V. A. Malyshev, A theorem on intersection with the k-dimensional barycenter,
Algebra i Analiz, 2005, Volume 17, Issue 4, 115–124

https://www.mathnet.ru/eng/aa680

Алгебра и анализ
Том 17 (2005), №4

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ С k-МЕРНЫМ БАРИЦЕНТРОМ

© В. А. МАЛЫШЕВ

Для многомерного аналога барицентра доказывается многомерный аналог следующего утверждения: если при непрерывном отображении симплекса каждая грань переходит в себя, то образ пересекает барицентр.

Введение

Настоящая работа появилась благодаря следующей шутливой задаче.

Для строительства дачи математику потребовались доски одинаковой длины в количестве $n+1$. Ему привезли $k+1$ доску различной длины. Как при помощи n распилов математику получить $n+1$ одинаковую доску так, что все остальные k досок оказались короче.

Задача о досках имеет содержательные обобщения.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ полиномы

$$f(t) = (t-a_1)\dots(t-a_k)(t-x_1)\dots(t-x_n),$$

где корни $0 < a_1 < \dots < a_k < 1$ фиксированы, а корни $0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 1$ свободны. Совокупность свободных и фиксированных корней делит отрезок $[0,1]$ на $n+k+1$ часть. На каждом таком подотрезке полином $f(t)$ имеет некоторое максимальное отклонение, площадь подграфика и длину графика. Будет дано геометрическое доказательство следующих утверждений.

Для k фиксированных корней можно указать n свободных корней так, что $n+1$ максимальное отклонение одинаковы, а остальные k их не больше.

Для k фиксированных корней можно указать n свободных корней так, что $n+1$ площадь подграфика одинаковы, а остальные k их не больше.

Ключевые слова: барицентр.

Для k фиксированных корней можно указать n свободных корней так, что $n+1$ длина графика одинаковы, а остальные k их не больше.

При $k=0$ в первом утверждении мы встречаемся с полиномами Чебышева!

§1. Задача о пересечении

Рассмотрим единичный симплекс

$$\Delta^n = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

размерности $n \geqslant 1$. Барицентром симплекса Δ^n называется точка

$$\mathrm{bar}\Delta^n = \frac{1}{n+1}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n+1}).$$

Для граней симплекса Δ^n размерности $n-1$ мы используем обозначение

$$\Delta_p^n = \{\lambda \in \Delta^n : \lambda_p = 0\}.$$

Хорошо известно, что граница

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{p=0}^{n} \Delta_p^n$$

симплекса Δ^n не является его ретрактом [1].

Для упрощения формулировок будем использовать следующее полезное обозначение. Пусть в топологическом пространстве X заданы подпространства $X_1, \dots, X_m$, а в топологическом пространстве Y заданы подпространства $Y_1, \dots, Y_m$. Запись

$$F : (X; X_1, \dots, X_m) \longrightarrow (Y; Y_1, \dots, Y_m)$$

означает, что для непрерывного отображения

$$F : X \longrightarrow Y$$

при всех $1 \leqslant i \leqslant m$ выполнены включения $F(X_i) \subset Y_i$.

Лемма. *Для любого непрерывного отображения*

$$F : (\Delta^n; \Delta_0^n, \dots, \Delta_n^n) \longrightarrow (\Delta^n; \Delta_0^n, \dots, \Delta_n^n)$$

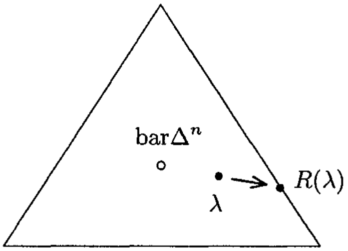
имеет место соотношение

$$F(\Delta^n) \cap \mathrm{bar}\Delta^n \neq \varnothing.$$

Доказательство. Предположим, что $F(\Delta^n) \subset \Delta^n \setminus \mathrm{bar}\Delta^n$, и получим противоречие. Построим стандартную ретракцию

$$R:\ \Delta^n \setminus \mathrm{bar}\Delta^n \longrightarrow \partial\Delta^n.$$

Для этого возьмем точку $\lambda \in \Delta^n \setminus \mathrm{bar}\Delta^n$, проведем луч из точки $\mathrm{bar}\Delta^n$ через точку λ и определим $R(\lambda)$ как пересечение этого луча с границей $\partial\Delta^n$:



Включение $F(\Delta^n) \subset \Delta^n \setminus \mathrm{bar}\Delta^n$ позволяет определить отображение

$$f = R \circ F$$

симплекса Δ^n на его границу $\partial\Delta^n$. Отображение

$$f|_{\partial\Delta^n}:\ \partial\Delta^n \longrightarrow \partial\Delta^n$$

переводит грани симплекса Δ^n в себя, поэтому гомотопно тождественному отображению

$$\mathrm{id}:\ \partial\Delta^n \longrightarrow \partial\Delta^n.$$

Соответствующая гомотопия имеет вид

$$h(\lambda,\tau) = (1-\tau)f(\lambda) + \tau\lambda.$$

Пара $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ является парой Борсука [1], поэтому гомотопия

$$h:\ \partial\Delta^n \times [0,1] \longrightarrow \partial\Delta^n$$

может быть продолжена до гомотопии

$$H:\ \Delta^n \times [0,1] \longrightarrow \partial\Delta^n.$$

В этом случае отображение

$$r(\lambda) = H(\lambda, 1)$$

оказывается ретракцией симплекса Δ^n на свою границу $\partial\Delta^n$. Полученное противоречие доказывает лемму. •

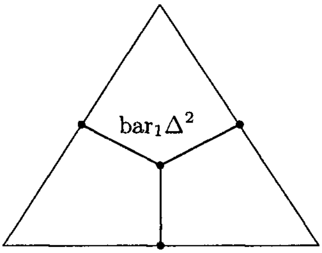
Для обобщения леммы нам потребуется конструкция k-мерного барицентра. Будем действовать по индукции. Определим 0-мерный барицентр по правилу

$$\mathrm{bar}_0\Delta^n = \mathrm{bar}\Delta^n.$$

Далее, определим k-мерный барицентр как объединение джойнов

$$\mathrm{bar}_k\Delta^n = \bigcup_{p=0}^{n} \mathrm{bar}_0\Delta^n * \mathrm{bar}_{k-1}\Delta^n_p.$$

Иными словами, мы определяем k-мерный барицентр $\mathrm{bar}_k\Delta^n$ как объединение отрезков, соединяющих 0-мерный барицентр $\mathrm{bar}_0\Delta^n$ со всеми точками $(k-1)$-мерных барицентров $\mathrm{bar}_{k-1}\Delta^n_p$ всех граней симплекса Δ^n. Например, одномерный барицентр $\mathrm{bar}_1\Delta^2$ образован из трех отрезков:



В случае симплекса Δ^{n+k} точки k-мерного барицентра обладают следующим свойством. Если точка принадлежит k-мерному барицентру $\mathrm{bar}_k\Delta^{n+k}$, то у нее $n+1$ координат одинаковы, а остальные k их не больше.

Это экстремальное свойство k-мерного барицентра $\mathrm{bar}_k\Delta^{n+k}$ делает содержательной следующую задачу. При каких X и $X_0, \ldots, X_{n+k}$ для любого непрерывного отображения

$$F : (X; X_0, \ldots, X_{n+k}) \longrightarrow (\Delta^{n+k}; \Delta^n_0, \ldots, \Delta^{n+k}_{n+k})$$

имеет место соотношение

$$F(X) \cap \mathrm{bar}_k\Delta^{n+k} \neq \varnothing?$$

Далее, мы считаем, что X — клеточное пространство размерности n, а $X_0, \ldots, X_{n+k}$ — клеточные подпространства размерности $n-1$. При $k=0$ ответ на поставленный вопрос содержится в лемме.

§2. Теорема о пересечении

Введем в рассмотрение n-мерный симплекс

$$\nabla^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1\}$$

возрастающих векторов и зададим операцию

$$x \longmapsto x_{\leqslant}$$

перестановки координат вектора x в порядке возрастания, например,

$$(1,4,1,2)_{\leqslant} = (1,1,2,4).$$

Фиксируем точки

$$0 < a_1 < \cdots < a_k < 1$$

и определим функции $y_0(x)$, $y_1(x)$, $\ldots$, $y_{n+k+1}(x)$ по правилу

$$\Big(y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{n+k+1}(x)\Big) = \Big(0, a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_n, 1\Big)_{\leqslant}.$$

Положим

$$\nabla_p^n = \{x \in \nabla^n : \ y_p(x) = y_{p+1}(x)\}.$$

Непрерывное отображение

$$F : \left(\nabla^n;\ \nabla_0^n, \ldots, \nabla_{n+k}^n\right) \longrightarrow \left(\Delta^{n+k};\ \Delta_0^{n+k}, \ldots, \Delta_{n+k}^{n+k}\right)$$

будем называть связанным.

Для построения связанного отображения

$$F : \ \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

отрезку $[y_p(x), y_{p+1}(x)]$ необходимо сопоставить неотрицательную величину $F_p(x)$ так, чтобы величина $F_p(x)$ обращалась в нуль, когда отрезок $[y_p(x), y_{p+1}(x)]$ вырождается в точку. Примеры связанных отображений имеются во Введении.

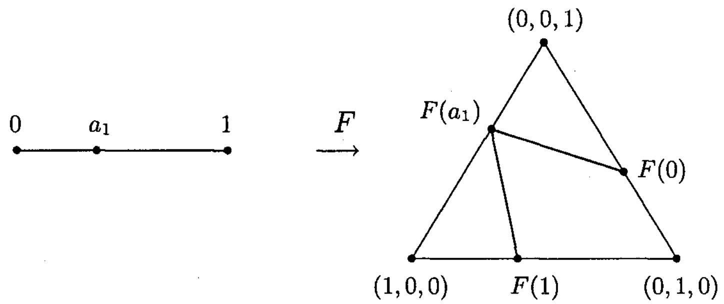
Связанные отображения

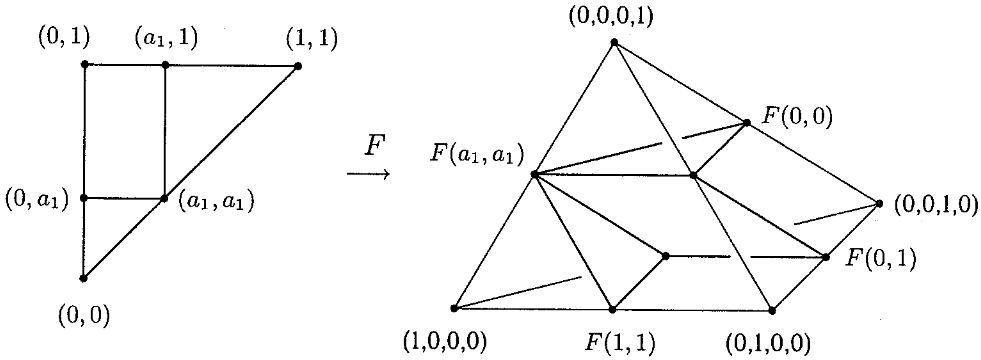
$$F : \ \nabla^1 \longrightarrow \Delta^2$$

и

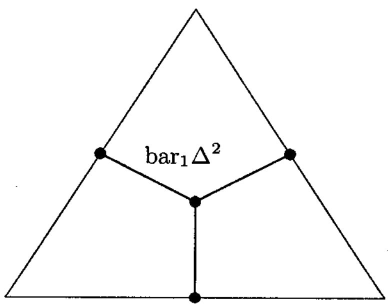
$$F : \ \nabla^2 \longrightarrow \Delta^3$$

действуют так:

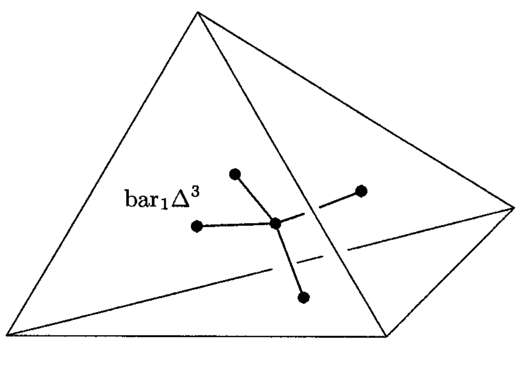




Взгляд на одномерные барицентры



и



приводит к следующей теореме.

Теорема. *Для любого непрерывного отображения*

$$F:\ \left(\nabla^n;\ \nabla^n_0,\dots,\nabla^n_{n+k}\right)\longrightarrow\left(\Delta^{n+k};\ \Delta^{n+k}_0,\dots,\Delta^{n+k}_{n+k}\right)$$

имеет место соотношение

$$F(\nabla^n)\cap \mathrm{bar}_k(\Delta^{n+k})\neq\varnothing.$$

Доказательство. При $k=0$ доказательство следует из леммы. Допустим, что при $k\geqslant 1$ для связанного отображения

$$F:\ \nabla^n\longrightarrow\Delta^{n+k}$$

имеет место включение

$$F(\nabla^n)\subset\Delta^{n+k}\setminus \mathrm{bar}_k\Delta^{n+k}.$$

Получим противоречие.

Обозначим через $\mathrm{ske}_{n-1}\Delta^{n+k}$ объединение граней размерности $n-1$ симплекса Δ^{n+k}. Построим ретракцию

$$R:\ \Delta^{n+k}\setminus \mathrm{bar}_k\Delta^{n+k}\longrightarrow \mathrm{ske}_{n-1}\Delta^{n+k}.$$

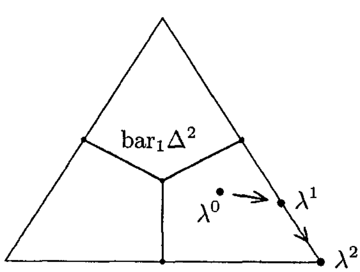
Пусть

$$\lambda^0\in\Delta^{n+k}\setminus \mathrm{bar}_k\Delta^{n+k}.$$

Проведем луч из точки $\mathrm{bar}\Delta^{n+k}$ через точку λ^0 и обозначим через λ^1 пересечение этого луча с границей симплекса Δ^{n+k}. Пусть $\lambda^1\in\Delta^{n+k}_{p_1}$, где $0\leqslant p_1\leqslant n+k$. Тогда

$$\lambda^1\in\Delta^{n+k}_{p_1}\setminus \mathrm{bar}_{k-1}\Delta^{n+k}_{p_1}.$$

Проведем луч из точки $\mathrm{bar}\Delta^{n+k}_{p_1}$ через точку λ^1 и обозначим через λ^2 пересечение этого луча с границей симплекса $\Delta^{n+k}_{p_1}$:



В результате $k+1$ перемещения исходной точки λ^0 в симплексе Δ^{n+k} будет построена последовательность λ^0, λ^1, ..., λ^k, λ^{k+1}. Зададим отображение R по правилу

$$R:\ \lambda^0 \longmapsto \lambda^{k+1}.$$

Отображение R является искомой ретракцией.

Включение $F(\nabla^n) \subset \Delta^{n+k} \backslash \mathrm{bar}_k \Delta^{n+k}$ позволяет определить отображение

$$f = R \circ F$$

симплекса Δ^{n+k} на остов $\mathrm{ske}_{n-1}\Delta^{n+k}$. Поскольку ретракция R переводит грани симплекса Δ^{n+k} в себя, отображение

$$f:\ \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

является связанным.

Зададим непрерывное отображение

$$g:\ \nabla^n \longrightarrow \Delta^n$$

по правилу

$$g_q(x) = \sum_{p:\ [y_p(x), y_{p+1}(x)] \subset [x_q, x_{q+1}]} f_p(x),$$

где $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = 1$. Легко видеть, что отображение g является связанным

$$g:\ \left(\nabla^n;\ \nabla^n_0, \dots, \nabla^n_n\right) \longrightarrow \left(\Delta^n;\ \Delta^n_0, \dots, \Delta^n_n\right).$$

Поскольку $f(\nabla^n) \subset \mathrm{ske}_{n-1}\Delta^{n+k}$ и любая точка остова $\mathrm{ske}_{n-1}\Delta^{n+k}$ имеет не более n ненулевых координат, имеет место включение $g(\nabla^n) \subset \partial\Delta^n$. Это противоречит вытекающему из леммы случаю $k = 0$. Теорема доказана. •

§3. Следствия

Содержательные следствия теоремы о пересечении появляются в задачах о полиномах

$$f(t) = (t - a_1)\dots(t - a_k)(t - x_1)\dots(t - x_n)$$

с фиксированными

$$0 < a_1 < \dots < a_k < 1$$

и свободными

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 1$$

корнями. В задаче про максимальные отклонения связанное отображение

$$F:\ \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

строится так:

$$F_p(x) = \frac{1}{\sum\limits_{q=0}^{n+k} \|f\|_{C[y_q(x),y_{q+1}(x)]}} \|f\|_{C[y_p(x),y_{p+1}(x)]}.$$

В других задачах связанные отображения строятся аналогично.

Интересен вопрос об единственности экстремальных полиномов. Этот вопрос эквивалентен вопросу о количестве точек в пересечении

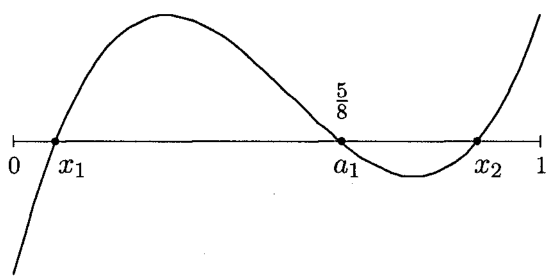
$$F(\nabla^n) \cap \operatorname{bar}_k(\Delta^{n+k}).$$

Расположение образа $F(\nabla^n)$ в симплексе Δ^{n+k} и вид k-мерного барицентра $\operatorname{bar}_k(\Delta^{n+k})$ не исключают существование нескольких точек.

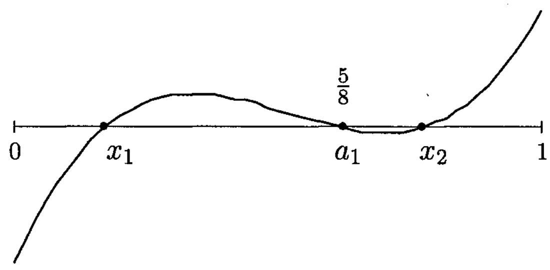
В заключение — два примера. При $k = 1$ и $n = 2$ полином

$$f(t) = (t - a_1)(t - x_1)(t - x_2)$$

имеет один фиксированный и два свободных корня. При должном выборе свободных корней x_1 и x_2 полином



имеет 3 одинаковых отклонения, а полином



имеет 3 одинаковых площади подграфика.

Список литературы

[1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.

Рыбинская
государственная авиационная
технологическая академия
Россия
E-mail: wmal@ryb.adm.yar.ru

Поступило 10 сентября 2004 г.