С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова, О σ-субнормальности силовских подгрупп в конечной группе,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 286–297

https://www.mathnet.ru/smj7556

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 512.542

О σ–СУБНОРМАЛЬНОСТИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ

С. Ф. Каморников,
В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

Аннотация. Для произвольного разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел приводятся критерии σ-субнормальности силовской подгруппы в конечной группе.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.204

Ключевые слова: конечная группа, разбиение множества всех простых чисел, σ-субнормальная подгруппа, силовская подгруппа.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

Известен следующий критерий субнормальности Виландта [1]: подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$.

Критерий Виландта инициировал вопрос, поставленный А. Н. Скибой в [2] под номером 4.10: *верно ли, что подгруппа H σ-субнормальна в G, если H σ-субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$?*

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы из [3], предложена А. Н. Скибой в [2]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [2], будем говорить, что группа G *σ-примарна*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ σ-примарна. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Группа G называется *σ-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является σ-примарной группой. Из следствия 2 в [4] следует, что вопрос 4.10 имеет положительный ответ в классе всех σ-разрешимых конечных групп. В данной

Исследования первых двух авторов выполнены при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р–291.

работе вопрос 4.10 из [2] исследуется в случае, когда H — силовская подгруппа произвольной конечной группы G.

Главная наша цель — доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и G — группа, каждый неабелев композиционный фактор которой является либо знакопеременной, либо спорадической группой. Силовская подгруппа P группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда P σ-субнормальна в $\langle P, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$.*

Теорема 2. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если $p \in \{2, 3\}$, то силовская p-подгруппа P группы G σ-субнормальна в G тогда и только тогда, когда P σ-субнормальна в $\langle P, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$.*

Ключом к доказательству теорем 1 и 2 является лемма 1.4, которая, устанавливая строение минимального контрпримера, позволяет использовать классификацию простых неабелевых групп. При этом в случае спорадических групп опираемся на работу [5], а также на недавнюю обзорную статью Уилсона [6], дополняющую и уточняющую строение максимальных подгрупп некоторых спорадических групп.

1. Определения и предварительные результаты

В работе используются определения и обозначения, принятые в [5, 7]. Что касается терминологии теории σ-субнормальных подгрупп, то отсылаем читателя к [2, 8]. Отметим, что $[A]B$ (или $A : B$ в обозначениях работы [5]) — полупрямое произведение подгруппы A на подгруппу B; через (m, n) обозначается наибольший общий делитель натуральных чисел m и n.

Основные свойства σ-субнормальных подгрупп, которые многократно используются в доказательствах, приведем в виде лемм. Доказательство первых двух из них осуществляется простой проверкой.

Лемма 1.1. *Пусть H и N — подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда*

(1) *если подгруппа H σ-субнормальна в G, то подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N;*

(2) *если $N \subseteq H$, то подгруппа H σ-субнормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N σ-субнормальна в G/N.*

Лемма 1.2. *Пусть H и K — подгруппы группы G, причем подгруппа H σ-субнормальна в G. Тогда*

(1) *если $K \subseteq H$ и подгруппа K σ-субнормальна в H, то K σ-субнормальна в G;*

(2) *подгруппа $K \cap H$ σ-субнормальна в K;*

(3) *если $H \subseteq K$, то H σ-субнормальна в K.*

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе G существует $\mathfrak{F}$-*радикал* $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G).

Следуя [2], будем говорить, что группа G *σ-нильпотентна*, если она является прямым произведением некоторых σ-примарных групп, т. е. представима в виде прямого произведения своих холловых σ_i-подгрупп для некоторых $i \in I$. Как отмечено в [2], класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является наследственной формацией Фиттинга. Отсюда, в частности, следует, что в любой группе G существует наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа. Эта подгруппа обозначается через $F_\sigma(G)$ и называется *σ-нильпотентным радикалом* группы G.

При доказательстве теорем понадобится также следующая информация о свойствах σ-субнормальных подгрупп группы G.

Лемма 1.3 [2, лемма 2.6]. *Пусть A — σ-субнормальная подгруппы группы G. Если A σ-нильпотентна, то $A \subseteq F_\sigma(G)$.*

Пусть G — группа и P — ее силовская подгруппа. Будем говорить, что пара (G, P) является *контрпримером к вопросу* 4.10, если для любого $x \in G$ подгруппа P σ-субнормальна в $\langle P, x\rangle$, но P не является σ-субнормальной в G. Если среди всех контрпримеров к вопросу 4.10 пара (G, P) такова, что сумма $|G| + |P|$ имеет наименьший порядок, то контрпример (G, P) будем называть *минимальным контрпримером к вопросу* 4.10.

Лемма 1.4. *Если (G, P) — минимальный контрпример к вопросу* 4.10, *то справедливы следующие утверждения:*

(1) *P — группа простого порядка p;*

(2) *G либо простая неабелева группа, либо является почти простой группой, имеет вид $G = [\mathrm{Soc}(G)]P$ и, кроме того, $(|\mathrm{Soc}(G)|, p) = 1$.*

Доказательство. Предположим, что группа G не является простой. Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа. Ввиду леммы 1.1 подгруппа PN/N σ-субнормальна в $\langle PN/N, xP\rangle = \langle P, x\rangle N/N$ для любого $x \in G$. Так как $|G/N| + |PN/N| < |G| + |P|$, из минимальности контрпримера следует, что подгруппа PN/N σ-субнормальна в G/N, а значит, подгруппа PN σ-субнормальна в G. Если $|PN| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа P σ-субнормальна в PN. По лемме 1.2 подгруппа P σ-субнормальна в G. Пришли к противоречию с выбором группы G и ее подгруппы P.

Поэтому полагаем далее, что $G = PN$ и $\mathrm{Core}_G(P) = 1$. Ввиду следствия 1 из [4] подгруппа N не является абелевой.

Рассмотрим подгруппу $P \cap N$, которая, очевидно, является силовской подгруппой в N. Кроме того, ввиду леммы 1.2 для любого $x \in N$ подгруппа $P \cap N$ σ-субнормальна в $\langle P \cap N, x\rangle$. Так как $|N| + |P \cap N| < |G| + |P|$, из минимальности контрпримера следует, что подгруппа $P \cap N$ σ-субнормальна в N, а значит, подгруппа $P \cap N$ σ-субнормальна в G. Пусть $|P| = p^n$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $p \in \sigma_1$. По лемме 1.3 $P \cap N \subseteq F_\sigma(G)$, а значит, $P \cap N \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. Если $P \cap N \neq 1$, то $N \subseteq O_{\sigma_1}(G)$ и G является σ_1-группой. Но тогда подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Таким образом, $P \cap N = 1$. Предположим, что P не является циклической группой. Тогда в P найдутся две различные максимальные подгруппы P_1 и P_2. Из минимальности контрпримера следует, что подгруппа P_1 σ-субнормальна в P_1N. Так как $P_1N \trianglelefteq G$, подгруппа P_1 σ-субнормальна в G. Аналогично подгруппа P_2 σ-субнормальна в G. Ввиду теоремы 1.1 из [9] формация $\mathfrak{N}_\sigma$ обладает решеточным свойством. Поэтому подгруппа $P = \langle P_1, P_2\rangle$ σ-субнормальна в G. Пришли к противоречию с условием.

Следовательно, P — циклическая p-группа. Предположим, что $n > 1$. Пусть D — подгруппа порядка p^{n-1} из P. Рассмотрим подгруппу DN. Подгруппа D, очевидно, является силовской подгруппой в DN. Так как D нормальна в P, ввиду леммы 1.2 она будет σ-субнормальной в подгруппе $\langle D, x\rangle$ для любого $x \in G$. Поскольку $|DN| + |D| < |G| + |P|$, из минимальности контрпримера следует, что подгруппа D σ-субнормальна в G. По лемме 1.3 D содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$-радикале группы G. Так как D является σ_1-группой, $D \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. Если $D \neq 1$, то ввиду $\mathrm{Core}_G(P) = 1$ имеем, что $D \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. Стало быть, группа $G = PN$ является σ_1-группой и подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

Таким образом, $D = 1$, т. е. P является группой простого порядка p, $P \cap N = 1$ и $G = [N]P$. Так как P — силовская p-подгруппа группы G, то $(|N|, p) = 1$.

Предположим, что подгруппа N не является простой. Тогда она представляется в виде $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$, где $t > 1$ и $N_1, N_2, \ldots, N_t$ — изоморфные простые группы. При этом N_1 не является σ_1-группой, так как в противном случае P σ-субнормальна в G. Как следует из 1.1.40 в [10], $t = |G : N_G(N_1)| = |G : N| = |P| = p$. Подгруппа P сопряжением действует транзитивно на множестве $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. Так как $|P| = p$ — простое число, очевидно, что $P = \langle h\rangle$ для всякого неединичного элемента $h \in P$. Поэтому для каждого N_i из множества $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ имеем $N_i^h \neq N_i$. Таким образом, P действует на множестве $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ регулярно. Поэтому если Q — силовская q-подгруппа из N_1 для некоторого простого числа q, не принадлежащего σ_1, то $R = Q \times Q^h \times \cdots \times Q^{h^{p-1}}$ — силовская q-подгруппа прямого произведения $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_p$. При этом подгруппа P нормализует R. Поскольку $|PR| < |G|$, ввиду выбора группы G подгруппа P σ-субнормальна в PR. Согласно лемме 1.3 P содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$-радикале подгруппы PR. Отсюда, в частности, следует, что $P \subseteq O_{\sigma_1}(PR)$. Так как P — силовская p-подгруппа группы PR и число q не принадлежит σ_1, то $P = O_p(PR)$. Поскольку P нормализует R, то $PR = P \times R$. Пришли к противоречию с тем, что подгруппа P действует транзитивно на множестве $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. Следовательно, $t = 1$ и подгруппа N является простой.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть M_1, M_2, … , M_k — подгруппы группы G, имеющие неабелевы композиционные факторы S_1, S_2, … ,S_k соответственно, причем порядок силовской p-подгруппы P группы G делит $|S_i|$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Если для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ силовские p-подгруппы групп S_i σ-субнормальны в S_i и, кроме того, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \pi(S_i) = \pi(G)$, то подгруппа P σ-субнормальна в G. Более того, $\pi(G) \subseteq \sigma_1$, где σ_1 — компонента разбиения σ, содержащая число p.*

Доказательство следует из лемм 1.1 и 1.2.

Лемма 1.6. *Пусть G — простая неабелева группа, силовская 3-подгруппа которой имеет порядок 3. Тогда $G \in \{PSL_2(q), PSL_3(q), PSU_3(q), J_1\}$.*

Доказательство. Пусть сначала G — группа лиевского типа.

1. $G \simeq A_n(q)$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{(n+1, q-1)} q^{n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n} (q^{i+1} - 1),$$

для $q = p^k$, где p — простое число. Очевидно, что $p \neq 3$. Следовательно, либо $q-1$, либо $q+1$ делится на 3. Если $n \geq 3$, то

$$|G| = \frac{1}{(n+1, q-1)} q^{n(n+1)/2}(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)\prod_{i=4}^{n}(q^{i+1}-1)$$

или

$$|G| = \frac{1}{(n+1, q-1)} q^{n(n+1)/2}(q-1)^3(q+1)^2(q^2+q+1)(q^2+1)\prod_{i=4}^{n}(q^{i+1}-1).$$

Отсюда, очевидно, $|G|$ делится на 9, что невозможно. Таким образом, $n \leq 2$ и $G \simeq PSL_2(q)$ или $G \simeq PSL_3(q)$.

2. $G \simeq {}^2A_n(q), n > 1$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{(n+1, q+1)} q^{n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}(q^{i+1}-(-1)^{i+1})$$

для $q = p^k$, где p — простое число. Очевидно, что $p \neq 3$. Следовательно, либо $q-1$, либо $q+1$ делится на 3. Если $n \geq 3$, то

$$|G| = \frac{1}{(n+1, q+1)} q^{n(n+1)/2}(q-1)^2(q+1)^3(q^2-q+1)(q^2+1)\prod_{i=4}^{n}(q^{i+1}-(-1)^{i+1}).$$

Отсюда следует, что 9 делит $|G|$. Последнее невозможно. Таким образом, $n = 2$ и $G \simeq PSU_3(q)$.

3. $G \in \{B_n(q),\ n > 1;\ C_n(q),\ n > 2;\ D_n(q),\ n > 3;\ G_2(q);\ F_4(q);\ E_6(q);\ E_7(q);\ E_8(q);\ {}^2D_n(q),\ n > 3;\ {}^3D_4(q);\ {}^2F_4(q);\ {}^2E_6(q)\}$. Рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в пп. 1, 2, показывают, что порядок любой группы из указанного списка всегда делится на 9.

4. $G \simeq {}^2B_2(q)$, $q = 2^{2k+1} > 2$. Группы Судзуки являются $3'$-группами.

5. $G \simeq {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2k+1} > 3$. Очевидно, что $|G|$ делится на 9.

Пусть $G \simeq A_n$ — знакопеременная группа, где $n \geq 5$. Так как $A_5 \simeq PSL_2(4) \simeq PSL_2(5)$, данный случай рассмотрен. При $n \geq 6$ очевидно, что порядок силовской 3-подгруппы знакопеременной группы A_n делится на 9.

Если G — простая спорадическая группа, то из [5] следует, что $G \simeq J_1$.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть (G, P) — контрпример минимального порядка. Ввиду леммы 1.4 справедливы следующие утверждения: P — группа простого порядка p; G либо простая неабелева группа, либо является почти простой группой, имеет вид $G = [\operatorname{Soc}(G)]P$ и, кроме того, $(|\operatorname{Soc}(G)|, p) = 1$. Обозначим через σ_1 компоненту, содержащую p. Так как силовская 2-подгруппа простой неабелевой группы имеет порядок, больший 2, то $p > 2$.

1. $\operatorname{Soc}(G) \simeq A_n$, где $n \geq 5$.

Если $n \neq 6$, то $\operatorname{Aut}(A_n) = S_n$ и $|S_n : A_n| = 2$. Группа внешних автоморфизмов группы A_6 имеет порядок 4. Отсюда следует, что $G \simeq A_n$. Если $n = n_1 n_2$, где $n_1 \geq 2$ и $n_2 \geq 2$, то p не делит n. Следовательно, p делит $(n-1)!$. Поэтому силовская p-подгруппа P группы G содержится в простой неабелевой группе A_{n-1}, где $|A_n : A_{n-1}| = n$ (группа A_5 не содержит собственных подгрупп порядка 15, поэтому не может быть минимальным контрпримером). Так как силовская p-подгруппа группы G σ-субнормальна в простой неабелевой группе A_{n-1}, то $\pi(A_{n-1}) \subseteq \sigma_1$. Поскольку n — составное число, $\pi(A_{n-1}) = \pi(A_n)$ и $\pi(G) \subseteq \sigma_1$, т. е. G — σ_1-группа. Но тогда подгруппа P σ_1-субнормальна в G; противоречие.

Следовательно, $n = p$. Пусть $h = (1, 2, \dots, p)$ и $g = (1, 2, 3)$. Тогда $hgh^{-1}g^{-1} = (2, p, 3)$. По лемме 1.2 из [11] $\langle h, h^g \rangle$ — примитивная группа. Так как $\langle h, h^g \rangle$ содержит 3-цикл g, по теореме 13.3 из [12] $\langle h, h^g \rangle \simeq A_p$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G.

2. $\mathrm{Soc}(G)$ — спорадическая группа.

Ввиду [5] группа внешних автоморфизмов спорадической группы имеет порядок 1 или 2. Отсюда следует, что G — простая неабелева группа.

2.1. $G \simeq M_{11}$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 11$. В обоих случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq L_2(11)$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

2.2. $G \simeq M_{12}$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 11$. В обоих случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq M_{11}$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

2.3. $G \simeq J_1$. Ввиду [5] либо $p = 3$, либо $p = 5$, либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 19$.

Пусть $p = 3$. Группа G содержит максимальную подгруппу типа $19 : 6$, и любая максимальная подгруппа, порядок которой делится на 19, имеет такой же тип. Рассмотрим максимальную в G подгруппу $F = T : L \simeq Z_{19} : Z_6$, где $T = \langle t \rangle$, $L = \langle l \rangle$. Очевидно, что $\langle l^2 \rangle = P$. Если для любого элемента $g \in G$ подгруппа P нормализует T^g, то $N_G(T)$ содержит порождение $\langle T^{g^{-1}} \mid g \in G \rangle$ и T нормальна в G, что невозможно. Поэтому найдется элемент $g \in G$ такой, что P не нормализует T^g. Тогда $\langle P, T^g \rangle = G$; противоречие.

Пусть $p = 5$. Группа G не содержит собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 5 и на 19. Поэтому порождение элемента порядка 5 и элемента порядка 19 совпадает со всей группой, что противоречит минимальности контрпримера.

Пусть $p = 7$. Ввиду теоремы 1 из [13] найдется элемент $g \in G$ такой, что $\langle P, P^g \rangle$ — неразрешимая группа. Однако, как следует из [5], в J_1 нет собственных неразрешимых подгрупп, порядок которых делится на 7. Снова пришли к противоречию с выбором группы G и ее подгруппы P.

Пусть $p = 11$. Как следует из [5], в J_1 нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 11 и на 19. Поэтому найдется элемент $g \in G$ порядка 19 такой, что $\langle P, g \rangle = G$. А это противоречит выбору группы G и ее подгруппы P.

Пусть, наконец, $p = 19$. Тогда приходим к противоречию, как в случае $p = 11$.

2.4. $G \simeq M_{22}$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 7$, либо $p = 11$. Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq L_3(4)$ и $M_2 \simeq L_2(11)$. Если $|P| = 5$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. По лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Как следует из [5], в M_{22} нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 7 и на 11. Поэтому при $p = 7$ найдется элемент $g \in G$ порядка 11 такой, что $\langle P, g \rangle = G$. Это противоречит выбору группы G и ее подгруппы P. Аналогично приходим к противоречию в случае $p = 11$.

2.5. $G \simeq HJ$. Ввиду [5] $p = 7$. Как следует из [5], в HJ нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 5 и на 7. Поэтому при $p = 7$ найдется элемент $g \in G$ порядка 5 такой, что $\langle P, g\rangle = G$. Пришли к противоречию с выбором группы G и ее подгруппы P.

2.6. $G \simeq M_{23}$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 23$.

Пусть $p = 5$. Как следует из [5], в M_{23} нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 5 и на 23. Поэтому найдется элемент $g \in G$ порядка 23 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие.

Пусть $p = 7$. Так как в M_{23} нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 7 и на 23, найдется элемент $g \in G$ порядка 23 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие.

Пусть $p = 11$. Так как $P \subseteq M_1 \simeq M_{22}$, то $\{2, 3, 5, 7, 11\} \subseteq \sigma_1$. Кроме того, $P \subseteq M_2 \simeq Z_{23} : Z_{11}$, причем подгруппа P самонормализуема в M_2. Поэтому $23 \in \sigma_1$. Следовательно, $\pi(G) \subseteq \sigma_1$. Но в этом случае подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $p = 23$. Ввиду теоремы 1 из [13] найдется элемент $g \in G$ такой, что $\langle P, P^g\rangle$ — неразрешимая группа. Однако, как следует из [5], в M_{23} нет собственных неразрешимых подгрупп, порядок которых делится на 23. Следовательно, $\langle P, P^g\rangle = G$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G и ее подгруппы P.

2.7. $G \simeq HS$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$. В обоих случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq M_{22}$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

2.8. $G \simeq J_3$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 17$, либо $p = 19$. Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq L_2(16) : 2$ и $M_2 \simeq L_2(19)$. Если $|P| = 5$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. Тогда по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $p = 17$. Так как в J_3 нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 17 и на 19, найдется элемент $g \in G$ порядка 19 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $p = 19$.

2.9. $G \simeq M_{24}$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 23$. Во всех случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq M_{23}$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, то по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

2.10. $G \simeq McL$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$. В обоих случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq M_{22}$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

2.11. $G \simeq He$. Ввиду [5] $p = 11$. Так как в He нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 7 и на 17, найдется элемент $g \in G$ порядка 7 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие.

2.12. $G \simeq Ru$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 13$, либо $p = 19$.

Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq L_2(29)$ и $M_1 \simeq L_2(13) : 2$. Если $|P| = 7$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. По лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $p = 13$. Так как в Ru нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 13 и на 29, найдется элемент $g \in G$ порядка 29 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $p = 19$.

2.13. $G \simeq Suz$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 13$.

Пусть $p = 7$. Так как в Suz нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 7 и на 11, найдется элемент $g \in G$ порядка 11 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $p = 11$.

Пусть $p = 13$. Так как в Suz нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 13 и на 11, найдется элемент $g \in G$ порядка 11 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие.

2.14. $G \simeq O'N$. Ввиду [5] либо $p = 11$, либо $p = 19$, либо $p = 31$.

Пусть $p = 11$. Так как в $O'N$ нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 11 и на 31, найдется элемент $g \in G$ порядка 31 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие.

Пусть $p = 19$. Так как в $O'N$ нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 19 и на 31, найдется элемент $g \in G$ порядка 31 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $p = 19$.

2.15. $G \simeq Co_3$. Тогда ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 23$.

Во всех случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq M_{23}$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, то по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

2.16. $G \simeq Co_2$. Тогда ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 23$.

Во всех случаях P содержится в подгруппе $M_1 \simeq M_{23}$. Так как $\pi(M_1) = \pi(G)$, по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

2.17. $G \simeq Fi_{22}$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 13$.

Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq 2{\cdot}U_6(2)$ и $M_2 \simeq O_7(3)$. Если $|P| = 7$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. По лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $p = 11$. Так как в Fi_{22} нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 11 и на 13, найдется элемент $g \in G$ порядка 13 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $p = 13$.

2.18. $G \simeq HN$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 19$.

Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq 2{\cdot}HS.2$ и $M_2 \simeq U_3(8) : 3$. Если $|P| = 7$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. Тогда по лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $p = 11$. Так как в HN нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 11 и на 19, найдется элемент $g \in G$ порядка 19 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $p = 19$.

2.19. $G \simeq Ly$. Ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 31$, либо $p = 37$, либо $p = 67$. При этом для каждого простого $p \in \{7, 11, 31, 37, 67\}$ найдется элемент $g \in G$ простого порядка q такой, что $\langle P, g\rangle = G$ ($q = 67$ для $p = 7$, $q = 37$ для $p = 11$, $q = 37$ для $p = 31$ $q = 67$ для $p = 37$, $q = 7$ для $p = 67$); противоречие.

2.20. $G \simeq Th$. Тогда ввиду [5] либо $p = 13$, либо $p = 19$, либо $p = 31$. При этом для каждого простого $p \in \{13, 19, 31\}$ найдется элемент $g \in G$ простого порядка q такой, что $\langle P, g\rangle = G$ ($q = 31$ для $p = 13$, $q = 31$ для $p = 19$, $q = 19$ для $p = 31$); противоречие.

2.21. $G \simeq Fi_{23}$. Тогда ввиду [5] либо $p = 7$, либо $p = 11$, либо $p = 13$, либо $p = 17$, либо $p = 23$. Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq 2.Fi_{23}$ и

$M_2 \simeq 2^{11}.M_{23}$. Если $p \in \{7, 11\}$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. По лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Для каждого простого $p \in \{13, 17, 23\}$ найдется элемент $g \in G$ простого порядка q такой, что $\langle P, g\rangle = G$ ($q = 23$ для $p = 13$, $q = 23$ для $p = 17$, $q = 17$ для $p = 23$); противоречие.

2.22. $G \simeq Co_1$. Ввиду [5] либо $p = 11$, либо $p = 13$, либо $p = 23$.

Группа G содержит подгруппы $M_1 \simeq Co_2$ и $M_2 \simeq 3{}^{\cdot}Suz : 2$. Если $p = 11$, то P содержится в $M_1 \cap M_2$, причем $\pi(M_1) \cup \pi(M_2) = \pi(G)$. По лемме 1.5 подгруппа P σ-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $p = 13$. Так как в Co_2 нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 13 и на 23, найдется элемент $g \in G$ порядка 23 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $p = 23$.

2.23. $G \simeq J_4$. Ввиду [5] либо $p = 5$, либо $p = 7$, либо $p = 23$, либо $p = 29$, либо $p = 31$, либо $p = 37$, либо $p = 43$.

Пусть $p = 7$. Так как в J_4 нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 7 и на 37, найдется элемент $g \in G$ порядка 37 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие.

Для каждого простого $p \in \{5, 23, 29, 31, 37\}$ найдется элемент $g \in G$ порядка 43 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $p = 43$.

2.24. $G \simeq Fi_{24}'$. Тогда ввиду [5] либо $p = 11$, либо $p = 13$, либо $p = 17$, либо $p = 23$, либо $p = 29$.

Пусть $p \in \{11, 13, 17, 23\}$. Так как в Fi_{24}' нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на p и на 29, найдется элемент $g \in G$ порядка 29 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $p = 29$.

2.25. $G \simeq B = F_{3+}$. Ввиду [5] либо $p = 11$, либо $p = 13$, либо $p = 17$, либо $p = 19$, либо $p = 23$, либо $p = 31$, либо $p = 47$.

Пусть $p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 31\}$. Так как в F_{3+} нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на p и на 47, найдется элемент $g \in G$ порядка 47 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $p = 47$.

2.26. $G \simeq M$. Ввиду [5, 6] либо $p = 17$, либо $p = 19$, либо $p = 23$, либо $p = 29$, либо $p = 31$, либо $p = 41$, либо $p = 47$, либо $p = 59$, либо $p = 71$.

Пусть $p \in \{17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59\}$. Так как в M нет собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на p и на 71, найдется элемент $g \in G$ порядка 71 такой, что $\langle P, g\rangle = G$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $p = 71$.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Ввиду леммы 1.4 достаточно рассмотреть случай, когда P — силовская 3-подгруппа группы G.

Пусть (G, P) — контрпример минимального порядка. Тогда, в частности, $\langle P, x\rangle$ — собственная подгруппа группы G для любого $x \in G$. Кроме того, согласно лемме 1.4 G является либо простой неабелевой группой с силовской 3-подгруппой порядка 3, либо имеет вид $G = [\mathrm{Soc}(G)]P$, где $(|\mathrm{Soc}(G)|, 3) = 1$.

В первом случае G принадлежит списку простых неабелевых групп из леммы 1.6. Во втором случае $\mathrm{Soc}(G) \simeq Sz(2^{2n+1})$, где $2n+1>1$. Поэтому имеет место один из следующих случаев.

1. $G \simeq PSL_2(q)$. Описание максимальных подгрупп в группе $PSL_2(q)$ можно найти, например, в теореме II.8.27 из [14] (далее будем использовать эту теорему без дополнительных ссылок). Пусть сначала $q=2^k \geq 4$. Группа G содержит максимальные диэдральные подгруппы порядков $2(q\pm 1)$. Предположим, что 3 делит $q+1$. Обозначим через L циклическую подгруппу порядка $q-1$. Тогда, очевидно, порождение $\langle P, L\rangle$ совпадает с G, что противоречит выбору группы. Аналогично приходим к противоречию в случае, если 3 делит $q-1$.

Пусть $q=p^k$, где p — нечетное простое число. Тогда при $q>11$ группа G содержит максимальные диэдральные подгруппы порядков $q\pm 1$ с циклическими подгруппами порядков $(q\pm 1)/2$. Далее, как в случае $p=2^k$, найдется элемент $x \in G$ такой, что $\langle P, x\rangle = G$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G.

Поэтому $q \leq 11$. Случай $G \simeq PSL_2(5)$ рассмотрен выше, так как $PSL_2(5) \simeq SL_2(4)$. Предположим, что $G \cong PSL_2(7)$. Группа G содержит максимальную подгруппу типа $7:3$. Более того, любая максимальная подгруппа, порядок которой делится на 7, имеет такой же тип. Пусть $F=T:P$, где $T \simeq Z_7$, $P \simeq Z_3$. Если для всех $g \in G$ подгруппа P нормализует T^g, то $N_G(T)$ содержит порождение $\langle P^{g^{-1}} \mid g \in G\rangle = G$. Следовательно, T нормальна в G. Последнее невозможно. Поэтому найдется элемент $g \in G$ такой, что P не нормализует T^g, а значит, $\langle T^g, P\rangle = G$, что противоречит выбору группы G. Случай $G \simeq PSL_2(9)$ невозможен, так как 9 делит $|G|$. Пусть, наконец, $G \cong PSL_2(11)$. Обозначим через T подгруппу в G порядка 11 и рассмотрим порождение $\langle T, P\rangle$. Поскольку G не содержит собственных подгрупп, порядок которых одновременно делится на 3 и на 11, то $\langle T, P\rangle = G$; противоречие.

2. $G \simeq PSL_3(q)$. Тогда

$$|G| = \frac{1}{(3, q-1)} q^3(q^2-1)(q^3-1)$$

или

$$|G| = \frac{1}{(3, q-1)} q^3(q-1)^2(q+1)(q^2+q+1).$$

Так как $(3, q)=1$, либо $q-1$, либо $q+1$ делится на 3. Пусть 3 делит $q-1$. В этом случае $q=3t+1$ и $q^2+q+1 = 9t^2+9t+3$ и поэтому 3 делит q^2+q+1. Таким образом, 3^2 делит $|G|$, что невозможно.

Следовательно, 3 делит $q+1$. Так как $(3, q-1)=1$, то $G \simeq SL_3(q)$. Список всех максимальных подгрупп группы $SL_3(q)$ приведен в табл. 8.3 из [15]. В частности, из нее следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $F=T:P$, где $T=\langle t\rangle$ — циклическая $3'$-группа порядка q^2+q+1. Кроме того, если подгруппа M максимальна в G и $|M|$ делится на q^2+q+1, то M является группой типа $(q^2+q+1):3$. Далее, как в п. 1 для группы $PSL_2(7)$, показывается, что существует элемент $g \in G$ такой, что $\langle T^g, P\rangle = G$; противоречие.

3. $G \simeq PSU_3(q)$. Тогда

$$|G| = \frac{1}{(3, q+1)} q^3(q^2-1)(q^3+1)$$

или

$$|G| = \frac{1}{(3, q+1)} q^3 (q-1)(q+1)^2 (q^2 - q + 1).$$

Ясно, что 3 делит либо $q-1$, либо $q+1$. Предположим, что 3 делит $q+1$. Тогда $q = 3t-1$, $q^2 - q + 1 = 9t^2 - 9t + 3$ и $q^2 - q + 1$ делится на 3. Отсюда следует, что $|G|$ делится на 9. Последнее невозможно.

Следовательно, 3 делит $q-1$ и $G \simeq SU_3(q)$. Список всех максимальных подгрупп группы $SU_3(q)$ приведен в [15]. В частности, из табл. 8.4 в [15] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $F = T : P$, где $T = \langle t \rangle$ — циклическая $3'$-группа порядка $q^2 - q + 1$. Из табл. 8.4 в [15] также следует, что если подгруппа M максимальна в G и $|M|$ делится на $q^2 - q + 1$, то M является группой типа $(q^2 - q + 1) : 3$. Далее, как в п. 1 для группы $PSL_2(7)$, показывается, что существует элемент $g \in G$ такой, что $\langle T^g, P \rangle = G$; противоречие.

4. $G \simeq J_1$. Ввиду теоремы 1 этот случай невозможен.

5. $\mathrm{Soc}(G) \simeq Sz(2^{2k+1})$, где $2k+1 > 1$. В этом случае $G = [\mathrm{Soc}(G)]\langle h \rangle$, где $|h| = 3$. Пусть T — подгруппа из $\mathrm{Soc}(G)$, изоморфная тору порядка $q + \sqrt{2q} + 1$. Подгруппа $T = \langle t \rangle$ является циклической и содержится только в максимальной подгруппе типа $(q + \sqrt{2q} + 1) : 4$ цоколя группы G. Так как $(|\mathrm{Soc}(G)|, 3) = 1$, можно считать, что $\langle h \rangle$ нормализует T. Поскольку подгруппа T не нормальна в G, найдется элемент $g \in G$ такой, что $\langle h^g \rangle$ не нормализует T. Если $\langle T, \langle h^g \rangle \rangle \neq G$, то $\langle T, \langle h^g \rangle \rangle = (T : L) : \langle h^g \rangle$, где L изоморфна Z_2 или Z_4 и h^g нормализует T, что невозможно. Таким образом, $\langle T, \langle h^g \rangle \rangle = G$. Снова пришли к противоречию.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt H.* Kriterien für Subnormalität in endlichen Gruppen // Math. Z. 1974. Bd 138, Heft 3. S. 199–203.
2. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
3. *Wielandt H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209–244.
4. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* Об одном критерии σ-субнормальности подгруппы в конечной $3'$-группе // Изв. вузов. Математика. 2020. № 8. С. 36–43.
5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of sporadic groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
6. *Wilson R. A.* Maximal subgroups of sporadic groups. arXiv:1701.02095v2 [math.GR]. 19 Jan 2017.
7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
8. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. V. 4, N 3. P. 281–309.
9. *Каморников С. Ф.* Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$-субнормальность // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1065–1080.
10. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. New York: Springer-Verl., 2006.
11. *Wiegold J., Williamson A. G.* The factorization of the alternating and symmetric groups // Math. Z. 1980. Bd 175. S. 171–179.
12. *Wielandt H.* Finite permutation groups. New York: Acad. Press., 1964.
13. *Guest S., Levy D.* Criteria for solvable radical membership via p-elements // J. Algebra. 2014. V. 415. P. 88–111.
14. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

15. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013.

Поступила в редакцию 8 августа 2020 г.
После доработки 8 августа 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Каморников Сергей Федорович
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Международный университет «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com

Шеметкова Ольга Леонидовна
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru