

V. A. Aleksin, V. M. Zubarev, Modeling of free-stream turbulent intensity effect on transitional wall boundary layer flows, *Mat. Model.*, 2008, Volume 20, Number 8, 87–106

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

January 20, 2025, 21:46:25



**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ТУРБУЛЕНТНОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА  
НА ПРИСТЕННЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ**

© 2008 г. В.А. Алексин, В.М. Зубарев

Институт проблем механики РАН  
119526, Россия, Москва, пр. Вернадского 101, к.1  
e-mail: alexsin@ipmnet.ru, zubarev@ipmnet.ruРабота выполнена при финансовой поддержке программы НШ 835-2006.1  
и РФФИ (№ 05-08-33387-а)

Основное внимание сконцентрировано на проблеме замыкания осредненных уравнений пограничного слоя с помощью моделей турбулентности для расчета областей с низкими локальными числами Рейнольдса, анализе влияния параметров с высокой интенсивностью турбулентности в набегающем внешнем потоке на развитие характеристик течения. Рассмотрены для исследования динамических характеристик пристенных пограничных слоев различные варианты как классических, так и модифицированных дифференциальных моделей турбулентности, позволяющие рассчитывать непрерывным образом области с ламинарными, переходными и турбулентными режимами течения, при большой интенсивности турбулентности набегающего потока. Предложены два подхода для улучшенного описания существующих экспериментальных и теоретических данных по структуре перехода в пограничном слое в диапазоне от малых до больших значений локальных чисел Рейнольдса. Детально изучено численными методами влияние масштаба турбулентности набегающего потока на турбулентные характеристики перехода. При обтекании плоской пластинки потоком с большой степенью турбулентности расчетные результаты по  $k-l$  и  $k-\varepsilon$  моделям сопоставлены с тестовыми экспериментальными данными по профилям скорости и интенсивности турбулентности.

**MODELING OF FREE-STREAM TURBULENT INTENSITY EFFECT  
ON TRANSITIONAL WALL BOUNDARY LAYER FLOWS***V.A. Aleksin, V.M. Zubarev*

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow

Under the closure of the averaged boundary layer equations the main attention has been concentrated on the development of turbulence models and numerical methods, the analysis of effect of the free-stream leading and the outer edge turbulence parameters on the transitional characteristics of the flow and turbulence at near a wall. For research of the dynamic and thermal characteristics of the wall boundary layers the different variants of classical and modified one- and two-parametric turbulence models allowing by continuous manner to computer a full stream region with laminar, transitional and turbulent flow regimes at high free stream turbulence intensity have been analysed. The two common research ways for the better description of existing experimental and theoretical research data for the transitional structure of a boundary layer at a variation from low to high local turbulent Reynolds numbers have been proposed. An effect of the scale of free stream turbulence on the averaged dynamic and turbulence characteristics of a transition have been studies numerically in details. The predicted results on the basis of  $k-l$  and a number of  $k-\varepsilon$  models under flow of a flat plate at high turbulence intensity have been compared with the test experimental data on velocity and turbulence intensity profiles.

**1. Введение**

Воздействие масштаба турбулентности  $L_\infty$  набегающего потока на ламинарно-турбулентный переход связано с уровнем интенсивности турбулентности  $Tu_\infty$  и величиной её масштаба  $L_\infty$  [1, 2]. При наличии высокого уровня интенсивности турбулентности набегающего потока  $Tu_\infty > 3\%$  влияние собственного масштаба  $L_\infty$  на переход может быть

заметным как в случае крупномасштабной турбулентности, так и при её умеренных значениях. Повышенный уровень турбулентности в значительной мере интенсифицирует переход и увеличивает величины трения и теплообмена в пограничном слое на поверхности обтекаемого тела не только в областях с турбулентным режимом, но и с ламинарным и переходным.

Причем воздействие масштаба турбулентности на развитие переходных процессов в пограничном слое, согласно экспериментальным данным, сказывается как на местоположении перехода, так и на его протяженности. Кроме того, хотя начальные профили скорости, энергии и масштаба турбулентности могут влиять на переходные зоны в пограничных слоях [3], их роль ограничивается начальной областью расчета.

Из этого следует необходимость развивать дифференциальные модели турбулентности для учета влияния интенсивности и масштаба турбулентности набегающего потока на переходные процессы течения и теплообмена во всех зонах течения.

На основе классических и модифицированных одно- и двухпараметрических моделей турбулентности исследуется эффект влияния степени и масштаба турбулентности набегающего потока на развитие характеристик течения в пограничном слое. Предлагается два различных подхода для лучшего описания экспериментальных [4] и теоретических данных для переходной структуры пограничного слоя при малых и больших турбулентных числах Рейнольдса. Первый подход связан с модификацией существующих моделей турбулентности для непрерывного описания переходной и турбулентной областей [5]. Второй способ основан на эффекте влияния величины масштаба внешней турбулентности  $L_\infty$  [6].

## 2. Постановка задачи

При обычных предположениях теории пограничного слоя и без учета влияния нормальных напряжений Рейнольдса, система уравнений для осредненных характеристик течения двумерного пограничного слоя в сжимаемом однородном совершенном газе для декартовой системы координат  $\xi$ ,  $\zeta$ , связанной с поверхностью тела ( $\zeta = 0$ ), имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho v}{\partial \zeta} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \langle u'v' \rangle \right), \\ u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \zeta} &= \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 - \langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial \zeta} - \rho \langle h'v' \rangle \right), \\ \frac{\partial p}{\partial \zeta} &= 0, \quad p = \rho R_g T, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u$ ,  $v$  – продольная и нормальная компоненты вектора скорости в системе координат  $\xi$ ,  $\zeta$  (координаты  $\xi$ ,  $\zeta$  направлены вдоль и по нормали к поверхности);  $p$  – статическое давление;  $-\rho \langle u'v' \rangle$  – тангенциальное турбулентное напряжение трения;  $\rho$  – вязкость;  $T$  – температура;  $h$  – энтальпия;  $\mu$ ,  $\lambda$  – соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности;  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $R_g$  – газовая постоянная; угловые скобки показывают осреднение по времени, штрихи относятся к флуктуационным величинам.

В уравнениях (1) были сделаны предположения относительно малости членов, содержащих пульсационные составляющие вязкости, скорости и теплопроводности, по сравнению с членами для средних величин.

Здесь первое уравнение системы (1) – уравнение неразрывности, второе – уравнение движения в проекции на координату  $\xi$ , третье – уравнение притока тепла. Статическое давление  $p$  является функцией  $\xi$ .

Граничные условия ставятся на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя. На поверхности используются следующие условия:

$$\zeta = 0, \quad u = 0, \quad \rho v = (\rho v)_w = F(\xi),$$

$$F_1 \left[ \xi, h_w, \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right) \right] = 0 : \quad \frac{h_0}{H_0} = i_w(\xi) \quad \text{или} \quad q_w = q_w(\xi),$$

где  $F, F_1$  – известные функции;  $H_0$  – полная энтальпия;  $q_w$  – тепловой поток;  $i_w$  – температурный фактор; индекс  $w$  относится к величинам, взятым на стенке.

На внешней границе выполняются следующие асимптотические формулы:

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow u_e, \quad h \rightarrow h_e,$$

где распределения скорости  $u_e(\xi)$  и энтальпии  $h_e(\xi)$  находятся из решения уравнений газовой динамики или по данным эксперимента.

Начальные условия по продольной координате  $\xi$  ставятся обычным образом так, чтобы выполнялись условия существования и единственности в некоторой области (в начальном сечении при  $\xi = \xi_0$ ).

### 3. Моделирование турбулентности

При моделировании турбулентного режима течения применяются модели и гипотезы различной сложности для замыкания осредненных уравнений пограничного слоя. Модели делятся на алгебраические и дифференциальные (усложненные) [7]. Большинство методов исследования основывается на концепции турбулентной вязкости и на гипотезах Колмогорова-Прандтля [8, 9].

При рассмотрении здесь теоретических методов предполагается, что выполняется гипотеза Буссинеска о линейной связи напряжения трения  $\tau_t = -\rho \langle u'v' \rangle$  с градиентом скорости  $\partial u / \partial \zeta$  и вводится турбулентная (вихревая) вязкость  $\mu_t$  в случае двумерного пограничного слоя

$$\tau_t = \mu_t \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Для турбулентного теплового потока используется закон Фурье

$$q_t = \frac{\lambda_t}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta}.$$

Турбулентное число Прандтля  $\text{Pr}_t = \mu_t c_p / \lambda_t$  определяется по аналогии с ламинарным числом Прандтля  $\text{Pr}$ .

Эффективные коэффициенты переноса как для алгебраических, так и для дифференциальных моделей турбулентности вводятся одинаковым образом:

$$\mu_\Sigma = \mu + \mu_t, \quad \lambda_\Sigma = \lambda + \lambda_t.$$

Тогда полное напряжение трения  $\tau$  на продольную ось включает напряжение трения  $\mu \partial u / \partial \zeta$  и напряжение Рейнольдса  $-\rho \langle u'v' \rangle$ . Подобная формула получается для полного теплового потока  $q$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \langle u'v' \rangle = \mu_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$q = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} - \rho \langle h'v' \rangle = \frac{\lambda_\Sigma}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta}.$$

После введения полных коэффициентов вязкости и теплопроводности уравнения импульсов и потока тепла для совершенного газа (1) приобретают замкнутую форму, аналогичную для уравнений ламинарного пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\rho_e u}{\rho} \frac{\partial h_e}{\partial \xi} + \frac{\mu_{\Sigma}}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\lambda_{\Sigma}}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right).$$

Для замыкания уравнения системы (2) необходимо выбрать турбулентные модели. Далее используются одно- и двухпараметрические модели турбулентности.

**3.1. Однопараметрическая модель турбулентности.** В однопараметрической модели уравнение переноса для турбулентной кинетической энергии  $k = 1/2 \langle u'_i u'_i \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) используется совместно с турбулентным масштабом  $L$ , который определяется некоторыми предположениями или задается из определенных соотношений. Набегающий поток характеризуется степенью интенсивности турбулентности  $Tu_{\infty}$  в процентах ( $Tu_{\infty}^2 = 10^4 \cdot 2k_{\infty} / (3V_{\infty}^2)$ ) и её масштабом  $L_{\infty}$ .

Уравнение для турбулентной кинетической энергии  $k$  для двумерного стационарного пограничного слоя сжимаемого однородного совершенного газа в декартовой системе координат  $\xi, \zeta$  имеет следующую форму:

$$u \frac{\partial k}{\partial \xi} + v \frac{\partial k}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_{\Sigma k} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) + P_k - \varepsilon_k. \quad (3)$$

Здесь члены в правой части уравнения выражают процессы диффузии, генерации  $P_k$  и скорости диссипации ( $-\varepsilon_k$ ) турбулентной кинетической энергии.

Для однопараметрической модели коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$  определяется в соответствии с гипотезой Колмогорова-Прандтля

$$\mu_t = c'_{\mu} \rho k^{1/2} L, \quad (4)$$

где  $c'_{\mu}$  — эмпирическая константа.

Полный (эффективный) кинематический коэффициент вязкостей  $\mu_{\Sigma k}$  зависит от молекулярной и турбулентной вязкостей ( $\mu, \mu_t$ ) и числа Прандтля  $\sigma_k$  для  $k$

$$\mu_{\Sigma k} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}. \quad (5)$$

При рассмотрении однопараметрических моделей необходимо задать распределение турбулентного масштаба  $L$ , как в модели Прандтля — длину пути смешения. В частности, можно предположить, что

$$L = l_m,$$

где  $l_m$  — длина пути смешения Прандтля.

Применяемая модель полной вязкости (4)–(5) предназначена для предсказания течений с большими локальными числами Рейнольдса, которые соответствуют полностью развитому турбулентному режиму. Ее необходимо модифицировать на случай расчета областей вблизи стенки и малых чисел Рейнольдса (так называемый ламинарный подслой

и буферная зона) и для переходных режимов. Демпфирующий множитель  $f_\mu$  вводится в выражение (5) для  $\mu_t$ :

$$\mu_t = c'_\mu f_\mu \rho k^{1/2} L, \quad f_\mu = 1 - \exp(-c_3^* \zeta^+), \quad (6)$$

$$\zeta^+ = \frac{\zeta u_*}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}, \quad \text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon},$$

где  $\zeta^+$  – безразмерное расстояние от стенки;  $u_*$  – динамическая скорость;  $\tau_w$  – напряжение трения на стенке;  $\nu$  – кинематический коэффициент молекулярной вязкости.

Соответственно скорость диссипации  $\varepsilon_k$  определяется по формуле с введением дополнительной функции  $f_\mu$  в первый член ( $\varepsilon = \varepsilon_k - D$ ):

$$\varepsilon_k = \frac{c_D f_\mu k^{3/2}}{L} + \frac{c_1 \nu k}{\zeta^2}.$$

Генерация  $P_k$  в уравнении (3) находится по формуле

$$P_k = \frac{\tau_t}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Функция  $c_3^*$  связана с толщиной вязкого подслоя  $\eta_*$ , введение которой имеет первостепенное значение для параметров не только развитого турбулентного течения. Она в значительной мере определяет процессы прямого и обратного перехода в пристенных течениях.

Здесь и далее функция  $\eta_*$  дана в форме соотношения от локального числа Рейнольдса по толщине вытеснения  $\text{Re}_\theta = \theta u_e / \nu_e$  ( $\theta = \int_0^\delta u/u_e (1 - u/u_e) d\zeta$ ) и двух параметров  $A_0$ ,  $B_0$ . В общем случае они могут быть связаны с параметрами внешнего турбулентного течения и определять положение и размер области перехода;  $\delta$  – толщина пограничного слоя, вычисляемая по профилю скорости  $u$ , т. е. определяемая расстоянием от стенки, на котором скорость достигает 99.5% от внешней скорости пограничного слоя.

Для вычисления непрерывным образом переходной области ламинарно-турбулентного течения функция  $\eta_*$  представляется в форме ( $A = \lg \text{Re}_\theta$ )

$$\eta_* = Z + B_0 \left[ \exp\left((A - A_0)^2\right) - 1 \right], \quad (7)$$

$$Z = \begin{cases} 10 + 3.58(A - 3.95), & A \leq 3.95, \\ 10, & A > 3.95. \end{cases}$$

Величина  $c_3^*$  определяется параметрами  $\eta_*$  и  $C_0$

$$c_3^* = \frac{C_0}{\eta_*^\alpha}. \quad (8)$$

В вычислениях используется формула (8) только при  $A \leq A_0$ , но если  $A > A_0$ , то  $c_3^* = c_3$ ,  $C_0 = c_3 \eta_*^\alpha(A_0)$ ,  $\alpha = 0.25$ .

В общем случае  $A_0$ ,  $B_0$  (7) являются функциями многих параметров, описывающих переходные процессы в пограничном слое, среди которых могут быть выбраны  $Tu_\infty$ ,  $M_\infty$ ,  $\text{Re}_\infty$  и т. д. Здесь применяется эмпирическая зависимость  $A_0$  от  $Tu_\infty$

$$A_0 = \lg(300 + 2.667 \exp(6.91 - 0.8 Tu_\infty)), \quad B_0 = \text{const}. \quad (9)$$

Модельные константы имеют следующие значения:

$$c'_\mu = c_\mu/c_D, \quad c_\mu = 0.09, \quad c_D = 0.164,$$

$$c_1 = 2, \quad c_3 = 0.029, \quad \sigma_k = 1.$$

Турбулентный масштаб длины  $L$ , так же как в модели Прандтля для длины пути смещения [10], задается эмпирической формулой

$$L = \beta_* \delta \Phi \left( \beta_*, \kappa, \frac{\zeta}{\delta} \right), \quad (10)$$

$$\Phi = \left( 1 - \exp \left( -\frac{2\kappa \zeta}{\beta_* \delta} \right) \right) \left( 1 + \exp \left( -0.75 \frac{2\kappa \zeta}{\beta_* \delta} \right) \right)^{-1},$$

где  $\kappa$  – константа Кармана,  $\kappa = 0.4$ ,  $\beta_* = 0.1$ .

На стенке ставится следующее условие:  $\zeta = 0$ ,  $k = 0$ .

На внешней границе пограничного слоя, где распределение  $k_e(\xi)$  известно, применяется такая асимптотическая формула

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow k_e(\xi).$$

Функция  $k_e(\xi)$  находится из решения системы уравнений невязкого газа при заданном распределении  $u_e(\xi)$ , но при  $u_e \neq 0$ :

$$u_e \frac{dk_e}{d\xi} = -\varepsilon_e.$$

Здесь  $\varepsilon_e = c_D k_e^{1/2} / L_e$ , распределение  $L_e$  вдоль внешней границы пограничного слоя определяется в процессе вычислений.

Начальное условие для функции  $k_e$  ставится в начальном сечении  $\xi = \xi_0$ :

$$k_e(\xi_0) = k_{e0}.$$

На стенке при  $\zeta = 0$  реализованы следующие условия:  $k = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , но  $D_w \neq 0$ ; эта величина определяется из асимптотического предела при  $\zeta \rightarrow 0$ , следующего из уравнения для  $k$ .

**3.2. Двухпараметрические  $k$ - $\varepsilon$  модели.** Двухпараметрические  $k$ - $\varepsilon$  модели имеют два дополнительных дифференциальных уравнения для кинетической энергии турбулентности  $k$  и изотропной части скорости ее диссипации  $\varepsilon$ . Впервые модель переноса кинетической энергии  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  была предложена в [11].

Коэффициент турбулентной вязкости определяется второй формулой Колмогорова–Прандтля. В выражении коэффициента вихревой вязкости  $\nu_t$  функция  $f_\mu$  может включать в качестве аргумента локальное число Рейнольдса  $Re_t$

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (11)$$

В приближении теории пограничного слоя двумерные уравнения для изотропной части диссипации  $\varepsilon$  в системе координат  $\xi, \zeta$  имеют вид

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_{\Sigma \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \right) + P_\varepsilon - (D_\varepsilon + E). \quad (12)$$

Эффективный коэффициент вязкости  $\mu_{\Sigma\varepsilon}$  в уравнении (12) определяется так

$$\mu_{\Sigma\varepsilon} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}.$$

Процесс генерации для скорости диссипации  $\varepsilon$  описывается членом  $P_\varepsilon$ , записанным в явной форме:

$$P_\varepsilon = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2.$$

В варианте модели [12] (модель *A*) функция  $f_\mu$  имеет в качестве аргумента безразмерную координату  $\zeta^+$ . Существенной модификацией модели является то, что константа  $c_3$ , включенная в демпфирующий множитель  $f_\mu$ , заменена на функцию  $c_3^*$ :

$$f_\mu = 1 - \exp(-c_3^* \zeta^+). \quad (13)$$

Члены  $D$ ,  $D_\varepsilon$ ,  $E$  отражают влияние вязкости на диссипативный эффект вблизи стенки и выражаются в следующем виде:

$$D = \frac{2\nu k}{\zeta^2}, \quad D_\varepsilon = c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad E = \frac{2\nu f_4 \varepsilon}{\zeta^2}. \quad (14)$$

Функции  $f_2$ ,  $f_4$  соответственно представляются в форме зависимостей от  $\text{Re}_t$  (6) и  $\zeta^+$

$$f_2 = 1 - 0.22222 \exp\left(-\left(\frac{\text{Re}_t}{6}\right)^2\right), \quad f_4 = \exp(-c_4 \zeta^+).$$

Величины констант в модели (12)–(14) выбраны следующими:

$$(c_\mu, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_3, c_4, \sigma_k, \sigma_\varepsilon) = (0.09, 1.44, 2, 0.0115, 0.5, 1, 1.3).$$

На стенке ставятся такие условия:  $\zeta = 0$ ,  $k = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , но  $D_w \neq 0$ ,  $E_w \neq 0$ . Они определяются из асимптотических условий при  $\zeta \rightarrow 0$ , следующих из уравнений для  $k$ - $\varepsilon$ :

$$D_w = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) \right]_w, \quad E_w = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \right) \right]_w.$$

Величины  $c_3^*$ , так же как в однопараметрической модели, связаны с безразмерной толщиной вязкого подслоя  $\zeta_*^+$  или  $\eta_*$ . Значение  $\eta_*$  определяет переход от ламинарного течения к турбулентному вдоль поверхности тела. Для вычисления непрерывным образом всех областей функция  $\eta_*$  задается следующим образом ( $A = \lg \text{Re}_\theta$ ):

$$\eta_* = Z + B'_0 \left[ \exp\left((A - A'_0)^2\right) - 1 \right].$$

Здесь  $Z$  определяется формулой (7). Функция  $c_3^*$  может быть задана так

$$c_3^* = \frac{C'_0}{\eta_*^\alpha}. \quad (15)$$

Выбор константы  $C'_0$  зависит от величины  $c_3$ . В численных расчетах формула (15) применима только при  $A \leq A'_0$ , но если  $A > A'_0$ , то необходимо взять  $c_3^* = c_3$ ,  $C'_0 = c_3 \eta_*^\alpha(A'_0)$ ,  $A'_0$  вводится по выражению (9) и  $B'_0 = \text{const}$ .

На поверхности ставились следующие граничные условия:

$$\zeta = 0, \quad k = 0, \quad \varepsilon = 0.$$



На внешней границе пограничного слоя, где известны распределения  $k_e(\xi)$ ,  $\varepsilon_e(\xi)$  реализуются граничные условия

$$\zeta \rightarrow 0, \quad k \rightarrow k_e(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_e(\xi).$$

Функции  $k_e(\xi)$ ,  $\varepsilon_e(\xi)$  находятся после расчетов системы уравнений для течения невязкого газа. Они удовлетворяют соответствующим уравнениям с данным распределением  $u_e(\xi)$ , где  $u_e \neq 0$ :

$$\begin{aligned} u_e \frac{dk_e}{d\xi} &= -\varepsilon_e, \\ u_e \frac{d\varepsilon_e}{d\xi} &= -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_e^2}{k_e}. \end{aligned} \tag{16}$$

Начальные условия для функций  $k_e$  и  $\varepsilon_e$  ставятся в начальном сечении  $\xi = \xi_0$ :

$$k_e(\xi_0) = k_{e0}, \quad \varepsilon_e(\xi_0) = \varepsilon_{e0}.$$

Тогда система уравнений (16) имеет решение

$$\begin{aligned} k_e &= k_{e0} \left( 1 - (1 - c_{\varepsilon 2}) \frac{\varepsilon_{e0}}{k_{e0}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{u_e} \right)^{1/(1-c_{\varepsilon 2})}, \\ \varepsilon_e &= \varepsilon_{e0} \left( \frac{k_e}{k_{e0}} \right)^{c_{\varepsilon 2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Решения в области вниз по течению зависят от выбора начальных условий для большинства моделей (при стандартных вариантах констант). В области ламинарного течения задание начальных функций  $k(\xi_0, \zeta)$  и  $\varepsilon(\xi_0, \zeta)$  может быть выполнено различными путями. Начальное условие для  $\varepsilon$  в области развитого турбулентного течения может быть использовано в таком виде

$$\varepsilon(\xi_0, \zeta) = \frac{c_D f_{\mu} [k(\xi_0, \zeta)]^{3/2}}{L(\xi_0, \zeta)} + \varepsilon_{e0} \frac{\zeta}{\delta}.$$

Здесь масштаб турбулентности  $L(\xi_0, \zeta)$  определяется по теории Прандтля как для длины пути смешения (10).

**3.3. Пристеночные  $k$ - $\varepsilon$  модели для несжимаемой жидкости.** Для вязкого несжимаемого однородного течения используются два первых уравнения из (1). Граничные условия для  $k$  и  $\varepsilon$  на внешней границе задаются формулами (17).

Для описания явления перехода выбрана  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности, учитывающая влияние близости стенки и малых турбулентных чисел Рейнольдса. Сравнительный детальный анализ семи различных пристеночных  $k$ - $\varepsilon$  моделей турбулентности и их возможностей по предсказанию турбулентных течений в пограничном слое с градиентом давления (положительным или отрицательным) проведен в [13]. Подробное сравнение совместного влияния параметров внешней турбулентности (ее интенсивности  $Tu_{\infty}$  и масштаба  $L_{\infty}$ ) на развитие течения несжимаемой жидкости в пограничном слое на плоской пластине на основе известных 12 пристеночных моделей  $k$ - $\varepsilon$  дано в [6]. Эти расчеты хорошо согласуются с аналитическими решениями и достоверными экспериментальными данными о характеристиках пограничного слоя на плоской пластине в переходной области и в зоне развитого турбулентного течения.

Модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$  содержат два уравнения в частных производных (уравнения переноса турбулентной кинетической энергии  $k$  и средней скорости диссипации  $\varepsilon$  [14]), которые справедливы в общем случае для больших чисел Рейнольдса  $Re_t > 100$  ( $f_\mu = f_1 = f_2 = 1$ ,  $D = E = 0$ ):

$$u \frac{\partial k}{\partial \xi} + v \frac{\partial k}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) + P_k - \varepsilon - D, \quad (18)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \right) + c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{P_k \varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - E, \quad (19)$$

$$\varepsilon_k = \left\langle \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial \xi_i} \right)^2 \right\rangle.$$

Здесь  $\varepsilon$  – изотропная часть полной скорости энергии диссипации  $\varepsilon_k$ ;  $u_i$  – компоненты вектора скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  соответственно  $i = 1, 2, 3$  (в продольном, нормальном и поперечном направлениях) в тензорной записи;  $f_\mu, f_1, f_2$  – демпфирующие функции, которые обеспечивают моделирование вязких и пристеночных эффектов в уравнениях переноса. Эти функции выбраны такими, что величины их стремятся к единице в области развитого турбулентного пограничного слоя и обращаются в нуль при  $\zeta \rightarrow 0$ . Вблизи стенки доминируют вязкие эффекты и локальные скорости малы. Для расширения области применимости  $k$ - $\varepsilon$  модели различными авторами сделаны модификации ее уравнений, в которых учтено влияние низких чисел Рейнольдса. В частности, добавлены дополнительные источниковые члены  $D$  и  $E$  соответственно в уравнения (18)–(19) для  $k$  и  $\varepsilon$ ; отражено влияние низких чисел Рейнольдса и близости стенки путем введения дополнительных множителей в члены, отвечающие за генерацию и диссипацию турбулентной энергии.

Установлено в [13], что одной из наиболее удачных моделей является модель Лэма-Бремхорста [15]. В последнее время появились новые  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности, записанные для полной скорости диссипации  $\varepsilon_k = \varepsilon + D$ ,  $D = 0$  [16, 17] и [18], которые обладают теми же достоинствами, что и модель [15]. В этих трех моделях используются только три или две пристеночные функции, учитывающие влияние малых чисел Рейнольдса  $Re_t$  и демпфирующий эффект стенки. Отметим, что в этих моделях получается точное асимптотическое поведение основных турбулентных величин вблизи стенки  $k/u_*^2 \sim (\zeta^+)^2$ ,  $\varepsilon R/u_*^3 \sim (\zeta^+)^0 = \text{const}$ ,  $\nu_t/\nu \sim (\zeta^+)^3$ ,  $Re_t \sim (\zeta^+)^4$ ,  $-\langle u'v' \rangle/u_*^2 \sim (\zeta^+)^3$ ;  $R$  – характерный масштаб длины.

Вихревая вязкость находится по формуле (11). Демпфирующие множители модели турбулентности [16, 17]  $f_\mu, f_1, f_2$  являются функциями от  $\zeta^+$  и  $Re_t$ :

$$f_1 = 1, \quad f_\mu = \left( 1 + \frac{3.45}{Re_t^{1/2}} \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{70}\right) \right),$$

$$f_2 = \left[ 1 - \frac{2}{9} \exp\left(-\left(\frac{Re_t}{6}\right)^2\right) \right] \left( 1 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{5}\right) \right)^2,$$

$$D = 0, \quad E = 0, \quad (c_\mu, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon) = (0.09, 1.4, 1.8, 1.4, 1.3).$$

Функция  $f_\mu$ , введенная в соотношение (11), корректирует уравнение при приближении к стенке. Из асимптотического поведения турбулентных величин вблизи стенки следует, что  $f_\mu$  будет изменяться как  $(\zeta^+)^{-1}$ . Отметим, что  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности [16–18] обеспечивают лучше согласующееся с экспериментальными данными предельное изменение  $(\zeta^+)^3$  для  $-\langle u'v' \rangle/u_*^2$ .

В  $k$ - $\varepsilon$  моделях турбулентности, как и в других турбулентных моделях, которые применяют уравнение переноса  $\varepsilon$ , необходимо задать граничное условие для  $\varepsilon$  на стенке. Применяются три различных варианта граничных условий для  $\varepsilon_w$  [13]:  $\varepsilon_w = 0$  [12];  $(\partial\varepsilon/\partial\zeta)_w = 0$  и  $\varepsilon_w = 2\nu(\partial^2 k/\partial\zeta^2)_w$ .

В наиболее широко употребляемых пристеночных модификациях  $k$ - $\varepsilon$  моделей турбулентности [12, 16–19] в уравнения на основании различных гипотез введены дополнительные источниковые члены  $D$  и  $E$ . При этом предполагается линейное или параболическое изменение  $\varepsilon$  внутри вязкого подслоя, что дает следующее граничное условие для изотропной скорости энергии диссипации  $\varepsilon_w = 0$ . Для случая, когда уравнение переноса решается для полной скорости диссипации  $\varepsilon_k$  (модель [16, 17]), ненулевое условие для турбулентной скорости диссипации  $\varepsilon_w$  удовлетворяет на стенке соотношению  $\varepsilon_w = 2\nu(\partial^2 k/\partial\zeta^2)_w$ .

В настоящем исследовании все величины задавались как функции  $\zeta$  при  $\xi'_0 = \xi/R = 0.05$  (далее  $R$  – длина пластины) в начальном сечении. Для всех моделей турбулентности профили скорости  $u = u_0(\zeta)$  и кинетической энергии турбулентности  $k_0(\zeta)$  в начальном сечении  $\xi = \xi_0$  брались из данных эксперимента [4]. Начальное распределение скорости диссипации  $\varepsilon_0(\zeta)$  находилось по измеренным величинам  $u_0$  и  $k_0$  из условия локального равновесия, как в [20]:

$$\varepsilon_0 = c_\mu f_\mu \frac{k_0^{3/2}}{L} + \varepsilon_\infty \frac{\zeta}{\delta}, \quad L = c_\mu^{1/4} l_m,$$

$$f_\mu = \exp\left(-\frac{2.5}{1 + \text{Re}_t/50}\right), \quad \nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|,$$

где вихревая вязкость  $\nu_t$  в начальном сечении определяется гипотезой длины пути смешения Прандтля;  $L$  – масштаб турбулентности. Масштаб турбулентных возмущений набегающего потока (так называемый диссипативный масштаб турбулентности) связан со скоростью диссипации набегающего потока  $\varepsilon_\infty$  следующим образом:

$$L_\infty = c_D k_\infty^{3/2} / \varepsilon_\infty.$$

Длина пути смешения  $l_m$  описывается гладкой функцией из [21]

$$l_m = c_\mu \delta \tanh\left(\frac{\kappa}{c_\mu} \frac{\zeta}{\delta}\right),$$

где  $\kappa = 0.41$  – константа Кармана.

#### 4. Результаты вычислений

Для анализа влияния параметров потока при значительной интенсивности турбулентности (турбулизированного) численно решается стационарная задача исследования течения и теплообмена в переходной области турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. Для данного расчета характеристик динамического и теплового пограничных слоев в качестве базисных выбраны экспериментальные данные [4]. В экспериментальных исследованиях ламинарный режим течения с высокой интенсивностью турбулентности иногда называется псевдоламинарным, чтобы подчеркнуть его качественное отличие от потоков с малыми интенсивностями турбулентности [23].

После обезразмеривания задача определяется параметрами набегающего потока:  $M_\infty, \text{Re}_\infty, Tu_\infty, L_\infty$ . В численных расчетах для числа Рейнольдса  $\text{Re}_\infty = 0.2835 \cdot 10^6$  ( $\text{Re}_\infty = RV_\infty/\nu_\infty$ ) значения  $Tu_\infty$  (изменяются в диапазоне 1–9%), а безразмерная скорость диссипации  $\varepsilon'_\infty$  ( $\varepsilon'_\infty = \varepsilon_\infty R/V_\infty^3$ ) соответственно в пределах  $0.184 \cdot 10^{-4} - 0.184$ .

Для дозвукового низкоскоростного слабосжимаемого потока с умеренным значением скорости  $V_\infty = 5.6$  м/с, соответствующей малому числу  $M_\infty = 0.0164$ , и с турбулентностью высокой интенсивности применяются два варианта граничного условия на стенке для уравнения притока тепла  $q_w = \text{const}$  и  $i_w = \text{const}$ . При этом температурный фактор  $i_w$

варьируется в пределах  $0.7 - 1.3$  ( $i_w = T_w/T_0$ ,  $T_0$  – температура торможения), что отвечает условиям холодной и слабо нагретой стенки. На внешней границе пограничного слоя предполагается, что  $h_e = \text{const}$ .

В расчетах влияние интенсивности турбулентности набегающего потока  $Tu_\infty$  на положение перехода (конца), определяемого через критическое число Рейнольдса  $Re_\theta$ , учитывается в соответствии с экспериментальными данными [22].

Численные результаты, полученные с применением одно- и двухпараметрических моделей турбулентности, сравнивались с экспериментальными данными [4] при  $Tu_\infty = 4.86\%$  и различных значениях  $\varepsilon_\infty$ . Представлены такие характеристики пограничного слоя как коэффициент трения  $c_f$ , формпараметр  $H$ , число Рейнольдса  $Re_\theta$  и профили осредненных значений продольной компоненты скорости  $u$  и кинетической энергии турбулентности  $k$  (или интенсивности турбулентности  $Q^+ = k^{1/2}/u_*$ ,  $Q_i^+ = ((2/3)k)^{1/2}/u_*$ ).

Расчетные значения коэффициента трения  $c_f$  сопоставляются с ламинарным законом изменения  $c_{f_0}(Re_\xi)$

$$c_{f_0} = 0.664 Re_\xi^{-0.5} \quad (20)$$

и с соотношением для развитого турбулентного течения при малых интенсивностях  $Tu_\infty$  ( $Tu_\infty \approx 0$ )

$$c_{f_0} = 0.0592 Re_\xi^{-0.2}. \quad (21)$$

Аналогичное сопоставление расчетных значений коэффициента трения  $c_f$  сделано с теоретическими корреляциями для ламинарного закона изменения  $c_{f_0}(Re_\theta)$

$$c_{f_0} = 0.441 Re_\theta^{-1}, \quad (22)$$

и развитого турбулентного течения при малых интенсивностях  $Tu_\infty$  ( $Tu_\infty \approx 0$ )

$$c_{f_0} = 0.027[1 + 0.05(\lg Re_\theta - 3.3) + 0.1(\lg Re_\theta - 3.3)^2]Re_\theta^{-0.268}. \quad (23)$$

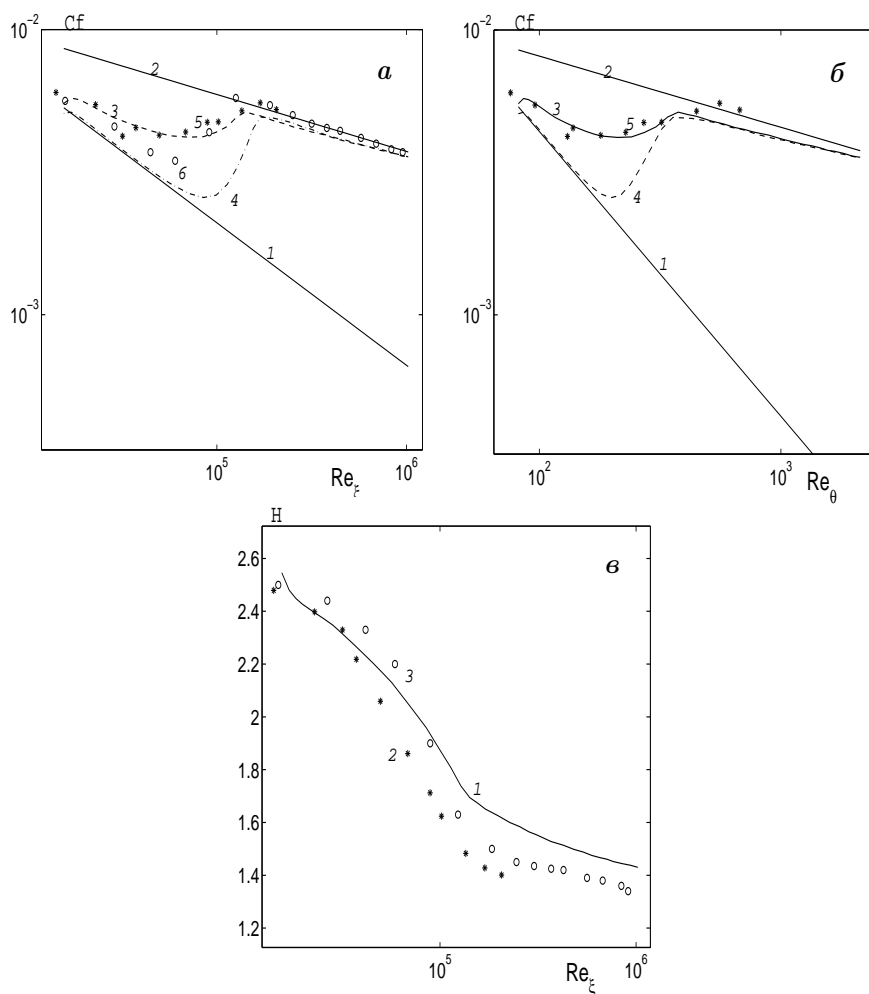
Второй подход к исследованию переходных областей с использованием полуэмпирических моделей при высокой интенсивности турбулентности заключается в выборе для заданной серии экспериментальных данных наиболее им соответствующей модели и нахождении расчетным путем для них исходных постоянных и параметров [24].

Представлены результаты расчетов, полученные по однопараметрической модели турбулентности. Распределения коэффициента трения  $c_f = 2\tau_w/(\rho_e u_e^2)$  приводятся на рис.1 *a, б* в зависимости от локальных чисел Рейнольдса  $Re_\xi = \xi u_e/\nu_e$  и  $Re_\theta = \theta u_e/\nu_e$  для интенсивности турбулентности  $Tu_\infty = 4.86\%$ . Кривая *3*, полученная по (15) при  $\alpha = 0.25$ , удовлетворительно описывает экспериментальные данные [4] псевдоламинарно-квazitурбулентного перехода с протяженной областью, а кривая *4* с коротким, но более резким переходом, рассчитанная с  $\alpha = 2$ , лучше подходит для описания экспериментальных данных из [25].

Сопоставление расчетных результатов и экспериментальных данных тестовых вариантов [4, 25] для распределений формпараметра  $H$  в зависимости от локального числа  $Re_\xi$ , проведенное для значения  $Tu_\infty = 4.86\%$ , демонстрирует, что расчетная кривая *1* согласуется с экспериментальными данными [4] (*2*) лучше, чем с [25] (*3* -  $Tu_\infty = 6\%$ ). Распределения числа Рейнольдса  $Re_\theta$  в зависимости от  $Re_\xi$  при том же  $Tu_\infty$  удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным.

Зависимости продольной составляющей скорости  $u^+$  поперек пограничного слоя от нормальной координаты  $\zeta^+$  сравнены для различных значений безразмерной продольной координаты  $\xi'$  в переходной области при  $Tu_\infty = 4.86\%$  с экспериментальными данными [4]. Профили скорости в начале перехода согласуются в ламинарном подслое с линейной функцией  $u/u_* = \zeta^+$ . Первые два промежуточные профиля скорости показывают эволюцию

расчетного и экспериментального распределений скорости в начале переходной области вдоль плоской пластины при  $\xi' = 0.2$  и  $0.3$  и хорошее согласование в ламинарном подслое и буферной области. Третий профиль при  $\xi' = 0.6$  в конце перехода приближается к логарифмическому распределению закона стенки  $u/u_* = 5.84 \lg \zeta^+ + 5.1$  для полностью развитого турбулентного режима.



**Рис. 1.** Рассчитанные и измеренные коэффициенты поверхностного трения  $c_f(Re_\xi)$  (а),  $c_f(Re_\theta)$  (б) и формпараметр  $H(Re_\xi)$  (в) для однопараметрической модели

Расчетные профили интенсивности кинетической энергии  $Q^+(\zeta^+)$  поперек пограничного слоя сравнены с экспериментальными данными для тех же значений координаты  $\xi'$ . Представленные зависимости  $Q_i^+(\zeta^+)$ ,  $Q^+(\zeta^+)$  численных решений получены для случаев изотропной и анизотропной турбулентности:  $k = 3/2u'^2$  и  $u'^2$ . Экспериментальные данные для среднеквадратичной величины пульсаций продольной скорости  $Q_{\text{exp}}^+ = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}/u_*$  взяты из [4]. Первые два промежуточных распределения отражают медленные изменения интенсивности кинетической энергии  $k$  в пограничном слое в начальной и средней частях переходной области на плоской пластине при движении от  $\xi' = 0.2$  до  $0.3$ . Профили при  $\xi' = 0.6$  соответствуют положению, близкому развитой турбулентной области. Сопоставление профилей  $Q_i^+(\zeta^+)$  только для случая изотропной турбулентности при  $\xi' = 0.2, 0.3, 0.6$  демонстрирует незначительные их перестроения в пристеночной области и более

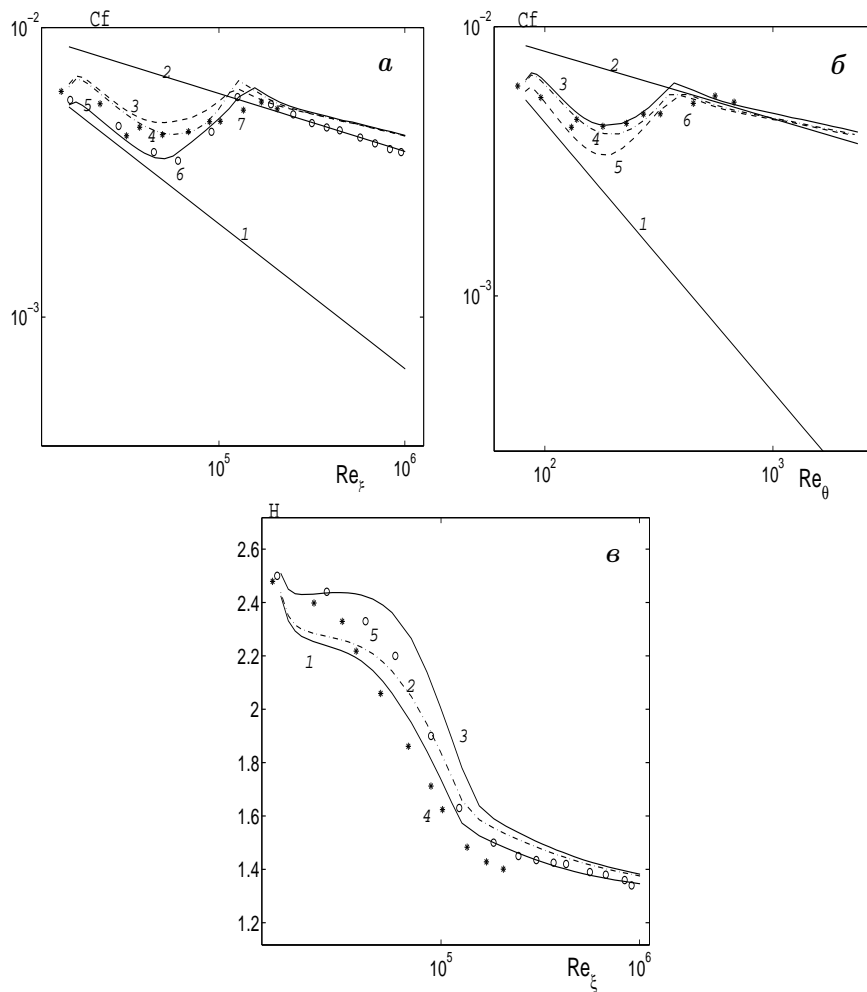
существенные во внешней части пограничного слоя.

Распределения коэффициента трения  $c_f$ , зависящие от локальных чисел Рейнольдса  $Re_\xi$  и  $Re_\theta$ , при высокой интенсивности турбулентности  $Tu_\infty = 4.86\%$  и для различных величин скорости диссипации  $\varepsilon'_\infty$ , равных  $0.184 \cdot 10^{-2}$ ,  $0.184 \cdot 10^{-1}$ ,  $0.184$ , при использовании варианта  $k - \varepsilon$  модели [12] представлены на рис. 2 а и б. Увеличение интенсивности турбулентности  $Tu_\infty$  приводит к более раннему переходу к турбулентному режиму. Согласно графикам  $c_f$  на рис. 2 а и б влияние скорости диссипации  $\varepsilon'_\infty$  на положение перехода в распределении коэффициента  $c_f$  не столь значительно как параметра  $Tu_\infty$ , хотя расхождение кривых  $c_f$  (3–5) заметно с увеличением  $\varepsilon'_\infty$  в диапазоне  $0.184 \cdot 10^{-2} - 0.184$ . С ростом скорости диссипации  $\varepsilon'_\infty$  переход к турбулентному режиму реализуется при больших локальных числах Рейнольдса, т. е. затягивается. Значения  $c_f$  кривых 3, 4, полученных при  $\varepsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}, 0.184 \cdot 10^{-1}$ , более соответствуют экспериментальным данным 7, чем величины коэффициента  $c_f$  при большем  $\varepsilon'_\infty$  кривой 5, которая согласуется лучше с данными б. Для зависимостей  $c_f(Re_\theta)$  влияние параметра  $\varepsilon'_\infty$  на положение перехода идентично его влиянию для  $c_f(Re_\xi)$ .

Необходимо отметить, что распределения  $c_f$ , полученные по двухпараметрической модели, лучше описывают экспериментальные данные, чем рассчитанные по однопараметрической модели. Для интенсивности  $Tu_\infty = 4.86\%$  и тех же значений  $\varepsilon'_\infty$  расчетные кривые 1–3 формпараметра  $H$  сравниваются на рис. 2 в с экспериментальными данными 4. Данные 5 [25] получены при несколько большем значении интенсивности  $Tu_\infty = 6\%$ . Распределения 1–3 формпараметра  $H$  лежат выше экспериментальных значений 4 в переходе и области развитого турбулентного режима. С ростом параметра  $\varepsilon'_\infty$  расхождения между расчетными значениями 2, 3 и экспериментальными данными 4 увеличиваются. Распределения числа Рейнольдса  $Re_\theta$  от локального числа  $Re_\xi$  при интенсивности  $Tu_\infty = 4.86\%$  и тех же значениях параметра  $\varepsilon'_\infty$  показывают, что увеличение параметра  $\varepsilon'_\infty$  затягивает переходный процесс по этой зависимости к турбулентному режиму.

Изменения профилей продольной составляющей скорости поперек пограничного слоя от  $\zeta^+$  в переходной области для положений с координатами  $\xi = 0.2, 0.3, 0.6$  приведены на рис. 3 а–в для параметров турбулентности  $Tu_\infty = 4.86\%$  и  $\varepsilon'_\infty = 0.184 \cdot 10^{-2}$ . Численные решения  $u/u_e$  сопоставляются с известными аналитическими зависимостями и экспериментальными данными. Кривая 1 выражает линейную связь скорости с безразмерной нормальной координатой  $u/u_* = \zeta^+$  в областях с преобладанием ламинарного режима, расчетный профиль скорости 2 показывает его эволюцию в переходной области в продольном направлении, логарифмическое распределение скорости 3 соответствует закономерностям ее изменения в развитой турбулентной области пограничного слоя. В конце переходной области ( $\xi' = 0.6$ ) на рис. 3 в расчетное распределение 2 в пристеночной области изменяется согласно теоретическому выражению, следующему из закона стенки 3. Заметно хорошее соответствие экспериментальным данным первых двух расчетных профилей в пристеночной области пограничного слоя и третьего профиля во внешней области.

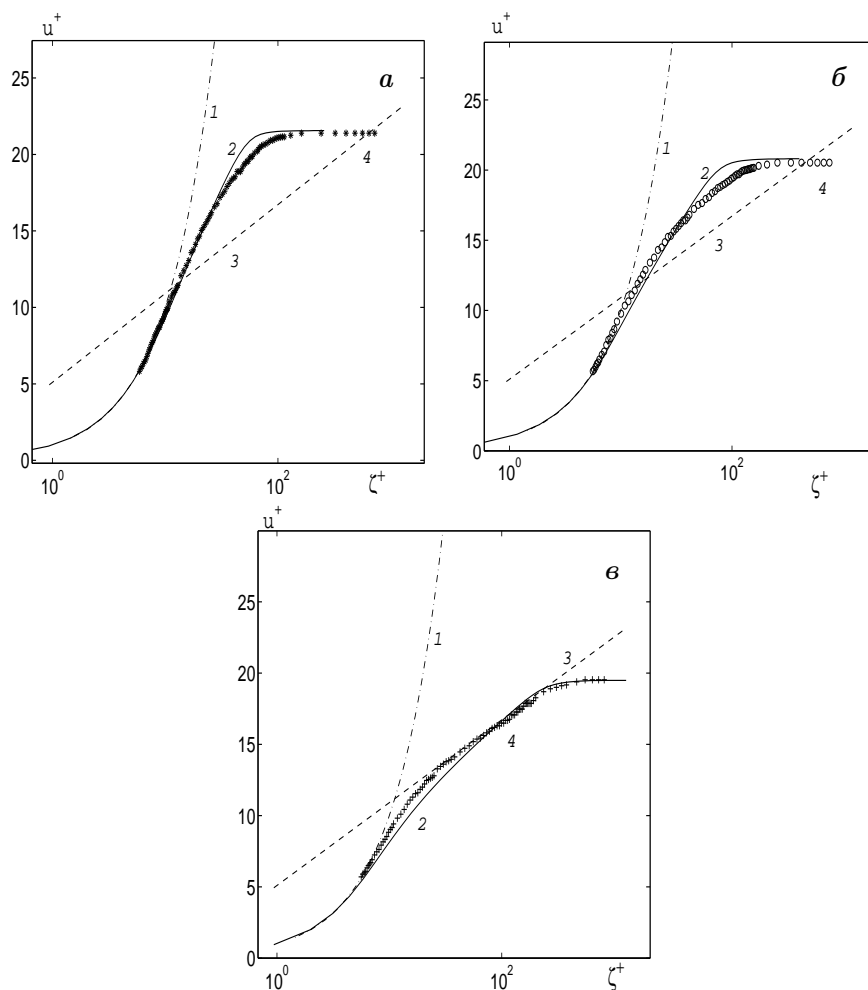
Численные решения для профилей интенсивностей  $Q_i^+(\zeta^+)$ ,  $Q^+(\zeta^+)$  поперек пограничного слоя сопоставляются на рис. 4 а–в с экспериментальными данными 3 для различных значений координаты  $\xi'$  переходной области при интенсивности турбулентности  $Tu_\infty = 4.86\%$ . Расчетные кривые 1 и 2 зависимостей  $Q_i^+$ ,  $Q^+$  соответствуют случаям изотропной и анизотропной турбулентности и лежат ниже экспериментальных данных в пристеночной области, но имеют подобный характер изменения. Распределения на рис. 4 а, б отражают классический характер изменений интенсивности кинетической энергии от стенки до внешней границы на начальном и среднем участках переходной области пограничного слоя при  $\xi' = 0.2$  и  $0.3$ . Расчетные профили на рис. 4 в получены при  $\xi' = 0.6$  для режима, близкому к концу переходной области, вниз по течению с ростом координаты  $\xi'$  отмечается наилучшее согласование результатов расчета и эксперимента. Для случая изотропной турбулентности сопоставление распределений интенсивности  $Q_i^+(\zeta^+)$  при  $\xi' = 0.2, 0.6$  показывает наибольший их уровень перестройки во внешней области пограничного слоя.



**Рис. 2.** Рассчитанные и измеренные коэффициенты поверхностного трения  $c_f(Re_\xi)$  (а),  $c_f(Re_\theta)$  (б) и формпараметр  $H(Re_\xi)$  (в) для двухпараметрической модели

Результаты расчетов по модели [16, 17] с классическими постоянными представлены на рис. 5–7.

Рис.5 (а и б) показывает распределения коэффициентов поверхностного трения  $c_f(Re_\xi)$ ,  $c_f(Re_\theta)$ ; (в) демонстрирует формпараметр  $H(Re_\xi)$  для различных значений  $\varepsilon'_\infty$ . Полученные экспериментальные данные и расчетные кривые  $c_f(Re_\xi)$  подтверждают существенное влияние турбулентности набегающего потока на переход в пограничном слое. На рис. 5 выделяется в условиях высокой интенсивности турбулентности набегающего потока воздействие величины скорости диссипации  $\varepsilon'_\infty$  на процесс перехода. Там же даны значения  $\varepsilon'_\infty$ . Как видно из рис.5 а, выбор параметра  $\varepsilon'_\infty$  позволяет очень хорошо предсказать напряжение трения на стенке в соответствии с экспериментом только в переходной области. Наконец дается сравнение коэффициента поверхностного трения  $c_f$  с хорошо известными теоретическими корреляциями для ламинарного (закон Блазиуса (20)) и полностью развитого турбулентного (формула Прандтля (21)) течений при  $Tu_\infty \approx 0$  (отмечено символом 0 внизу). Заметим, что по данным эксперимента, локальный коэффициент поверхностного трения  $c_f$  лежит выше теоретической зависимости в области изменения  $Re_\xi > 1.7 \cdot 10^5$ . Переходное число Рейнольдса  $Re_{\xi_{tr}}$  (или критическое число Рейнольдса начала перехода)



**Рис. 3.** Сравнение расчетного и измеренного профилей скорости для закона стенки  $u^+(\zeta^+)$  при  $\xi' = 0.2, 0.3, 0.6$  - (а)-(в) для двухпараметрической модели

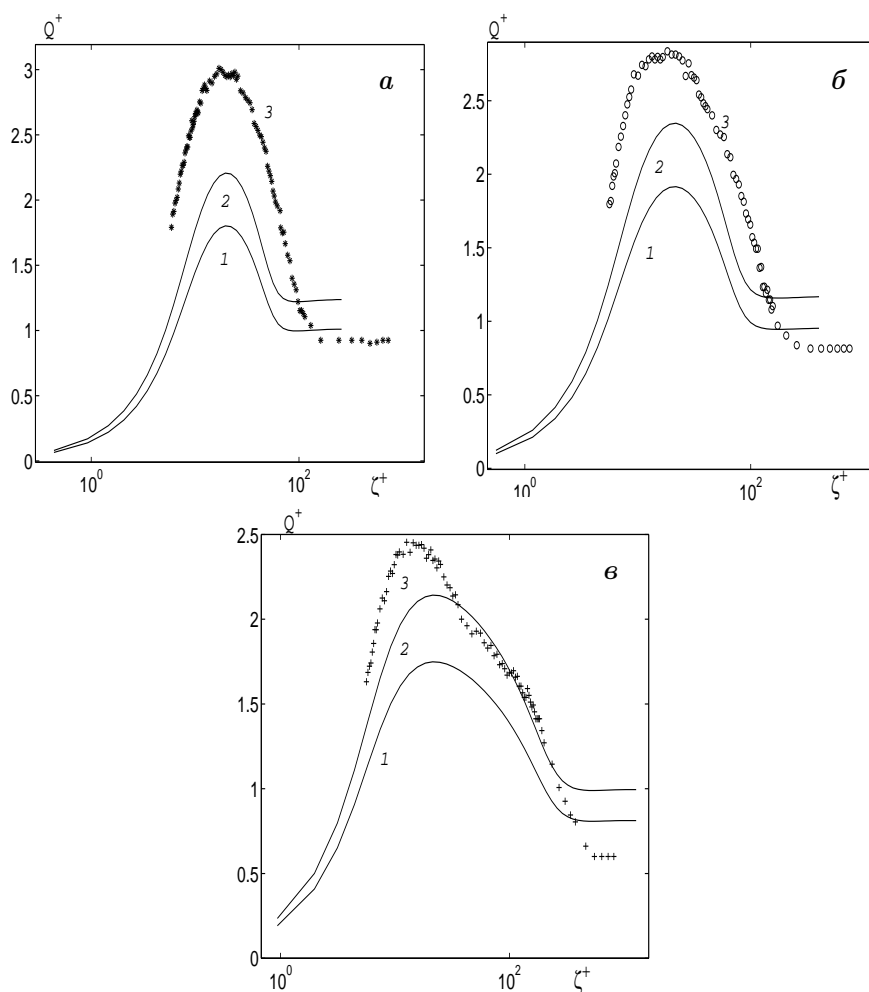
определяется точкой, где величина  $c_f$  достигает своего локального минимума.

Результаты зависимости  $c_f(Re_\theta)$  показаны на рис.5 б. Сравнение также сделано с теоретическими соотношениями подобия (22) и (23) для ламинарного и полностью развитого турбулентного режимов течения. Как видно из рисунка, кривые имеют вид, аналогичный виду  $c_f(Re_\xi)$  на рис.5а. Экспериментальные точки при  $Re_\theta > 5 \cdot 10^2$ , так же как на рис.5а, располагаются выше теоретической кривой.

Сравнение расчетного и измеренного формпараметра  $H$  в зависимости от локального числа Рейнольдса  $Re_\xi$ , представленное на рис.5в, показывает, что поведение формпараметра  $H$  находится в хорошем соответствии с экспериментом только в переходной области (повторяя форму кривой с наличием точки перегиба при  $Re_\xi \approx 6 \cdot 10^4$ ), однако его величина сдвигается в сторону больших значений для полностью развитого турбулентного режима.

На рис.6 проиллюстрированы профили безразмерной средней скорости  $u^+(\zeta^+)$  внутри пограничного слоя для трех различных продольных сечений в сравнении с линейным законом и универсальным логарифмическим законом ( $u^+ = 2.5 \ln \zeta^+ + 5.1$ ). В данной работе значение  $\epsilon'_\infty = 1.84$  для рассмотренной модели турбулентности соответствует случаю наилучшего совпадения с измерениями  $c_f$ . Результаты представлены для сечений  $\xi' = 0.2$ ,

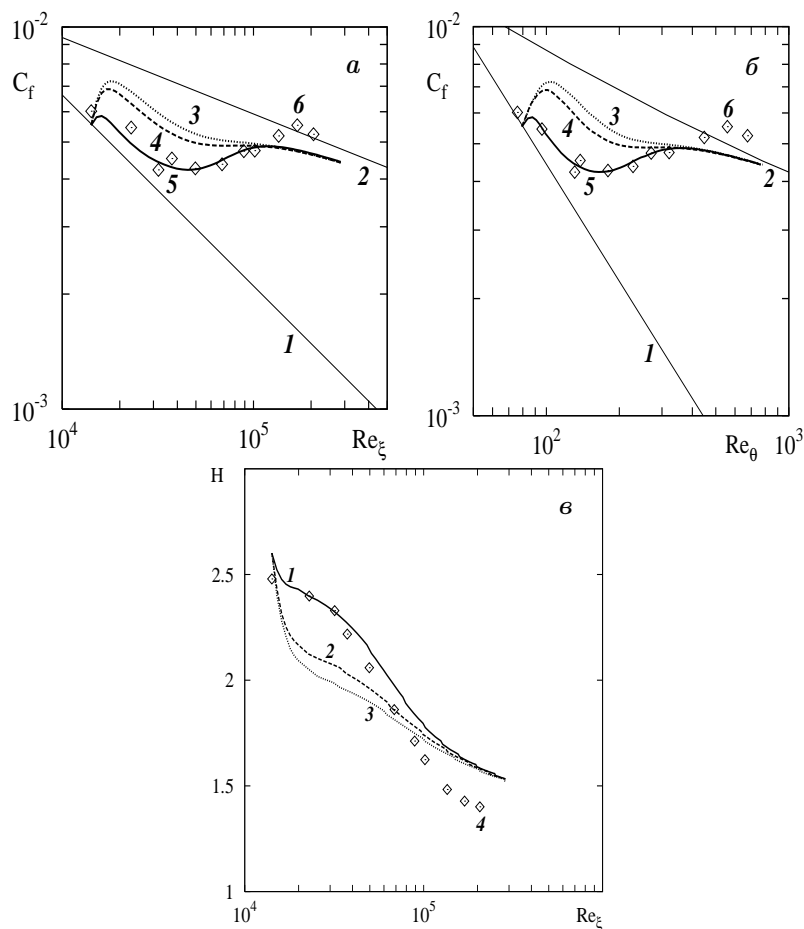




**Рис. 4.** Сравнение численного расчета и измерений профиля турбулентной интенсивности  $Q^+(\zeta^+)$  при  $\xi' = 0.2, 0.3, 0.6$  - (а)-(в) для двухпараметрической модели

0.3, 0.6. Расчетная осредненная продольная скорость  $u^+$  для модели турбулентности [16, 17] достигает очень хорошего соответствия с экспериментом, за исключением области  $60 < \zeta^+ < 300$ . Хорошо известно, что производство турбулентности, диссипация и кинетическая энергия (или интенсивность пульсаций продольной скорости) достигают своего максимума внутри очень тонкого вязкого подслоя, непосредственно примыкающего к стенке. Поскольку это очень тонкая область, точные измерения технически трудно осуществимы, то численные вычисления могут позволить определить поведение турбулентных величин на малом расстоянии от стенки, близком к нулю.

Полученные среднеквадратичные величины интенсивности турбулентности  $Q_i^+$  показаны на рис. 7. Видно, что модель турбулентности [16, 17] дает относительно хорошее согласие с экспериментом. Как следует из рис.7, положение по  $\zeta$  величин локальных максимумов  $Q_i^+$  очень близко к экспериментальным точкам. Влияние расстояния  $\xi$  на локальный максимум среднеквадратичной интенсивности флуктуаций продольной скорости  $Q_{\text{exp}}^+$  получено на рис. 7 в. Когда величина  $\xi$ -координаты растет, пик локального максимума  $Q_i^+$ , так же как в эксперименте, сдвигается к стенке. Для всех расчетов некоторое отличие от экспериментальных данных отмечено вблизи внешней границы пограничного слоя.

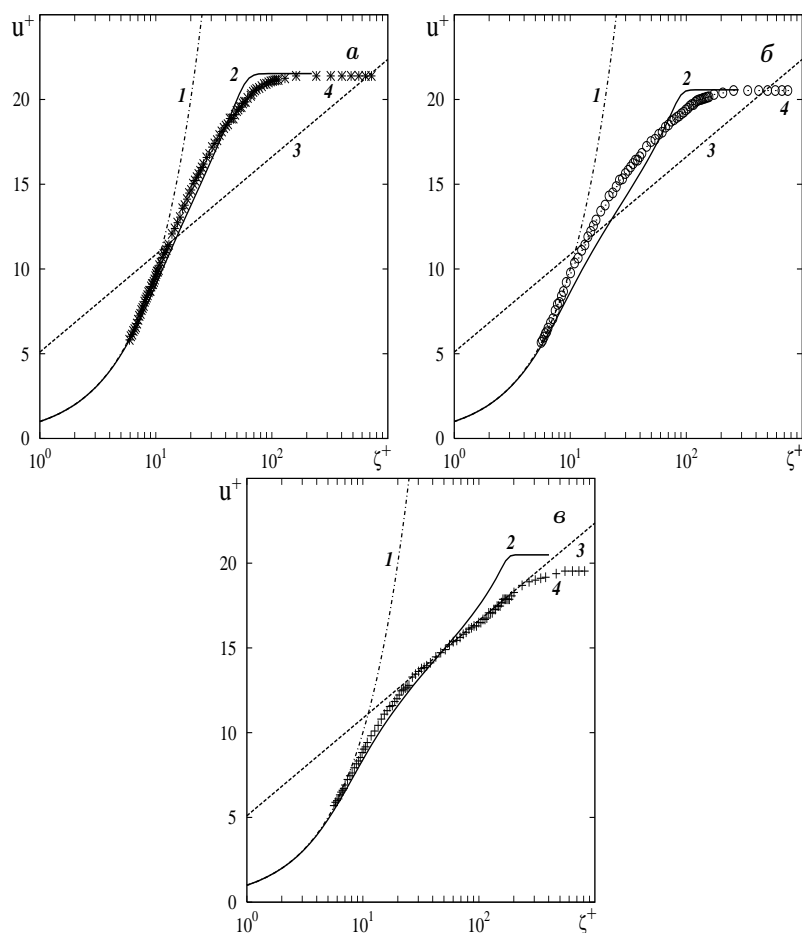


**Рис. 5.** Распределение коэффициентов поверхностного трения  $c_f(Re_{\xi})$  (а),  $c_f(Re_{\theta})$  (б) и форм-параметра  $H(Re_{\xi})$  (в). Здесь на рис.5 а: 1 – ламинарный закон (20); 2 – развитое турбулентное течение (21); расчеты по модели [16, 17] при  $\varepsilon'_{\infty}$ : 3 –  $1.84 \cdot 10^{-2}$ , 4 –  $1.84 \cdot 10^{-1}$ , 5 – 1.84; 6 – экспериментальные точки  $\diamond$  из [4]. На рис.5 б показаны зависимости  $c_f(Re_{\theta})$ : 1 – ламинарный закон (22); 2 – развитой турбулентный режим (23). Расчеты и обозначения экспериментальных точек такие же, как на рис.5 а. На рис.5 в даны расчеты форм-параметра  $H$  при  $\varepsilon'_{\infty}$ : 1 –  $1.84 \cdot 10^{-2}$ , 2 –  $1.84 \cdot 10^{-1}$ , 3 – 1.84; 4 – экспериментальные точки  $\diamond$  из [4]

## 5. Заключение

На основе классических и модифицированных одно- и двухпараметрических дифференциальных моделей турбулентности проанализировано влияние степени и масштаба турбулентности набегающего потока на характеристики течения пограничного слоя и параметры турбулентности.

Модифицированные варианты одно- и двухпараметрических моделей турбулентности позволили получить расчетные результаты во всей области течения (в переходной и турбулентной) в лучшем соответствии с экспериментальными данными, чем при использовании их классических вариантов. При значительных интенсивностях турбулентности набегающего потока исследовано влияние параметра скорости диссипации энергии турбулентности, связанного с поперечным линейным масштабом, на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое. Расчетные результаты, полученные на основе двухпараметрических моделей, более точно соответствуют экспериментальным данным, чем на базе одно-



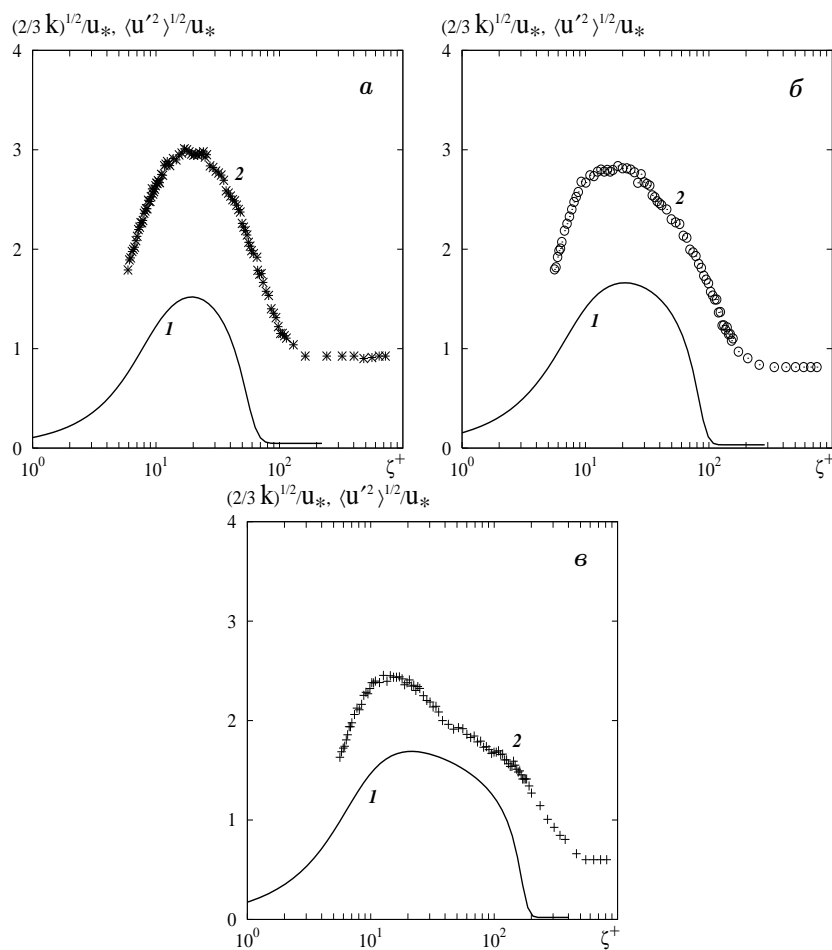
**Рис. 6.** Сравнение рассчитанных профилей продольной средней скорости  $u^+(\zeta^+)$  в сечениях  $\xi'$  пограничного слоя:  $a - 0.2$ ,  $б - 0.3$ ,  $в - 0.6$ . Здесь на рис. 6: 1 – линейный закон стенки  $u^+ = \zeta^+$ ; 2 – логарифмический профиль  $u^+ = 2.5 \ln \zeta^+ + 5.1$ ; 3 – расчет по модели [16, 17] при  $\varepsilon'_\infty = 1.84$ ; 4 – экспериментальные точки  $*$ ,  $\circ$ ,  $+$  из [4]

параметрической модели, по профилям скорости и распределению коэффициента трения. Расчетные зависимости формпараметра от локальных чисел Рейнольдса лежат несколько выше экспериментальных значений в переходной и турбулентной областях. Численные результаты для профилей интенсивности турбулентности на основе обеих моделей согласуются с экспериментальными распределениями. Наилучшее соответствие получено для течений в областях, близких к полностью развитой турбулентности.

Воздействие скорости диссипации турбулентности набегающего потока (или её масштаба) на ламинарно-турбулентный переход исследовано для течения над плоской пластиной при большой степени интенсивности турбулентности. Модификация существующих турбулентных моделей позволяет достичь более точного совпадения результатов расчетов с базовыми экспериментальными данными псевдоламинарно-кваситурбулентного перехода.

Второй путь определен выбором наиболее подходящих для данного класса течений двухпараметрических турбулентных моделей и величины параметра внешнего масштаба турбулентности для описания перехода.

Модель Майонга может быть применена для исследования влияния параметров турбулентности набегающего потока на поведение ламинарно-турбулентного перехода и из-



**Рис. 7.** Расчет среднеквадратичных пульсаций продольной скорости в сечениях  $\xi'$  пограничного слоя:  $a - 0.2$ ,  $b - 0.3$ ,  $v - 0.6$ . Здесь на рис. 7: 1 – расчет  $\sqrt{(2/3)k}/u_*$  по модели [16, 17], 2 – измерения величины  $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}/u_*$ ; значками \*, o, + отмечены экспериментальные точки из [4]

менения характеристик турбулентности в очень тонкой области вблизи стенки. Хорошее совпадение расчетных результатов с экспериментальными данными получено с помощью рассмотренной двухпараметрической модели турбулентности для осредненных продольных профилей скорости пограничного слоя с линейным законом и законом стенки. Наилучшее совпадение с экспериментом достигнуто для распределений по интегральным характеристикам пограничного слоя и среднеквадратичной интенсивности  $Q_i^+$  в начальной области перехода для течения над плоской пластиной с наибольшим значением скорости диссипации. Вниз по течению при больших  $Re_\xi$  от конца перехода, где отмечено наибольшее их рассогласование по  $c_f$ , расчетная кривая  $c_f$  приближается к турбулентной эмпирической зависимости и данным эксперимента.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Драйден Х. Л. Переход ламинарного течения в турбулентное // Турбулентные течения и теплопередача. Аэродин. больш. скоростей и реактив. тех.-ка. – М.: Изд. иностр. лит., 1963, с. 9–82.
2. Глушко Г. С. Переход к турбулентному режиму течения в пограничном слое плоской пластины при различных масштабах турбулентности набегающего потока // Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3, с. 68–70.

3. Лушник В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование перехода у турбулентности в пограничном слое при большой интенсивности внешних возмущений с помощью трехпараметрической модели // Проблемы совр. механики. - М.: МГУ, 1983, ч. 1, с. 127–138.
4. Erik E. Ya. Heat transfer effects in transitions // Engin. Found. Conf., March 10–15, 1996, New York – San Diego, California, 1996, p. 1–47.
5. Aleksin V. A. Modelling of free stream turbulence parameter effect on flow and heat transfer in boundary layer / Institute for Problems in Mechanics RAS, Preprint № 600, Moscow, 1997, 29 p.
6. Zubarev V. M. Comparative analysis of various  $k$ - $\varepsilon$  turbulence models for laminar-turbulent transition / Institute for Problems in Mechanics RAS, Preprint № 601, Moscow, 1997, 52 p.
7. Гиневский А.С., Иселевич В.А., Колесников А.В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНТИ, 1978, т. 11, с. 155–304.
8. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, Физика, 1942, т. 6, № 1–2, с.6–58.
9. Совершенный В.Д., Алексин В.А. О расчете пограничного слоя на профилях при наличии зон ламинарного и турбулентного режимов течения // Изв. вузов. Авиац. техн., 1983, № 2, с.68–72.
10. Prandtl L. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz // Nachrichten Akademie der Wissenschaften. Göttingen. Math.-Phys. Klasse 1, 1945, p. 6–19.
11. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat and Mass Transfer, 1973, v. 16, № 6, p. 1119–1130.
12. Чжен К. Ю. Расчет течений в каналах и пограничных слоях на основе модели турбулентности, применимой при низких числах Рейнольдса // Ракетная техника и космонавтика, 1982, т. 20, № 2, с. 30–37.
13. Пейтел В. К., Роду В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса. Обзор // Аэрокосмич. техника, 1986, № 2, с. 183–197.
14. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. - М.: Физматгиз, 1963, 680 с.
15. Лэм, Бремхорт. Модифицированная форма ( $k$ - $\varepsilon$ )-модели для расчета пристеночной турбулентности // Труды ам. об-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов, 1981, № 3, с. 156–160.
16. Myong H. K., Kasagi N. A new proposal for a  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model and its evaluation. 1st report, development of the model // Trans. Japan Soc. Mech. Eng., B, 1988, v. 54, № 507, p. 3003–3009.
17. Myong H. K., Kasagi N. A new proposal for a  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model and its evaluation. 2nd report, evaluation of the model // Trans. Japan Soc. Mech. Eng., B, 1988, v. 54, № 508, p. 3512–3520.
18. Nagano Y., Tagawa M., Niimi M. An improvement of the  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model // Trans. Japan Soc. Mech. Eng., B, 1989, v. 55, № 512, p. 1008–1015.
19. Hassid S., Poreh M. A turbulent energy model for flows with grad reduction // Trans. ASME. J. Fluids Eng., 1978, v. 100, № 1, p.107–112.
20. Ван, Жень, Хартел. Расчет теплоотдачи на поверхности профиля с помощью двухпараметрической модели турбулентности для низких чисел Рейнольдса // Труды ам. об-ва инж.-мех. Энергет. машины и установки, 1985, № 1, с. 45–53.
21. Cousteix J., Quemard C., Michel R. Application d'un schéma amélioré de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes tridimensionnelles // Turbulent Shear Flows, v. 18, AGARD, 1971, CP № 93.
22. Abu-Ghannam B. J., Shaw R. Natural transition of boundary layers — the effects of turbulence, pressure gradient, and flow history // J. Mech. Eng. Sci., 1980, v. 22, p. 213–228.
23. Дыбан Е. П., Эпик Э. Я. Тепломассообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. – Киев: Наук. Думка, 1985, 296 с.
24. Aleksin V. A., Zubarev V. M. Modelling of free stream turbulence effect on boundary layer flow / Institute for Problems in Mechanics RAS, Preprint № 628, Moscow, 1999, 44 p.
25. Transition Modelling for Turbomachinery II: An Updated Summ. of ERCOFTAC Trans. SIG Progr. 2<sup>nd</sup> WORKSHOP / Ed. A.M. Savill, Cambridge, Univ. Press, 1994, 226 p.

Поступила в редакцию 09.01.2007