2000. Т. 36, № 10. С. 1324 — 1330

УДК 517.927.25

О МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

А. С. Макин

В настоящей работе, являющейся продолжением [1], рассматривается нелокальная краевая задача типа Бицадзе — Самарского на интервале $(0,1)$

$$u'' + \mu^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + \varepsilon u(1) = \alpha_0 u'(0) + \sum_{l=1}^{m} \alpha_l u'(\xi_l), \tag{1}$$

где ε, α_0, α_l, $l = \overline{1,m}$, — произвольные комплексные числа, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m < \xi_{m+1} = 1$. При $\alpha_0 = 0$ задача (1) предложена для изучения в [2]. В [3] показано, что система собственных и присоединенных функций $\{u_n(x)\}$ задачи (1) полна в $L_2(0,1)$ и существует биортогонально сопряженная к ней система функций $\{v_n(x)\}$. В [3] установлено, что

$$|\operatorname{Im} \mu_n| \le M, \tag{2}$$

где $\mu_n^2 = \lambda_n$ — собственные значения задачи (1), $\operatorname{Re} \mu_n \ge 0$, M — некоторая постоянная. Всюду запись $\|f\|$ будет означать $\|f\|_{L_2(0,1)}$.

Теорема. *Если все ξ_l — рациональные числа, то для любого n*

$$\|u_n\|\|v_n\| \le C(|\mu_n| + 1). \tag{3}$$

Доказательство. Если все $\alpha_l = 0$, $l = \overline{1,m}$, то задача (1) становится классической двухточечной задачей. Тогда при $\alpha_0 \ne \pm 1$ краевые условия являются усиленно регулярными [4, с. 98, 99], откуда вытекает справедливость оценки

$$\|u_n\|\|v_n\| \le C_1, \tag{4}$$

более сильной, чем (3). При $\varepsilon = 0$, $\alpha_0 = 1$ задача (1) есть известная (см., например, [5]) задача Самарского — Ионкина, а при $\varepsilon = 0$, $\alpha_0 = -1$ указанная задача рассмотрена в [6, с. 340]. В обоих случаях известно, что выполняется оценка (4). Если $\varepsilon \ne 0$, $\alpha_0 = \pm 1$, то задача (1) охватывается теоремой 1 из [1]. Отсюда, в частности, следует, что при $\varepsilon \ne 0$ собственные значения λ_n асимптотически простые.

Предположим, не все α_l ($l = \overline{1,m}$) равны нулю. Легко видеть, что характеристический определитель $\Delta(\mu)$ задачи (1) представляется в виде $\Delta(\mu) = -2i\mu\omega(\mu)$, где $\omega(\mu) = \cos\mu - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \cos(\xi_l \mu) - \alpha_0 - (\varepsilon/\mu)\sin\mu$.

По условию теоремы $\xi_l = p_l/q_l$, где p_l, q_l — натуральные числа. Пусть k — наименьшее общее кратное чисел q_l. Заменой переменной $\mu = k\rho$ уравнение $\omega(\mu) = 0$ преобразуется к виду

$$\cos(k\rho) - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \cos(k_l \rho) - \alpha_0 + (\varepsilon/(k\rho))\sin(k\rho) = 0,$$

где $1 \le k_l < k$. Согласно [7, с. 84], последнее уравнение может быть записано в виде

$$\tilde{\Delta}(\rho) = A \prod_{i=1}^{2k} \sin((\rho - \rho_i)/2) + (\varepsilon/(k\rho))\sin(k\rho) = 0, \tag{5}$$

где $A \neq 0$ — некоторая постоянная, $0 \leq \operatorname{Re}\rho_i < 2\pi$ (числа ρ_i могут совпадать). Обозначим первое слагаемое в левой части (5) через $\tilde{\Delta}_0(\rho)$. Очевидно, что в правой полуплоскости уравнение

$$\tilde{\Delta}_0(\rho) = 0 \tag{6}$$

имеет корни $\rho_{i,n} = \rho_i + 2\pi n$, где $i = \overline{1,2k}$, $n = 0,1,2,\ldots$

Пусть $r = \min|\rho_{i,n} - \rho_{j,m}|/4$, если $\rho_i \neq \rho_j$, а $\Gamma(\rho_{i,n}, r)$ — окружность радиуса r с центром в точке $\rho_{i,n}$. Легко видеть, что вне указанных окружностей $|\tilde{\Delta}_0(\rho)| \geq c_1 > 0$. Если $\varepsilon = 0$, то $\tilde{\Delta}_0(\rho) = \tilde{\Delta}(\rho)$. Обозначим через τ_j корни уравнения (6) такие, что $0 \leq \operatorname{Re}\tau_j < 2\pi$, и занумерованные без учета кратности. Пусть $\tau_{j,n} = \tau_j + 2\pi n$, где $j = \overline{1,L}$, $L \leq 2k$, $n = 0,1,2,\ldots$, $S_{j,n}$ — корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_{j,n} = (k\tau_{j,n})^2$. В работе [3] показано, что $S_{j,n}$ образуют безусловный базис в пространстве $L_2(0,1)$. Выбирая в каждом из подпространств $S_{j,n}$ ортонормированный базис $\{u_{j,n}^{[h]}\}$ ($h = \overline{1, \dim S_{j,n}}$), получаем [8, с. 414, 415], что объединение указанных ортонормированных базисов есть базис Рисса в $L_2(0,1)$ и, стало быть, справедлива оценка (4).

Рассмотрим случай $\varepsilon \neq 0$. Так как все корни уравнения (5) удовлетворяют условию (2), то стандартными рассуждениями, связанными с применением теоремы Руше, находим, что все достаточно большие по абсолютной величине корни уравнения (5) расположены внутри окружностей $\Gamma(\rho_{i,n}, r)$ и внутри каждой из этих окружностей функции $\tilde{\Delta}(\rho)$ и $\tilde{\Delta}_0(\rho)$ имеют равное число корней.

Пусть ρ_i — корень кратности p ($1 \leq p \leq 2k$) уравнения (6). Тогда $\tilde{\Delta}_0(\rho) = \sin^p((\rho - \rho_i)/2)T_i(\rho)$, где $T_i(\rho) = A \prod\limits_{\rho_j \neq \rho_i} \sin((\rho - \rho_j)/2)$. Легко видеть, что внутри окружностей $\Gamma(\rho_{i,n}, r)$

$$c_2 \leq |T_i(\rho)| \leq c_3, \quad |T_i'(\rho)| \leq c_4 \tag{7}$$

($c_2 > 0$). Осуществляя в (5) замену $\rho = \rho_i + 2\pi n + z$, где $|z| \leq r$, получаем уравнение

$$F_{i,n}(z) = \sin^p(z/2) + (-1)^{np}\varepsilon(\sin(k\rho_i)\cos(kz) + \sin(kz)\cos(k\rho_i))/(k(\rho_i + 2\pi n + z)T_i(\rho_i + 2\pi n + z)) = 0. \tag{8}$$

Из (7) и (8) вытекает, что $\sin^p(z/2) = O(n^{-1})$, откуда следует, что

$$z = O(n^{-1/p}). \tag{9}$$

Таким образом, все достаточно большие по абсолютной величине корни уравнения (5) имеют вид

$$\tilde{\rho}_{i,n} = \rho_{i,n} + \delta_{i,n}, \tag{10}$$

где $|\delta_{i,n}| \leq c_5 n^{-1/p}$, $i = \overline{1,2k}$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ Отсюда следует, что все достаточно большие по абсолютной величине корни уравнения $\Delta(\mu) = 0$ образуют $2k$ серий

$$\mu_{i,n} = k(\rho_i + 2\pi n + \delta_{i,n}), \tag{11}$$

$i = \overline{1,2k}$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ Заметим также, что

$$\Delta'(\mu_{i,n}) = -2\sqrt{-1}\mu_{i,n}\omega'(\mu_{i,n}) = -2\sqrt{-1}\tilde{\rho}_{i,n}\tilde{\Delta}'(\tilde{\rho}_{i,n}). \tag{12}$$

Далее рассмотрим два случая.

1) Пусть $\sin(k\rho_i) \neq 0$. Выделяя в (8) по формуле Маклорена главную часть при $z \to 0$, используя (7), (9), находим, что уравнение (8) может быть записано в виде

$$z^p - \beta_{i,n}/n = R_{i,n}(z), \tag{13}$$

где $0 < c_6 \leq |\beta_{i,n}| \leq c_7$, $R_{i,n}(z) = O(n^{-1-1/p})$, $R_{i,n}'(z) = O(n^{-1})$. Обозначим выражение в левой части (13) через $f_{i,n}(z)$. Очевидно, что $f_{i,n}(z) = \prod\limits_{j=1}^{p}(z - z_j)$, где z_j — корни уравнения $f_{i,n}(z) = 0$. Легко видеть, что

$$c_8 n^{-1/p} \leq |z_j| \leq c_9 n^{-1/p}, \quad |z_l - z_j| \geq c_{10} n^{-1/p} \tag{14}$$

($c_8 > 0$, $c_{10} > 0$) при $l \neq j$. Пусть $0 < \sigma < 1/p$. Из (14) следует, что если $|z - z_j| = (c_{10}/4)n^{-1/p-\sigma}$, то справедливо неравенство $|f_{i,n}(z)| \geq c_{11}n^{-1-\sigma}$ ($c_{11} > 0$). Из последнего неравенства, (13) и теоремы Руше вытекает, что при всех достаточно больших n внутри окружности $|z - z_j| = (c_{10}/4)n^{-1/p-\sigma}$ уравнения $f_{i,n}(z) = 0$ и (13) имеют равное число корней, значит, внутри указанной окружности уравнение (13) имеет ровно один корень $\tilde{z}_j$, причем

$$\tilde{z}_j = z_j + O(n^{-1/p-\sigma}). \tag{15}$$

Отсюда и из (14) находим, что при $l \neq j$

$$c_{12}n^{-1/p} \leq |\tilde{z}_l - z_j| \leq c_{13}n^{-1/p}, \quad c_{14}n^{-1/p} \leq |\tilde{z}_l - \tilde{z}_j| \leq c_{15}n^{-1/p} \tag{16}$$

($c_{12} > 0$, $c_{14} > 0$). Из наших рассуждений также следует, что при всех достаточно больших n $\tilde{\rho}_{i,n} \neq \tilde{\rho}_{j,n}$, $1 \leq i < j \leq 2k$, откуда вытекает, что собственные значения задачи (1) асимптотически простые.

Оценим функцию $\tilde{\Delta}'(\rho)$ при $\rho = \tilde{\rho}_{i,n}$. Легко видеть, что при любом l ($l = \overline{1,p}$)

$$f'_{i,n}(\tilde{z}_l) = \sum_{\gamma=1}^{p} \prod_{1\leq j\leq p, j\neq\gamma} (\tilde{z}_l - z_j) = \prod_{1\leq j\leq p, j\neq l} (\tilde{z}_l - z_j) + \sum_{1\leq\gamma\leq p, \gamma\neq l} \prod_{1\leq j\leq p, j\neq\gamma} (\tilde{z}_l - z_j) = \Omega_1 + \Omega_2$$

(при $p = 1$, $\Omega_2 = 0$). Из (16) следует, что $c_{16}n^{(1-p)/p} \leq |\Omega_1| \leq c_{17}n^{(1-p)/p}$, а из (15), (16) —

$$\Omega_2 = (\tilde{z}_l - z_l) \sum_{1\leq\gamma\leq p, \gamma\neq l} \prod_{1\leq j\leq p, j\neq\gamma, j\neq l} (\tilde{z}_l - z_j) = O(n^{(1-p)/p-\sigma}),$$

откуда находим, что $c_{18}n^{(1-p)/p} \leq |f'_{i,n}(\tilde{z}_l)| \leq c_{19}n^{(1-p)/p}$. Из последнего неравенства, (8) и (13) получаем, что $c_{20}n^{(1-p)/p} \leq |F'_{i,n}(\tilde{z}_l)| \leq c_{21}n^{(1-p)/p}$ или $c_{22}n^{(1-p)/p} \leq |\tilde{\Delta}'(\tilde{\rho}_{i,n})| \leq c_{23}n^{(1-p)/p}$. Отсюда и из (12) вытекает оценка

$$c_{24}n^{1/p} \leq |\Delta'(\mu_{i,n})| \leq c_{25}n^{1/p}, \tag{17}$$

где $c_{24} > 0$.

2) Пусть $\sin(k\rho_i) = 0$. Тогда уравнение (8) приводится к виду

$$\sin(z/2)\tilde{F}_{i,n}(z) = 0, \tag{18}$$

где $\tilde{F}_{i,n}(z) = \sin^{p-1}(z/2) + 2(-1)^{np}\varepsilon\cos(k\rho_i)\cos(z/2)P_{k-1}(\cos z)/(k(\rho_i + 2\pi n + z)T_i(\rho_i + 2\pi n + z))$; здесь $P_{k-1}(t)$ — алгебраический многочлен степени $k-1$, причем $P_{k-1}(1) = k$. Очевидно, уравнение (18) имеет корень $z_0 = 0$. Если $p = 1$, то из (7) легко следует, что при всех достаточно больших n $\tilde{F}_{i,n}(z) \neq 0$ при $|z| \leq r$, а также имеет место неравенство $0 < c_{26} \leq |F'_{i,n}(0)| < c_{27}$, откуда вытекает оценка

$$0 < c_{28} \leq |\tilde{\Delta}'(\tilde{\rho}_{i,n})| \leq c_{29}. \tag{19}$$

Если $p > 1$, то аналогично случаю 1), выделяя главную часть функции $\tilde{F}_{i,n}(z)$ при $z \to 0$, находим, что $\tilde{F}_{i,n}(z) = (z^{p-1} - \tilde{\beta}_{i,n}/n + \tilde{R}_{i,n}(z))/2^{p-1}$, где $0 < c_{30} \leq |\tilde{\beta}_{i,n}| \leq c_{31}$, $\tilde{R}_{i,n}(z) = O(n^{-1-1/(p-1)})$, $\tilde{R}'_{i,n}(z) = O(n^{-1})$. Пусть $0 < \sigma < 1/(p-1)$. Рассуждая далее аналогично случаю 1), получаем, что функция $\tilde{F}_{i,n}(z)$ при всех достаточно больших n внутри каждой из окружностей $|z - z_j| = c_{32}n^{-1/(p-1)-\sigma}$ ($c_{32} > 0$), где z_j ($j = \overline{1,p-1}$) — корни уравнения $z^{p-1} - \tilde{\beta}_{i,n}/n = 0$, имеет ровно один корень $\tilde{z}_j = z_j + O(n^{-1/(p-1)-\sigma})$. Так как $c_{33}n^{-1/(p-1)} \leq |z_j| \leq c_{34}n^{-1/(p-1)}$, $|z_l - z_j| \geq c_{35}n^{-1/(p-1)}$ при $j, l = \overline{0,p-1}$, $l \neq j$, то для тех же l и j справедливы неравенства

$$c_{36}n^{-1/(p-1)} \leq |\tilde{z}_l - z_j| \leq c_{37}n^{-1/(p-1)}, \quad c_{38}n^{-1/(p-1)} \leq |\tilde{z}_l - \tilde{z}_j| \leq c_{39}n^{-1/(p-1)}. \tag{20}$$

Отсюда вытекает асимптотическая простота собственных значений задачи (1).

Легко видеть, что $c_{40}n^{-1} \le |F'_{i,n}(0)| \le c_{41}n^{-1}$, значит, $c_{42}n^{-1} \le |\tilde{\Delta}'(\rho_{i,n})| \le c_{43}n^{-1}$, откуда в соединении с (12) следует, что

$$0 < c_{44} \le |\Delta'(\mu_{i,n})| \le c_{45} \tag{21}$$

для серии $\mu_{i,n} = k(\rho_i + 2\pi n)$ ($n = n_0, n_0+1, \dots$). Оценим $F'_{i,n}(\tilde{z}_j)$ при $j = \overline{1, p-1}$. Очевидно, что $F'_{i,n}(\tilde{z}_j) = \sin(\tilde{z}/2)\tilde{F}'_{i,n}(\tilde{z}_j)$. Аналогично случаю 1), исходя из неравенств (20), находим, что $c_{46}n^{-(p-2)/(p-1)} \le |\tilde{F}'_{i,n}(\tilde{z}_j)| \le c_{47}n^{-(p-2)/(p-1)}$. Отсюда и из неравенства $c_{48}n^{-1/(p-1)} \le$ $\le |\sin(\tilde{z}_j/2)| \le c_{49}n^{-1/(p-1)}$ вытекает, что $c_{50}n^{-1} \le |F'_{i,n}(\tilde{z}_j)| \le c_{51}n^{-1}$, значит, $c_{52}n^{-1} \le$ $\le |\tilde{\Delta}'(\tilde{\rho}_{i,n})| \le c_{53}n^{-1}$, откуда в соединении с (12) следует, что

$$0 < c_{54} \le |\Delta'(\mu_{i,n})| \le c_{55} \tag{22}$$

для всех серий корней $\mu_{i,n}$, соответствующих числам z_j ($j = \overline{1, p-1}$), где $n = n_0, n_0+1, \dots$ Из (17), (19), (21) и (22) следует, что во всех случаях

$$|\Delta'(\mu_{i,n})| \ge c_{56} > 0. \tag{23}$$

Оценим произведение $u_n(x)\overline{v_n(\xi)}$. Согласно [4, с. 47] (см. также [3]), функция Грина $G(x,\xi,\mu)$ задачи (1) выражается формулой $G(x,\xi,\mu) = H(x,\xi,\mu)/\Delta(\mu)$, где

$$H(x,\xi,\mu) = \begin{vmatrix} e^{i\mu x} & e^{-i\mu x} & g(x,\xi) \\ B_1(e^{i\mu x}) & B_1(e^{-i\mu x}) & B_1(g) \\ B_2(e^{i\mu x}) & B_2(e^{-i\mu x}) & B_2(g) \end{vmatrix}; \tag{24}$$

здесь $g(x,\xi) = (2\mu)^{-1}\sin(\mu|x-\xi|)$, $B_1(u) = u(0)$, $B_2(u) = u'(1) + \varepsilon u(1) - \alpha_0 u'(0) - \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_l u'(\xi_l)$. Очевидно, $B_1(g) = (2\mu)^{-1}\sin(\mu\xi)$. Легко видеть, что при $\xi_j < \xi < \xi_{j+1}$, $j = \overline{0, m}$,

$$B_2(g) = \Big(\cos(\mu(1-\xi)) + \alpha_0\cos(\mu\xi) + \sum_{l=1}^{j} \alpha_l \cos(\mu(\xi_l - \xi)) -$$

$$- \sum_{l=j+1}^{m} \alpha_l \cos(\mu(\xi_l - \xi))\Big)/2 + \varepsilon(2\mu)^{-1}\sin(\mu(1-\xi)).$$

Раскрывая определитель (24), находим, что при $\xi_j < \xi < \xi_{j+1}$, $j = \overline{0, m}$,

$$H(x,\xi,\mu) = e^{i\mu x}\Big(\cos(\mu(1-\xi)) + \alpha_0\cos(\mu\xi) + \sum_{l=1}^{j} \alpha_l\cos(\mu(\xi_l-\xi)) - \sum_{l=j+1}^{m} \alpha_l\cos(\mu(\xi_l-\xi)) +$$

$$+\varepsilon\mu^{-1}\sin(\mu(1-\xi))\Big)\Big/2 - e^{i\mu x}\sin(\mu\xi)\Big(-i\Big(e^{-i\mu} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l e^{-i\xi_l\mu}\Big) + \varepsilon\mu^{-1}e^{-i\mu}\Big)\Big/2 -$$

$$-e^{-i\mu x}\Big(\cos(\mu(1-\xi)) + \alpha_0\cos(\mu\xi) + \sum_{l=1}^{j}\alpha_l\cos(\mu(\xi_l-\xi)) - \sum_{l=j+1}^{m}\alpha_l\cos(\mu(\xi_l-\xi)) + \varepsilon\mu^{-1}\sin(\mu(1-\xi))\Big)\Big/2 +$$

$$+e^{-i\mu x}\sin(\mu\xi)\Big(i\Big(e^{i\mu} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l e^{i\xi_l\mu}\Big) + \varepsilon\mu^{-1}e^{i\mu}\Big)\Big/2 + \Delta(\mu)\sin(\mu|x-\xi|)/(2\mu) =$$

$$= i\sin(\mu x)\Big[\cos(\mu(1-\xi)) + \alpha_0\cos(\mu\xi) + \sum_{l=1}^{j}\alpha_l\cos(\mu(\xi_l-\xi)) - \sum_{l=j+1}^{m}\alpha_l\cos(\mu(\xi_l-\xi)) +$$

$$+\varepsilon\mu^{-1}\sin(\mu(1-\xi))\Big] + i\sin(\mu\xi)\cos(\mu(1-x)) - i\alpha_0\sin(\mu\xi)\cos(\mu x) - i\sin(\mu\xi)\sum_{l=1}^{m}\alpha_l\cos(\mu(x-\xi_l)) -$$

$$-\varepsilon\mu^{-1}\sin(\mu\xi)\cos(\mu(1-x)) + \Delta(\mu)\sin(\mu|x-\xi|)/(2\mu). \tag{25}$$

(При $j = 0$ в выражении в квадратных скобках в правой части (25) отсутствует третье слагаемое, а при $j = m$ — четвертое.) Так как нули характеристического определителя $\Delta(\mu)$ асимптотически простые, то при всех достаточно больших n, согласно [4, с. 48, 49],

$$u_n(x)\overline{v_n(\xi)} = -2\mu_n H(x,\xi,\mu_n)/\Delta'(\mu_n). \tag{26}$$

Поскольку в силу (25) $H(x,\xi,\mu_n) = O(1)$, то из (23) и (26) вытекает оценка (3). Теорема доказана.

В ряде случаев удается более точно оценить поведение $\|u_n\|\|v_n\|$ при $n \to \infty$. Из краевого условия $u_n(0) = 0$ следует, что произвольному собственному значению $\mu_n^2 \neq 0$ задачи (1) отвечает собственная функция $u_n(x) = \sin(\mu_n x)$. Пусть $f(n)$ — произвольная функция натурального аргумента, $f(n) > 0$, и пусть собственному значению $\hat{\mu}_n^2$, где $0 < |\mu_n - \hat{\mu}_n| < 1/f(n)$, отвечает собственная функция $\hat{u}_n(x) = \sin(\hat{\mu}_n x)$. Тогда $u_n(x) = \hat{u}_n(x) + O(1/f(n))$. Пусть $v_n(x)$ — функция биортогонально сопряженной системы, стоящая в паре с $u_n(x)$. Рассуждая аналогично [2], находим, что

$$\|u_n\|\|v_n\| \geq c_1 f(n) \tag{27}$$

($c_1 > 0$). Обозначим $\omega_0(\mu) = \cos\mu - \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_l \cos(\xi_l \mu) - \alpha_0$, тогда $w_0(\mu) = Q_k(\cos\rho)$, где $Q_k(t)$ — алгебраический многочлен степени k, $\mu = k\rho$.

1. Пусть $\varepsilon \neq 0$, а $Q_k(t)$ имеет корень $t = 1$ или $t = -1$ кратности p ($1 \leq p \leq k$). Если $t = 1$, то $Q_k(\cos\rho) = A\sin^{2p}(\rho/2) \prod\limits_{\rho_j \neq 0} \sin((\rho - \rho_j)/2)$ ($A \neq 0$) и уравнение (6) имеет, в частности, корни $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{2p} = 0$. Из (20) следует, что $0 < |\mu_{i,n} - \mu_{j,n}| < c_2 n^{1/(1-2p)}$, если $1 \leq i,j \leq 2p$, $i \neq j$. Отсюда и из (27) вытекает, что при любом $i = \overline{1,2p}$ $\|u_{i,n}\|\|v_{i,n}\| \geq$ $\geq c_3 n^{1/(2p-1)}$ ($c_3 > 0$), где $u_{i,n}(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению μ_{in}^2. Заметим, что при $p = 1$ правая часть последнего неравенства имеет тот же порядок роста по n, что и правая часть (3). Аналогично рассматривается случай $t = -1$.

2. Пусть $\varepsilon \neq 0$, а $Q_k(t)$ не имеет корней $t = \cos(\pi j/k)$, где $j = \overline{0,k}$. Тогда уравнение (6) в правой полуплоскости имеет корни $\rho_{i,n} = \rho_i + 2\pi n$, где $i = \overline{1,2k}$, $n = 0,1,\ldots$, $0 \leq \operatorname{Re}\rho_i < 2\pi$, причем для любого i $\sin(k\rho_i) \neq 0$. Пусть также многочлен $Q_k(t)$ имеет лишь кратные корни одной и той же кратности p, $2 \leq p \leq k$, причем все корни лежат на отрезке $[-1,1]$. Очевидно, что все ρ_i вещественны. Из (17) следует, что при всех достаточно больших n

$$c_0 n^{1/p} \leq |\Delta'(\mu_{i,n})| \leq \hat{c}_0 n^{1/p} \tag{28}$$

($c_0 > 0$). Оценим функцию $H(x,\xi,\mu)$. Легко видеть, что при $\xi_j < \xi < \xi_{j+1}$ ($j = \overline{0,m}$) $H(x,\xi,\mu_{i,n}) = H_1(x,\xi,\mu_{i,n}) + H_2(x,\xi,\mu_{i,n})$, где

$$H_1(x,\xi,\mu_{i,n}) = \sqrt{-1}\Bigg[\sin(\mu_{i,n}x)\cos(\mu_{i,n}\xi)\Bigg(\cos\mu_{i,n} + \sum_{l=1}^{j}\alpha_l\cos(\mu_{i,n}\xi_l) - \sum_{l=j+1}^{m}\alpha_l\cos(\mu_{i,n}\xi_l)\Bigg) +$$

$$+ \sin(\mu_{i,n}\xi)\cos(\mu_{i,n}x)\Bigg(\cos\mu_{i,n} - \alpha_0 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l\cos(\mu_{i,n}\xi_l)\Bigg) +$$

$$+ \sin(\mu_{i,n}x)\sin(\mu_{i,n}\xi)\Bigg(2\sin\mu_{i,n} + \sum_{l=1}^{j}\alpha_l\sin(\mu_{i,n}\xi_l) - \sum_{l=j+1}^{m}\alpha_l\sin(\mu_{i,n}\xi_l) - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l\sin(\mu_{i,n}\xi_l)\Bigg)\Bigg], \tag{29}$$

$$H_2(x,\xi,\mu_{i,n}) = \varepsilon(\sqrt{-1}\sin(\mu_{i,n}x)\sin(\mu_{i,n}(1-\xi)) - \sin(\mu_{i,n}\xi)\cos(\mu_{i,n}(1-x)))/\mu_{i,n}.$$

Очевидно, что

$$|H_2(x,\xi,\mu_{i,n})| \leq c_1 n^{-1}. \tag{30}$$

Пусть функция $H_0(x,\xi,\mu)$ определяется равенством (24) при $\varepsilon = 0$. Из (25) следует, что при $\xi_j < \xi < \xi_{j+1}$ ($j = \overline{0,m}$)

$$H_0(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n}) = \sqrt{-1}\sum_{r=1}^{3} A_{r,j}(\mathring{\mu}_{i,n})V_r(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n}), \tag{31}$$

где $V_1(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n}) = \sin(\mathring{\mu}_{i,n}x)\cos(\mathring{\mu}_{i,n}\xi)$, $V_2(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n}) = \sin(\mathring{\mu}_{i,n}\xi)\cos(\mathring{\mu}_{i,n}x)$, $V_3(x,\xi,\mu_{i,n}) = \sin(\mathring{\mu}_{i,n}x)\sin(\mathring{\mu}_{i,n}\xi)$, $A_{1,j}(\mathring{\mu}_{i,n}) = \cos(\mathring{\mu}_{i,n}) + \sum\limits_{l=1}^{j}\alpha_l\cos(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l) - \sum\limits_{l=j+1}^{m}\alpha_l\cos(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l)$, $A_{2,j}(\mathring{\mu}_{i,n}) = \cos\mathring{\mu}_{i,n} - \alpha_0 - \sum\limits_{l=1}^{m}\alpha_l\cos(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l)$, $A_{3,j}(\mu_{i,n}) = 2\sin\mathring{\mu}_{i,n} + \sum\limits_{l=1}^{j}\alpha_l\sin(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l) - \sum\limits_{l=j+1}^{m}\alpha_l\sin(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l) - \sum\limits_{l=1}^{m}\alpha_l\sin(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l)$, $\mathring{\mu}^2_{i,n}$ — собственные значения задачи (1) при $\varepsilon = 0$. Согласно (10), (11), при всех достаточно больших n и любом i, где $i = \overline{1,2k}$, $|\mu_{i,n} - \mathring{\mu}_{i,n}| \le c_2 n^{-1/(2k)}$. Сравнивая правые части (29) и (31), с учетом последнего неравенства находим, что

$$H_1(x,\xi,\mu_{i,n}) - H_0(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n}) = O(n^{-1/(2k)}). \tag{32}$$

Обозначим $K = [0,1]\times[0,1]$, $K_j = [0,1]\times[\xi_j,\xi_{j+1}]$, $j = \overline{0,m}$. Оценим функцию $H_0(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n})$. Очевидно

$$\|H_0(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n})\|^2_{L_2(K)} = \sum_{j=0}^{m}\Bigg(\sum_{r=1}^{3}|A_{r,j}(\mathring{\mu}_{i,n})|^2\|V_r\|^2_{L_2(K_j)} + \\ +2\mathrm{Re}\sum_{1\le\beta<\gamma\le3}A_{\beta,j}(\mathring{\mu}_{i,n})\overline{A_{\gamma,j}(\mathring{\mu}_{i,n})}(V_\beta,V_\gamma)_{L_2(K_j)}\Bigg). \tag{33}$$

Так как все $\mathring{\mu}_{i,n}$ — вещественные числа, то непосредственно проверяется, что при любом j

$$(V_\beta,V_\gamma)_{L_2(K_j)} = O(n^{-1}), \tag{34}$$

если $\beta<\gamma$, и при любых j, r, i, n

$$\|V_r\|_{L_2(K_j)} \ge c_3 > 0. \tag{35}$$

Далее заметим, что для любого $l = \overline{1,m}$ $\sin(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l) = \sin(\mathring{\mu}_{i,n_0}\xi_l)$, $\cos(\mathring{\mu}_{i,n}\xi_l) = \cos(\mathring{\mu}_{i,n_0}\xi_l)$. Отсюда следует, что величина $A_{r,j}(\mathring{\mu}_{i,n})$ не зависит от n. Докажем, что при каждом i хотя бы одно из чисел $A_{r,j}(\mathring{\mu}_{i,n})$ ($r = 1,2,3$, $j = \overline{0,m}$) отлично от нуля. Если все $\alpha_l = 0$, где $l = \overline{1,m}$, то при $\cos\mathring{\mu}_{i,n_0} \ne 0$ $A_{1,j}(\mathring{\mu}_{i,n_0}) \ne 0$, а при $\cos\mathring{\mu}_{i,n_0} = 0$ $A_{3,j}(\mathring{\mu}_{i,n_0}) \ne 0$. Если $\alpha_{l_0} \ne 0$ ($1 \le l_0 \le m$), то при $\cos(\mathring{\mu}_{i,n_0}\xi_{l_0}) \ne 0$ $A_{1,l_0-1}(\mu_{i,n_0}) \ne A_{1,l_0}(\mathring{\mu}_{i,n_0})$, а если $\cos(\mathring{\mu}_{i,n_0}\xi_{l_0}) = 0$, то $\sin(\mu_{i,n_0}\xi_{l_0}) \ne 0$ и, стало быть, $A_{3,l_0-1}(\mu_{i,n_0}) \ne A_{3,l_0}(\mathring{\mu}_{i,n_0})$. Отсюда и из (35) следует, что

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{r=1}^{3}|A_{r,j}(\mathring{\mu}_{i,n})|^2\|V_r\|^2_{L_2(K_j)} \ge c_4 > 0.$$

Из последнего неравенства, (33) и (34) вытекает неравенство $\|H_0(x,\xi,\mathring{\mu}_{i,n})\|_{L_2(K)} \ge c_5 > 0$, учитывая которое, а также соотношения (30), (32), заключаем, что

$$\|H(x,\xi,\mu_{i,n})\|_{L_2(K)} \ge c_6 > 0. \tag{36}$$

Так как $\mu_{i,n}$ — простые нули функции $\Delta(\mu)$, то произведение $u_{i,n}(x)\overline{v_{i,n}(\xi)}$ может быть выражено по формуле (26). Из (28) и (36) получаем, что $c_7|\mu_{i,n}|^{(p-1)/p} \le \|u_{i,n}\|\|v_{i,n}\| \le c_8|\mu_{i,n}|^{(p-1)/p}$ ($c_7 > 0$, $c_8 > 0$).

Исследуя случаи 1 и 2, мы накладываем определенные условия на корни многочлена $Q_k(t)$. Рассмотрим задачу (1), если $\xi_l = l/(m+1)$, $l = \overline{1,m}$. Тогда $k = m+1$ и $Q_k(\cos\rho) = \cos(k\rho) - \sum\limits_{l=1}^{m}\alpha_l\cos(l\rho) - \alpha_0$. Так как [7, с. 86] при любом $n \ge 2$ $\cos(nx) = 2^{n-1}\cos^n x + P_{n-2}(\cos x)$, где $P_{n-2}(t)$ — алгебраический многочлен степени $n-2$, то, выбирая числа α_0, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, можно получить любые наперед заданные коэффициенты у многочлена $Q_k(\cos\rho)$ и, стало быть, любые наперед заданные корни. В частности, для задачи

$$u'' + \mu^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + \varepsilon u(1) = -(3/2)u'(0) + 2u'(1/2),$$

где $\varepsilon \neq 0$, $k = 2$, $Q_2(\cos\rho) = 2(\cos\rho - 1/2)^2$, для любого n справедливо неравенство $c_9|\mu_n|^{1/2} \leq \|u_n\|\|v_n\| \leq c_{10}|\mu_n|^{1/2}$ ($c_9 > 0$, $c_{10} > 0$).

Требование, чтобы все числа ξ_l были рациональными, является существенным. При наличии даже одной иррациональной точки ξ_l оценка (3) может не выполняться. Рассмотрим задачу

$$u'' + \mu^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = u'(\xi), \tag{37}$$

где ξ — некоторое иррациональное число, $0 < \xi < 1$. Тогда $\Delta(\mu) = -2i\mu(\cos\mu - \cos(\xi\mu)) = 4i\mu\sin((1+\xi)\mu/2)\sin((1-\xi)\mu/2)$ и уравнение $\Delta(\mu) = 0$ в правой полуплоскости имеет корни $\mu_0 = 0$, $\mu_n = 2\pi n/(1+\xi)$, $\tilde{\mu}_n = 2\pi n/(1-\xi)$, $n = 0, 1, \ldots$ Отличным от нуля собственным значениям соответствуют собственные функции $u_n(x) = \sin(\mu_n x)$, $\tilde{u}_n(x) = \sin(\tilde{\mu}_n x)$. Пусть $f(q)$ — произвольная функция натурального аргумента, $f(q) > 0$. Обозначим $\varphi(q) = f(q)/(8\pi q)$. В [9, с. 27] построено такое иррациональное число γ, $1/4 < \gamma < 3/4$, что существуют две последовательности натуральных чисел p_n и q_n такие, что

$$|\gamma - p_n/q_n| < \varphi(q_n). \tag{38}$$

Положим $\xi = (1-\gamma)/(1+\gamma)$, тогда $\gamma = (1-\xi)/(1+\xi)$. Из (38) следует, что $0 < |\mu_{q_n} - \tilde{\mu}_{p_n}| = (2\pi/(1-\xi))|\gamma q_n - p_n| < f(q_n)$. Из последнего неравенства и (25) вытекает, что $\|u_{q_n}\|\|v_{q_n}\| \geq c_0/f(q_n)$ ($c_0 > 0$), т.е. для указанной подпоследовательности номеров произведение $\|u_n\|\|v_n\|$ при $n \to \infty$ растет быстрее любой наперед заданной функции от n.

Далее рассмотрим задачу (37), если $\xi = (1-\beta)/(1+\beta)$, где $\beta = 0,12345\ldots$ (в десятичной дроби после запятой последовательно расположены все натуральные числа). Известно [10, с. 122], что существуют две последовательности натуральных чисел p_n и q_n такие, что для любого $\varepsilon > 0$ $0 < |\beta - p_n/q_n| < q_n^{-10+\varepsilon}$. Отсюда следует, что $0 < |\mu_{q_n} - \tilde{\mu}_{p_n}| = (2\pi/(1-\xi))|\beta q_n - p_n| \leq (2\pi/(1-\xi))q_n^{-9+\varepsilon}$. Из последнего неравенства и (27) вытекает, что

$$\|u_{q_n}\|\|v_{q_n}\| \geq c_1 q_n^{9-\varepsilon}. \tag{39}$$

Оценим $\Delta'(\mu)$. Легко видеть, что $\Delta'(\mu_n) = 2i(-1)^n(1+\xi)\mu_n\sin((1-\xi)\mu_n/2) = 2i(-1)^n(1+\xi)\mu_n\sin(\beta\pi n)$. В [10, с. 123] установлено, что для любого натурального k и любого $n > n_0$ $|\beta n - k| > n^{-101}$. Отсюда получаем, что $|\sin(\beta\pi n)| > c_2 n^{-101}$ и, следовательно, $|\Delta'(\mu_n)| > c_3 n^{-100}$. Аналогично находим, что $|\Delta'(\tilde{\mu})| > c_4 n^{-100}$. Из двух последних неравенств и (26) следует, что для любого n $\|u_n\|\|v_n\| \leq c_5 n^{101}$, откуда и из неравенства (39) вытекает существование краевых задач типа (1) с высоким полиномиальным ростом по n произведения норм $\|u_n\|\|v_n\|$.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину и Е. И. Моисееву за внимание к работе.

Литература

1. *Макин А. С.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1058 — 1066.
2. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059 — 2071.
3. *Шкаликов А. А.* // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1982. № 6. С. 12 — 21.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
5. *Ионкин Н. И.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294 — 304.
6. *Коддингтон Э. А. и Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
9. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М., 1987.
10. *Фельдман Н. И.* Приближения алгебраических чисел. М., 1981.

Московская государственная академия приборостроения и информатики

Поступила в редакцию 11 июня 2000 г.