > y(t). \tag{3.32}$$

Следовательно, в любой момент времени

$$x(t) \leq \underline{\delta}(t) = \inf_{w(\delta,t)>0} \delta \leq \overline{\delta}(t) = \sup_{w(\delta,t)>0} \delta \leq y(t).$$

При увеличении $x(t)$ фактическая левая граница распределения $\underline{\delta}(t)$ не изменяется, если $x(t) < \underline{\delta}(t)$, или увеличивается вместе с $x(t)$ $(x(t) = \underline{\delta}(t))$. Если же $x(t)$ уменьшается со временем, то $\underline{\delta}(t)$ не изменяется — стратегии, хоть раз приведшие к разорению, уже не используются.

По сделанному выше предположению, в каждый момент времени богатство домашних хозяйств с $\delta = x(t)$ переходит к домашним хозяйствам с $\delta > x(t)$ пропорционально текущему распределению богатства. Тогда можно показать, что для $\delta \in (x(t), y(t))$ уравнение изменения богатства со временем имеет вид

$$\dot{w}(\delta,t) = (\nu(\delta,t) + h(t))w(\delta,t) \tag{3.33}$$

где $h(t) = \{\dot{x}w(t,x(t)) - \dot{y}w(t,y(t))\} \,/\, \int_x^y w(\delta,t)d\delta$ — не зависящая от δ добавка к темпу роста, связанная с переориентацией домашних хозяйств с $\delta = x(t)$ и $\delta = y(t)$. Будем считать, что домашние хозяйства с $\delta \in (x,y)$ учитывают эту добавку при скользящем планировании. Тогда выражения для $x(t)$ и $y(t)$ имеют следующий вид:

$$x = \beta h - (\beta - 1)(\hat{r} - i - \gamma) \tag{3.34}$$

$$y = \beta(h + i + \gamma + \frac{1}{\tau}) + (\hat{r} - i - \gamma) \tag{3.35}$$

3.6 Стационарность равновесия и вырожденность распределения

Равновесие будем называть стационарным, если выполняются следующие условия:

- переориентации на другие коэффициенты дисконтирования не происходит: $h = 0$
- внешние параметры, оказывающие влияние на поведение домашних хозяйств, постоянны во времени: $\hat{r} - i - \gamma = const$, $i + \gamma = const$, $\tau = const$

Заметим, что если равновесие стационарно, то, в силу (3.34),(3.35), $x = const$, $y = const$. Подставим $\tau = const$ в формулу (3.21) для равновесной ставки процента:

$$\hat{r} = i + \gamma + <\delta> + \frac{\beta<\delta>}{2(\beta-1)}\left(\sqrt{1 + \frac{4(\beta-1)D\delta}{\beta^2<\delta>^2}} - 1\right) \tag{3.36}$$

Лемма. Пусть $\tau = const$ и $1 - \pi - b\gamma > 0$. Тогда для того, чтобы равновесие в модели (3.15)-(3.16) было стационарным, необходимо и достаточно, чтобы распределение богатства по коэффициентам дисконтирования было вырожденным $w(\delta) = w\delta_D(\delta - \delta_s)$, причем $\delta_s > 0$. Здесь $\delta_D(\cdot)$ — δ-функция Дирака, δ_s — единственный присутствующий в экономике коэффициент дисконтирования.

Доказательство.

Достаточность доказать нетрудно. Действительно, если распределение вырождено, то $<\delta> = \delta_s$ и $D\delta = 0$. Равновесные значения параметров

$$\hat{r} = i + \gamma + \delta_s \tag{3.37}$$

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = i + \gamma - \delta_s b\gamma/(1 - b\gamma) \tag{3.38}$$

$$\nu = i + \gamma \tag{3.39}$$

не зависят от времени. При этом $h = 0$, а x и y определяются выражениями $x = -(\beta - 1)\delta_s$, $y = \beta(i + \gamma + \frac{1}{\tau}) + \delta_s$. Так как $\delta_s > 0$, $\delta_s > x$. Из $1 - \pi - b\gamma > 0$ следует, что $\delta_s > y$. Равновесие стационарно.

Необходимость. Допустим, что существует невырожденное стационарное равновесие. Обозначим, как и прежде, через $\delta_l = \inf_{w(\delta,t)>0}\delta$ фактическую левую границу распределения. Подставляя (3.30)-(3.31) в (3.36), получаем, что в этом случае $\lim_{t\to\infty} \hat{r} - i - \gamma = \delta_l$. В то же время, в начальный момент времени, в силу невырожденности распределения, $<\delta> > \delta_l$ и $D\delta > 0$. Воспользовавшись формулой (3.36) для равновесной ставки процента, получаем, что в начальный момент времени $\hat{r} - i - \gamma > \delta_l$. Следовательно, невырожденное равновесие не может быть стационарным.

Вырожденных равновесий с $\delta_s \leq 0$ не существует, так как в этом случае $x = -(\beta - 1)\delta_s \geq 0 \geq \delta_s$.

Таким образом, в случае общего положения равновесие нестационарно, равновесная ставка процента $\hat{r} - i - \gamma$ изменяется во времени, и прогноз домашних хозяйств о постоянстве внешних параметров не оправдывается. В каждый момент времени домашние хозяйства пересчитывают $\nu(\delta, t) = i(t) + \gamma + \frac{\hat{r}(t) - i(t) - \gamma - \delta}{\beta}$ и $\bar{k}(\delta, t)$, перманентно переходя при этом с магистрали на магистраль. Таким образом, все домашние хозяйства ошибаются в своих предположениях об изменениях внешних параметров. Возникает вопрос, какие из них ошибаются в большей степени, а какие — в меньшей. Рассмотрим домашнее хозяйство с коэффициентом дисконтирования δ в момент времени t_0. В этот момент времени оно находится на магистрали

$$\hat{w}(\delta, t) = w(\delta, t_0)\exp\{\nu(\delta, t_0)(t - t_0)\},$$

где $\nu(\delta, t_0) = i(t_0) + \gamma + \frac{\hat{r}(t_0) - i(t_0) - \gamma - \delta}{\beta}$. Однако в действительности его богатство изменяется по закону $\dot{w}(\delta, t) = \nu(\delta, t)w(\delta, t)$ и в момент времени t составит

$$w(\delta, t) = w(\delta, t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\nu(\delta, \xi)d\xi\right\}$$

При $t \to t_0$ относительная ошибка прогноза будет равняться

$$\frac{\hat{w}(\delta, t) - w(\delta, t)}{w(\delta, t)} = -\frac{1}{2}\dot{\nu}(\delta, t_0)(t - t_0)^2 + o(t - t_0) \tag{3.40}$$

Домашние хозяйства ошибаются только во втором порядке по времени, их траектории $w(t)$ (и, как легко показать, $m(t)$ и $s(t)$) в каждый момент времени касаются той магистрали, на которой они в данный момент находятся, то есть их траектории являются огибающими семейства магистралей.

Формула (3.40) показывает, что величина относительной ошибки не зависит от δ, то есть одинакова для всех домашних хозяйств, так как

$$\dot{\nu}(\delta, t_0) = \frac{d}{dt}\left(i + \frac{\hat{r} - i}{\beta}\right)\bigg|_{t_0}$$

не зависит от δ.

3.7 Неотрицательность коэффициента дисконтирования

Теорема 2. При $\tau = const$ процесс отбора коэффициентов дисконтирования, задаваемый уравнениями (3.32)-(3.35), приводит к тому, что в системе остаются только неотрицательные коэффициенты дисконтирования:

$$\lim_{t\to\infty} sign\ w(\delta, t) = 0 \ \text{ при } \ \delta < 0$$

Доказательство. Предположим, что множество остающихся в системе коэффициентов дисконтирования

$$\left\{\delta : \lim_{t\to\infty} sign\ w(\delta, t) = 1\right\}$$

не пусто. Это множество действительных чисел ограничено снизу, по крайней мере, величиной $x(0)$, поэтому оно имеет точную нижнюю грань, которую мы обозначим δ_l. Тогда для остающихся в системе коэффициентов дисконтирования богатство изменяется со временем по закону (3.27), и, вследствие (3.30), (3.31), распределение богатства сходится к вырожденному $\lim_{t\to\infty} w(\delta, t) = W(t)\delta_D(\delta - \delta_l)$, ставка процента стремится к $\hat{r} = i + \gamma + \delta_l$.

Покажем, что δ_l не может быть отрицательной. Предположим противное: $\delta_l < 0$. Тогда, начиная с некоторого момента времени $\tilde{t}$, выполняется неравенство $\hat{r} - i - \gamma < 0$. По определению (3.34), $x(t) \geq -(\beta - 1)(\hat{r} - i - \gamma) > 0 > \delta_l$. Но неравенство $x(t) > \delta_l$ противоречит тому, что δ_l - точная нижняя грань остающихся в системе коэффициентов дисконтирования. Следовательно, $\delta_l \geq 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если существует предел $\dot{\tau}/\tau$ при $t \to \infty$, Теорему 2 можно легко обобщить на случай $\tau \neq const$. В этом случае в системе остаются только коэффициенты дисконтирования, большие, чем

$$\delta_l = -(\beta - 1) \lim_{t\to\infty} \dot{\tau}/\tau\ ,$$

Так как время τ систематически уменьшается с внедрением новых технологий денежного обращения, $\delta_l > 0$, и это утверждение обуславливает некоторый оптимальный положительный коэффициент дисконтирования.

Приложение

Решение дифференциального уравнения для темпа инфляции

Исследуем сходимость решения уравнения (3.17) к (3.18) при малых ζ для всех начальных значений $i(0) = i_0$.

Нетрудно показать, что если пара функций (y, z) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\zeta\frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{\tau} - (z - y + \gamma - \rho + \frac{\dot{\tau}}{\tau})(1 - \pi - b\gamma) \tag{A1}$$

$$\frac{dy}{dt} = (z - y)(z - y + \gamma - \rho + \frac{\dot{\tau}}{\tau}) \tag{A2}$$

с начальными условиями

$$z(0) = i_0,\ y(0) = 0, \tag{A3}$$

то их разность $i = z - y$ является решением дифференциального уравнения (3.17) с начальным условием $i(0) = i_0$.

Легко проверить, что система (A1)-(A3) удовлетворяет всем условиям теоремы Тихонова и теоремы Васильевой [7]. При этом единственным (а также изолированным и глобально асимптотически устойчивым) корнем правой части уравнения (A1) является

$$\bar{z} = \bar{y} + \rho - \gamma - \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)}. \qquad (A4)$$

В силу теоремы Васильевой решение системы (A1)-(A3) можно разложить по параметру ζ в ряд, состоящий из регулярной и сингулярной части. При этом старшим членом регулярной части будет $(\bar{y}, \bar{z})$, где

$$\bar{y} = \int_0^t \left(\rho - \gamma - \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)}\right) \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)} dt',$$

а старший член сингулярной части затухает за время порядка ζ для z и тождественно равен 0 для y. Используя (A4), получаем

$$\bar{i} = \bar{z} - \bar{y} = \rho - \gamma - \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\pi}{\tau(1 - \pi - b\gamma)}. \qquad (A5)$$

В силу теоремы Тихонова и теоремы Васильевой решение i дифференциального уравнения (3.17) равно (A5) с точностью до малого параметра ζ вне пограничного слоя шириной порядка нескольких ζ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуриев С.М. "Модель формирования сбережений и спроса на деньги: I" *Математическое моделирование*, 1994, т.6, N7, стр.25-40

2. Patinkin, D. Money, Interest and Prices, N.Y., 1965, цит. по Макашева Н.А., "Неоклассическая модель "денежной" экономики (критический анализ)". *Экономика и математические методы*, 1979, т.XV, вып.4

3. Bewley, T. "A Difficulty With The Optimum Quantity of Money", *Econometrica*, 1983, Vol.51, No.5

4. Friedman, M. "The Optimum Quantity of Money" // Friedman, M. The Optimum Quantity of Money and Other Essays, Chicago, 1969

5. Крутов А.П., Романко А.В. "Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики". //Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986, С.1-196

6. Гуриев С.М., Поспелов И.Г. "Модель общего равновесия экономики переходного периода" *Математическое моделирование*, 1994, т.6, N2, стр.3-24

7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений М.: Высшая школа 1990, стр.21-36

Поступила в редакцию
25.05.94