

О ПРЕДЕЛЬНОМ СПЕКТРЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ В  $L_2$ , ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
НА НЕКОТОРОМ ЛИНЕЙНОМ МНОГООБРАЗИИ

В. Б. Коротков

**Аннотация.** Доказывается, что если  $S : L_2 \rightarrow L_2$  — положительный линейный оператор, интегральный на некотором всюду плотном в  $L_2$  линейном многообразии, то 0 принадлежит предельному спектру оператора  $S$ .

**Ключевые слова:** предельный спектр, положительный оператор, интегральный оператор.

Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с положительной конечной мерой  $\mu$ , не являющейся чисто атомической, т. е. в  $X$  существует множество  $X_0$ ,  $\mu X_0 > 0$ , не имеющее атомов меры  $\mu$ . Мы предполагаем также, что  $L_2 = L_2(X, \mu)$  — сепарабельное комплексное пространство. Далее через  $\|\cdot\|$  и  $(\cdot, \cdot)$  обозначаются норма и скалярное произведение в  $L_2$ , через  $\|\cdot\|_\infty$  — норма в  $L_\infty = L_\infty(X, \mu)$ . Пусть  $D$  — линейное многообразие в  $L_2$ . Линейный оператор  $K : D \rightarrow L_2$  называется *интегральным* [1], если существует определенная на  $X \times X$  ( $\mu \times \mu$ )-измеримая ( $\mu \times \mu$ )-п. в. конечная функция  $K(s, t)$  такая, что для всех  $f \in D$

$$Kf(s) = \int_X K(s, t)f(t) d\mu(t) \quad (1)$$

для  $\mu$ -п. в.  $s \in X$ . Интеграл в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция  $K(s, t)$  называется *ядром интегрального оператора*.

Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро  $K(s, t)$  удовлетворяет условию Карлемана

$$\int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s \in X.$$

Будем говорить, что 0 принадлежит *предельному спектру* плотно определенного в  $L_2$  линейного оператора  $M : D_M \rightarrow L_2$  (и писать  $0 \in \sigma_c(M)$ ), если в  $D_M$  найдется ортонормированная последовательность  $\{f_n\}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Mf_n\| = 0$ .

В [2] Нейман доказал следующий результат: если  $N$  — плотно определенный в  $L_2$  самосопряженный карлемановский интегральный оператор, то  $0 \in \sigma_c(N)$ . В [3, с. 754] (см. также теорему 1.7.11 в [4, с. 62]) показано, что если  $W$  — определенный на всем  $L_2$  самосопряженный интегральный оператор, то  $0 \in \sigma_c(W)$ . Возникает вопрос: будет ли 0 принадлежать предельному спектру самосопряженного оператора  $S : L_2 \rightarrow L_2$ , если сужение этого оператора на

какое-нибудь всюду плотное в  $L_2$  линейное многообразие является интегральным оператором? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный, как показывает следующий

**ПРИМЕР.** Пусть  $\{e_n\}$  — последовательность попарно не пересекающихся множеств из  $X$  с положительными мерами такая, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu e_n} < \infty$ . Пусть  $h_n \in L_2$ ,  $\|h_n\| = 1$  и  $h_n(s) = 0$  вне  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Обозначим через  $\{h_n^\perp\}$  ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности  $\{h_n\}$ . Рассмотрим оператор

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} (f, h_n^\perp) h_n + \sum_{n=1}^{\infty} (f, h_n) h_n^\perp, \quad f \in L_2.$$

Оператор  $A : L_2 \rightarrow L_2$  самосопряженный, и  $\|Af\| = \|f\|$  для всех  $f \in L_2$ . Следовательно,  $0 \notin \sigma_c(A)$ . Покажем, что сужение оператора  $A$  на  $L_\infty$  является интегральным оператором с ядром

$$A(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s) \overline{h_n^\perp(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n^\perp(s) \overline{h_n(t)}.$$

Так как функции  $|h_n(s)|$  равны 0 вне  $e_n$ , множества  $e_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , попарно не пересекаются и

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu e_n} |h_n^\perp(s)| d\mu(s) \leq \sqrt{\mu X} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu e_n} < \infty,$$

то для любой функции  $f \in L_\infty$  для  $\mu$ -п. в.  $s \in X$

$$\int_X |A(s, t)| |f(t)| d\mu(t) \leq \|f\|_\infty \left( \sqrt{\mu X} \sum_{n=1}^{\infty} |h_n(s)| + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu e_n} |h_n^\perp(s)| \right) < \infty.$$

Следующая теорема показывает, что ответ на поставленный выше вопрос будет положительным, если  $S$  — положительный оператор, т. е.  $(Sf, f) \geq 0$  для всех  $f \in L_2$ , а линейное многообразие, на котором  $S$  — интегральный оператор, удовлетворяет некоторому дополнительному условию. Для формулировки теоремы нам понадобится

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Будем говорить, что линейное многообразие  $L \subset L_2$  удовлетворяет условию (A), если  $P_e L \subset L$  для любого  $\mu$ -измеримого множества  $e$ ; здесь  $P_e f = \chi_e f$ ,  $f \in L_2$ ,  $\chi_e$  — характеристическая функция множества  $e$ .

**Теорема.** Пусть  $S : L_2 \rightarrow L_2$  — положительный линейный оператор, сужение которого на какое-нибудь всюду плотное в  $L_2$  линейное многообразие, удовлетворяющее условию (A), является интегральным оператором. Тогда  $0 \in \sigma_c(S)$ .

В доказательстве теоремы нам потребуется

**Лемма 1.** Пусть  $K(s, t)$  — определенная на  $X \times X$   $(\mu \times \mu)$ -измеримая  $(\mu \times \mu)$ -п. в. конечная функция;  $\{\varphi_n\}$  — полная ортонормированная система в  $L_2$ . Если для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\psi_n(s) \equiv \int_X |K(s, t)| |\varphi_n(t)| d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s \in X, \quad (2)$$

то существуют не содержащее атомов меры  $\mu$  множество  $E$ ,  $\mu E > 0$ , и функция  $g \in L_2$ ,  $g(t) > 0$  для  $\mu$ -п. в.  $t \in X$  такие, что

1) имеет место неравенство

$$\psi_E(s) \equiv \int_X \chi_E(s) |K(s, t)| g(t) d\mu(t) \leq \chi_E(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (3)$$

2) для всех  $n = 1, 2, 3, \dots$  и для  $\mu$ -п. в.  $t \in X$

$$|\varphi_n(t)| \leq \alpha_n g(t), \quad (4)$$

где  $\alpha_n$  — постоянные;

3) интегральные операторы  $K_E$  и  $|K_E|$  с ядрами  $\chi_E(s)K(s, t)$  и  $\chi_E(s)|K(s, t)|$  действуют из  $L_{\infty, 1/g}$  в  $L_{\infty}$  и непрерывны; здесь  $L_{\infty, 1/g} = L_{\infty, 1/g}(X, \mu)$  — функциональное пространство с нормой  $\|f/g\|_{\infty}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $X_0$ ,  $\mu X_0 > 0$ , — множество, не содержащее атомов меры  $\mu$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\mu X_0$ . В силу (2) найдутся множество  $Y_1 \subset X_0$  и постоянная  $\beta_1$  такие, что  $\mu Y_1 < \varepsilon/2$  и  $\psi_1(s) \leq \beta_1$  для всех  $s \in X_1 = X_0 \setminus Y_1$ . Аналогично найдутся множество  $Y_2 \subset X_1$  и постоянная  $\beta_2$  такие, что  $\mu Y_2 < \varepsilon/4$  и  $\psi_2(s) \leq \beta_2$  для всех  $s \in X_2 = X_1 \setminus Y_2$ . Продолжая этот процесс, получим последовательности  $\{X_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  такие, что  $\psi_n(s) \leq \beta_n$  для всех  $s \in X_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ . Тогда  $\mu E > \frac{1}{2}\mu X_0 > 0$  и  $\psi_n(s) \leq \beta_n$  для всех  $s \in E$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$

Положим  $\gamma_n = (\beta_n + 1)^{-1}$  и определим функцию  $g$  равенством

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} |\varphi_n(t)|.$$

Ясно, что  $g \in L_2$  и выполняются (4) с  $\alpha_n = n^2 \gamma_n^{-1}$ . Кроме того,

$$\psi_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_E(s) \frac{\gamma_n}{n^2} \psi_n(s) \leq \chi_E(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \beta_n \gamma_n \leq \chi_E(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Проверим, что  $g(t) > 0$  для  $\mu$ -п. в.  $t \in X$ . Предположим противное: пусть существует множество  $e_0$ ,  $\mu e_0 > 0$ , такое, что  $g(t) = 0$  для всех  $t \in e_0$ . Так как  $|\varphi_n(t)| \leq \alpha_n g(t)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , то  $\varphi_n(t) = 0$  для всех  $t \in e_0$  и  $n$ . Следовательно,  $(\chi_{e_0}, \varphi_n) = 0$  для всех  $n$ , что противоречит полноте системы  $\{\varphi_n\}$ . Покажем справедливость третьего утверждения леммы. Для любой функции  $f \in L_{\infty, 1/g}$  в силу (3) имеем

$$\| |K_E| f \|_{\infty} \leq \| |K_E| |f| \|_{\infty} \leq \| f/g \|_{\infty} \| \psi_E \|_{\infty},$$

$$\| K_E f \|_{\infty} \leq \| |K_E| |f| \|_{\infty} \leq \| f/g \|_{\infty} \| \psi_E \|_{\infty}.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть  $S : L_2 \rightarrow L_2$  — положительный линейный оператор,  $H$  — всюду плотное в  $L_2$  линейное многообразие, удовлетворяющее условию (A), сужение оператора  $S$  на  $H$  — интегральный оператор и  $K(s, t)$  — его ядро. Пусть  $\{\varphi_n\}$  — полная ортонормированная система, принадлежащая  $H$ . Тогда для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$  выполнено (2).

Положим  $\mathcal{L}_{\infty} = L_{\infty, 1/g}$ ,  $\mathcal{L}_1 = L_{1, g}$ , где  $L_{1, g}$  — функциональное пространство с нормой

$$\|f\|_{1, g} = \int_X |f(t)| g(t) d\mu(t). \quad (5)$$

В силу  $g \in L_2$  имеем  $\mathcal{L}_\infty \subset L_2 \subset \mathcal{L}_1$ . При этом  $\mathcal{L}_\infty$  всюду плотно в  $L_2$ ,  $\mathcal{L}_1$  сепарабельно и  $\mathcal{L}_1^* = \mathcal{L}_\infty$ . По лемме 1.3.5 из [4, с. 28] найдется множество  $G \subset E$ ,  $\mu G > 0$ , такое, что  $K_G = P_G K_E$  и  $|K_G| = P_G |K_E|$  — вполне непрерывные операторы, действующие из  $\mathcal{L}_\infty$  в  $L_\infty$ , причем  $K_G$  и  $|K_G|$  отображают каждую последовательность, сходящуюся в  $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_1)$ -топологии, в последовательность, сходящуюся по норме  $L_\infty$ . Из  $\mu X < \infty$  следует, что  $K_G$ ,  $|K_G|$  действуют из  $\mathcal{L}_\infty$  в  $L_2$  и вполне непрерывны. Так как для всех  $f \in \mathcal{L}_\infty$  и  $h \in L_2$

$$\begin{aligned} & \int_X \int_X \chi_G(s) |K(s, t)| |h(s)| d\mu(s) |f(t)| d\mu(t) \\ &= \int_X \int_X \chi_G(s) |K(s, t)| |f(t)| d\mu(t) |h(s)| d\mu(s) \leq \|h\| \sqrt{\mu X} \|\psi_E\|_\infty \|f/g\|_\infty, \end{aligned}$$

то сопряженный к интегральному оператору  $|K_G|$  интегральный оператор

$$|K_G|^* h(t) = \int_X \chi_G(s) |K(s, t)| h(s) d\mu(s), \quad h \in L_2,$$

действует из  $L_2$  в  $\mathcal{L}_1$  и вполне непрерывен. Следовательно, сопряженный к интегральному оператору  $K_G : \mathcal{L}_\infty \rightarrow L_2$  интегральный оператор  $K_G^*$  действует из  $L_2$  в  $\mathcal{L}_1$  и вполне непрерывен.

Пусть  $H_0 = H \cap \mathcal{L}_\infty$  и  $z$  — произвольный элемент из  $\mathcal{L}_\infty$ . Имеем  $P_e H_0 \subset H_0$  для любого  $\mu$ -измеримого множества  $e$ . Так как  $z \in L_2$  и  $\{\varphi_n\} \subset H_0$ , найдется последовательность  $\{u_n\} \subset H_0$  такая, что  $\|u_n - z\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $u_n \rightarrow z$  по мере. По теореме Ф. Рисса найдется последовательность  $\{v_m\} = \{u_{n_m}\}$ , сходящаяся  $\mu$ -п. в. к  $z$ . Пользуясь теоремой Егорова, выберем возрастающую к  $X$  последовательность  $\mu$ -измеримых множеств  $\{e_n\}$  так, что на каждом  $e_n$  последовательность  $\{v_m\}$  равномерно сходится к  $z$  и  $\frac{1}{g} \chi_{e_n} \in L_\infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда для любой функции  $\psi \in \mathcal{L}_1$  при  $m \rightarrow \infty$

$$\int_X \psi (\chi_{e_n} \bar{v}_m - \chi_{e_n} \bar{z}) d\mu = \int_X \frac{1}{g} (\chi_{e_n} \bar{v}_m - \chi_{e_n} \bar{z}) \psi g d\mu \rightarrow 0.$$

Таким образом,  $\{\chi_{e_n} v_m\}$  сходится при  $m \rightarrow \infty$  к  $\chi_{e_n} z$  в  $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_1)$ -топологии. По теореме Лебега о мажорированной сходимости  $\{\chi_{e_n} z\}$  сходится к  $z$  в  $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_1)$ -топологии. Покажем, что  $P_G S z = K_G z$ . Нам потребуется

**Лемма 2.** Пусть  $w \in \mathcal{L}_\infty$ ,  $\{w_j\} \subset \mathcal{L}_\infty$ ,  $P_G S w_j = K_G w_j$  для всех  $j$  и  $\{w_j\}$  сходится к  $w$  в  $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_1)$ -топологии. Тогда  $P_G S w = K_G w$ .

**Доказательство.** Так как  $S$  — линейный положительный оператор на комплексном  $L_2$ , то, как известно,  $S$  — самосопряженный непрерывный оператор. В силу того, что  $\mathcal{L}_\infty \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$ ,  $\{w_j\}$  слабо сходится в  $L_2$  к  $w$ . Поэтому  $\{P_G S w_j\}$  слабо сходится в  $L_2$  к  $P_G S w$ . Но  $\{K_G w_j\}$  сходится к  $K_G w$  по норме  $L_\infty$  и  $K_G w_j = P_G S w_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Следовательно,  $P_G S w = K_G w$ .

Зафиксируем  $n$ . Так как  $\chi_{e_n} v_m \in H_0 \subset H$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , то  $P_G S \chi_{e_n} v_m = K_G \chi_{e_n} v_m$ . Применив лемму 2 к последовательности  $\{\chi_{e_n} v_m\}$  и элементу  $\chi_{e_n} z$ , получим  $P_G S z_n = K_G z_n$ , где  $z_n = \chi_{e_n} z$ . Снова применив лемму 2 к  $\{z_n\}$  и  $z$ , получим  $P_G S z = K_G z$  для любого  $z \in \mathcal{L}_\infty$ .

В силу того, что  $K_G^* : L_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$  — вполне непрерывный оператор, отсюда вытекает, что  $S P_G : L_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$  — вполне непрерывный оператор. Действительно,

оператор  $K_G : \mathcal{L}_\infty \rightarrow L_2$  плотно определен в  $L_2$ , и  $K_G \subset P_G S$ . Тогда  $SP_G \subseteq K_G^*$ , поэтому  $SP_G = K_G^*$ . Следовательно,  $SP_G$  отображает каждое ограниченное множество  $U$  в  $L_2$  в множество  $K_G^* U$ , компактное в  $\mathcal{L}_1$ .

Обозначим через  $F \subset G$ ,  $\mu F > 0$ , множество, на котором функция  $[g(t)]^{-1}$  ограничена некоторой постоянной  $d$ . Так как  $F \subset E$  и  $E$  не содержит атомов меры  $\mu$ , можно построить ортонормированную последовательность  $\{r_{n,F}\}$  обобщенных функций Радемахера с носителями в  $F$  (см., например, [4, с. 11, 12]). Эти функции обладают свойством

$$|r_{n,F}(t)| = \frac{1}{\sqrt{\mu F}} \chi_F(t)$$

для всех  $t \in X$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В силу слабой сходимости  $\{r_{n,F}\}$  к 0 и полной непрерывности  $SP_G$  как оператора из  $L_2$  в  $\mathcal{L}_1$  имеем

$$\|Sr_{n,F}\|_{1,g} = \|SP_G r_{n,F}\|_{1,g} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ ; здесь  $\|\cdot\|_{1,g}$  — норма в  $\mathcal{L}_1$ , определяемая равенством (5). Отсюда при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|S^{1/2}r_{n,F}\|^2 &= (Sr_{n,F}, r_{n,F}) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\mu F}} \int_F |Sr_{n,F}| d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu F}} \int_F \frac{1}{g} |Sr_{n,F}| g d\mu \leq \frac{d}{\sqrt{\mu F}} \|Sr_{n,F}\|_{1,g} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sr_{n,F}\| \leq \|S^{1/2}\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^{1/2}r_{n,F}\| = 0.$$

Таким образом,  $0 \in \sigma_c(S)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $T : L_2 \rightarrow L_2$  — положительный линейный оператор и  $0 \notin \sigma_c(T)$ . Тогда сужение оператора  $T$  на любое всюду плотное в  $L_2$  линейное многообразие, удовлетворяющее условию (A), не является интегральным оператором.

**Следствие 2.** Сужение тождественного оператора в  $L_2$  на любое всюду плотное в  $L_2$  линейное многообразие, удовлетворяющее условию (A), не является интегральным оператором.

Следствие 2 дополняет результат Заанена [5, с. 225] о неинтегральности сужения тождественного оператора на любой порядковый идеал в  $L_2$ . Неинтегральность тождественного оператора на всем  $L_2$  установлена Нейманом [6, с. 26]. Другие доказательства этого результата Неймана даны в [4, с. 20; 7, с. 56; 8, с. 402; 9, с. 53].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space. New York: Amer. Math. Soc., 1932.
2. Neumann J. Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators // Actual. Sci. Ind. Paris. 1935. N 229.
3. Коротков В. Б. О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 4. С. 752–754.
4. Коротков В. Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
5. Zaanen A. Riesz spaces. II. Amsterdam: North Holl. Publ. Co., 1983.
6. Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
7. Бухвалов А. В. Приложения методов теории порядково ограниченных операторов в пространствах  $L^p$  // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 6. С. 37–83.

8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
9. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах  $L^2$ . М.: Наука, 1985.

*Статья поступила 3 марта 2009 г.*

Коротков Виталий Борисович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
karpenko@post.nsu.ru