УДК 512.544

И. З. Голубчик, А. В. Михалёв

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ПОДГРУППА УНИТАРНОЙ ГРУППЫ НАД PI-КОЛЬЦОМ

В 1977 г. А. А. Суслин [1] доказал, что если A — коммутативное кольцо и $n\geqslant 3$, то элементарная подгруппа $E_n(A)$ нормальна в линейной группе $\mathrm{GL}_n(A)$. Этот результат играет важную роль при рассмотрении многих вопросов о строении группы $\mathrm{GL}_n(A)$ и за последние годы обобщен в различных направлениях. Так, М. С. Туленбаев [2] показал, что аналогичный результат имеет место для колец, конечно-порожденных как модуль над своим центром. Ортогональный и симплектический случаи рассмотрены в этой ситуации А. А. Суслиным и В. И. Копейко [3, 4] (существенно позже появилась работа [5], в которой передоказывается симплектический случай из [4]). Эти вопросы для сетевых подгрупп и классических групп Шевалле рассмотрены З. И. Боревичем, Н. А. Вавиловым и В. Наркевичем [6, 7, 8]. Достаточно большим и интересным классом колец, для которых вероятна справедливость такого типа результатов, является класс колец с полиномиальным тождеством, то есть PI-колец (в общем случае, как отметил В. Н. Герасимов [9], это не так). Ранее авторы показали [10], что для PI-кольца A группа $E_n(A)$ субнормальна в $\mathrm{GL}_n(A)$. Цель настоящей работы — доказать, что элементарная подгруппа унитарной группы над PI-кольцом субнормальна, а автоморфизм, тождественный на ней, является тождественным и на всей унитарной группе.

§ 1. Введение. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и инволюцией j, $U(R, j)=\{a\in R\,|\,aa^j=a^ja=1\}$ — унитарная группа кольца R, Z — центр кольца R, $[a, b]=a^{-1}b^{-1}ab$ и $[M, N]$ — коммутант подгрупп M и N группы $U(R, j)$ (см. [11]).

Определение 1. Пусть $f^2=f\in R$. Будем говорить, что $h^j(f)>1$ (или гиперболический ранг для f строго больше единицы), если существует система элементов $E_f=\{e_{ij}\,|\,1\leqslant i,\ j\leqslant 4\}\subseteq R$, такая, что $f=e_{11}$, $e_{ij}e_{ks}=\delta_{jk}e_{is}$, где δ_{jk} — символ Кронекера, и

$$e^j{}_{11}=e_{22},\quad e^j{}_{33}=e_{44},\quad e^j{}_{12}=-e_{12},\quad e^j{}_{13}=e_{42}. \tag{1}$$

Определение 2. *Пусть $h^j(f)>1$ и E_f — система элементов из определения 1. Через $E_f(R, j)$ обозначим подгруппу группы $U(R, j)$, порожденную множеством*

$$\{1+e_{ii}x(1-e_{ii})+(1-e_{ii})^jye^j{}_{ii}\in U(R, j)\,|\,x, y\in R,\ 1\leqslant i\leqslant 4\}.$$

Определение 3. *Через* p. i. $\deg R$ *обозначим* p. i.-*степень кольца R, то есть $m/2$, где m — наименьшая степень стандартного полинома* $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_m)=\sum\limits_{\sigma\in S_m}(-1)^{|\sigma|}x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}$, *обращающегося в нуль на всех первичных фактор-кольцах кольца R.*

Отметим, что кольцо R, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром, имеет конечную p. i.-степень, а p. i.-степень коммутативного кольца равна единице.

§ 2. Формулировки основных результатов.

Теорема 4. *Пусть R — конечно-порожденный модуль над сво-*

им центром Z, $f^2=f\in R$, $h^j(f)>1$. Тогда $E_f(R, j)$ — нормальная подгруппа группы $U(R, j)$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathrm{p.i.deg}\, R=k<\infty$, $f^2=f\in R$ *и* $h^j(f)>1$. *Тогда*

$$[U(R, j), \underbrace{E_f(R, j), \ldots, E_f(R, j)}_{k+1}] = E_f(R, j) \tag{2}$$

и $E_f(R, j)$ — субнормальная подгруппа группы $U(R, j)$.

Следствие 6. *Пусть R — конечно-порожденный модуль над своим центром (соответственно* $\mathrm{p.i.deg}\, R<\infty$), $n\geqslant 4$, $q\in \mathrm{GL}_n(R)$, $q^j=-q$ *и для некоторых чисел k_1, k_2, k_3, k_4, где $1\leqslant k_i\leqslant n$, пересечение строк и столбцов с этими номерами в матрице q имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $EU_n(q, R)$ — нормальная (соответственно субнормальная) подгруппа унитарной группы $U_n(q, R)$.

В том случае, когда $n=2m$, $m\geqslant 2$, $q=\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$ и инволюция j тождественна, утверждение следствия 6 доказано ранее в [4, следствие 1.11] (потом в [5]). Линейный и ортогональный случаи рассмотрены А. А. Суслиным, М. С. Туленбаевым, В. И. Копейко [1—3] и авторами [10, 12]. Теоремы 4 и 5 применимы и к тем подгруппам унитарной группы $U_n(q, R)$ при $n\geqslant 4$, которые реализуются в виде $U(S, \tau)$, где $a^\tau=qa^jq^{-1}$, S — подкольцо кольца матриц R_n, инвариантное относительно инволюции τ, $f^2=f\in S$, $h^\tau(f)>1$. В эту ситуацию, в частности, укладываются ρ-сетевые подгруппы [13, 6, 7, 8] унитарной группы $U_n(q, R)$, инвариантные относительно инволюции τ, где ρ — некоторое отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем каждый класс эквивалентности отношения ρ содержит четыре числа, для которых пересечение строк и столбцов матрицы q с этими номерами имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 7. *Пусть* $\mathrm{p.i.deg}\, R=k<\infty$, $f^2=f\in R$, $h^j(f)>1$, *H — подгруппа унитарной группы $U(R, j)$, $E(R, j)\subseteq H$ и φ — автоморфизм проективной группы $PH=H/(Z\cap H)$, тождественный на подгруппе $PE(R, j)=E(R, j)/(Z\cap E(R, j))$. Тогда автоморфизм φ тождествен и на всей группе PH.*

В линейном случае аналогичное утверждение доказано авторами в работе [10].

§ 3. Основная лемма.

Лемма 8. *Пусть $h^j(R)>1$,*

$$x\in e_{22}Re_{11}, \quad \alpha\in e_{11}R(1-e_{11}), \quad \beta\in e_{11}R(e_{11}+e_{44}), \tag{3}$$

$$\beta\alpha^j=\beta\beta^j=\alpha\alpha^j=0, \tag{4}$$

$$x+x^j=e_{21}\beta e_{11}+(e_{21}\beta e_{11})^j=0. \tag{5}$$

Тогда $1+(\alpha+\beta)^j x(\alpha+\beta)\in E^j(R)$.

Доказательство. Из (4) следует, что

$$1+(\alpha+\beta)^j x(\alpha+\beta)=(1+\alpha^j x\alpha)(1+\beta^j x\beta)(1+\alpha^j x\beta+\beta^j x\alpha). \tag{6}$$

Положим $\gamma=\alpha(1-e_{22})$. Из (3), (4) вытекает, что

$$\gamma\cdot\gamma^j=\gamma(e_{11}+e_{22})=0. \tag{7}$$

По определению 2 из (3), (7) вытекает, что $1+x\in E(R, j)$, $1+\gamma^j e_{22}-e_{11}\gamma\in E(R, \gamma)$, $1+x\gamma+\gamma^j x\in E(R, j)$ $[1+\gamma^j e_{22}-e_{11}\gamma, 1+x]=(1+x\gamma+\gamma^j x)(1+\gamma^j x\gamma)\in E(R, j)$, $a_1=1+\gamma^j x\gamma\in E(R, j)$. Далее, $a_2=1+e_{11}\alpha^j x\alpha e_{22}\in E(R, j)$, $a_3=1+\gamma^j x\alpha e_{22}+e_{11}\alpha^j x\gamma\in E(R, j)$, а из (3) получаем

$$1+\beta^j x\beta=1+(e_{22}+e_{33})\beta^j x\beta(e_{11}+e_{44})\in E(R, j), \tag{8}$$

$$a_1a_2a_3=1+\alpha^j x\alpha\in E(R, j). \tag{9}$$

Положим $\rho=\alpha(1-e_{22}-e_{33})$. Из (3), (4) получаем, что $\rho\rho^j=-\alpha(e_{33}+e_{44})\alpha^j$. По определению 2

$$\begin{gathered}a_4=1+\beta^j x\rho+\rho^j x\beta-\beta^j x\alpha e_{44}\alpha^j x\beta=\\=(1+e_{22}\beta^j x\rho+\rho^j x\beta e_{11}-e_{22}\beta^j x\alpha e_{44}\alpha^j x\beta e_{11})\times\\\times(1+e_{33}\beta^j x\rho+\rho^j x\beta e_{44}-e_{33}\beta^j x\alpha e_{44}\alpha^j x\beta e_{44})\times\\\times(1+e_{22}\beta^j x\alpha e_{33}\alpha^j x\beta e_{44}-e_{33}\beta^j x\alpha e_{44}\alpha^j x\beta e_{11}).\end{gathered}$$

Положим $y=e_{21}\beta$, $z=(e_{11}+e_{44})\alpha^j x e_{12}$. Из (3), (4) получаем, что $\beta=\beta(e_{11}+e_{44})$, $0=\beta\alpha^j=\beta(e_{11}+e_{44})\alpha^j$ и

$$yz=0. \tag{10}$$

Из (5) следует, что $1+e_{21}\beta e_{11}\in E(R, j)$,

$$1+y+e_{33}\beta^j e_{21}\in E(R, j),\quad 1+ze_{21}\beta e_{11}z^j=1+zyz^j\in E(R, j),$$

$$(1-z+z^j)(1+zyz^j)=1-z+z^j+zyz^j\in E(R, j).$$

Далее,

$$z^j(y+e_{33}\beta^j e_{21})=z(-y^j+e_{21}\beta e_{44})=z^j e_{21}\beta e_{44}=\gamma\in e_{11}Re_{44},$$

$$\begin{gathered}(1+z-z^j-zyz^j)(1+y+e_{33}\beta^j e_{21})=\\=(1+zy)(1-y)+z-z^j-zyz^j+y-e_{33}\beta^j e_{21}=a_5=E(R, j),\end{gathered}$$

$$z(\gamma+\gamma^j)=0,\quad z^j(\gamma+\gamma^j)=z^j\gamma^j=\sigma\in e_{11}R_{22},\quad y\gamma^j=0.$$

Тогда

$$\begin{gathered}a_6=a_5(1+\gamma-\gamma^j)=(1+zy)(1-\sigma)+z-z^j-zyz^j+y_1\in E(R, j),\\y_1=(y+e_{33}\beta^j e_{21})(1+\gamma-\gamma^j)-\gamma^j\in(e_2+e_3)R(e_1+e_4+e_2),\\a_7=a_6(1-z+z^j+2zyz^j)=(1+yz)(1-\sigma)+y_2\in E(R, j),\end{gathered} \tag{11}$$

где $y_2\in(e_{22}+e_{33})R(e_{11}+e_{44}+e_{22}+e_{33})$. Из (10) получаем $a_8=1+2y-y^j z^j\in U(R, j)$. Следовательно, $b=a_8^{-1}a_7\in U(R, j)$, и из (11) вытекает $b=1-\sigma+y_3$, $\sigma\in e_1R_2$, $y_3\in(e_{22}+e_{33})R(e_{22}+e_{33}+e_{11}+e_{44})$. Из условия $bb_j=1$ получаем, что $\sigma=-\sigma^j$, $y_3\in(e_{22}+e_{33})R$ и, следовательно, $b\in E(R, j)$, $a_8=a_7b^{-1}\in E(R, j)$, то есть

$$a_8=1+zy-y^j z^j=1+(e_{11}+e_{44})\alpha^j x\beta+\beta^j x\alpha(e_{22}+e_{33})\in E(R, j).$$

Из (3) имеем $\alpha e_{11}=0$,

$$a_4x_8=1+\beta^j x\alpha+\alpha^j x\beta+\beta^j x\alpha(e_{11}+e_{44}-e_{44})\alpha^j x\beta=1+\beta^j x\alpha+\alpha^j x\beta.$$

Таким образом, $1+\beta^j x\alpha+\alpha^j x\beta\in E(R, j)$, и из (6), (8), (9) получаем, что $1+(\alpha+\beta)^j x(\alpha+\beta)\in E(R, j)$. Это завершает доказательство леммы.

§ 4. Доказательство основной теоремы. Из определения 2 получаем, что нормальный делитель группы $E_f(R, j)$, порожденный элементом $1+e_{12}$, совпадает с $E_f(R, j)$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$1+a^j e_{12} a \in E_f(R, j)$$

для любого $a \in U(R, j)$. Пусть Z — центр кольца R, I — максимальный идеал в Z, RI — идеал в R, порожденный идеалом I.

4.1. Пусть $c \in 1+RI$. Тогда покажем, что $cd=1+\lambda$ для некоторых $d \in R$, $\lambda \in F$. Действительно, поскольку модуль R_Z конечно-порожден и $c \in 1+RF$, то по теореме Гамильтона — Келли [14]

$$c^m+\lambda_1 c^{m-1}+\ldots+\lambda_{m-1}c+(1+\lambda_m)=0,$$

где $\lambda_i \in I$, $c(-c^{m+1}-\lambda_1 c^{m-2}-\cdots-\lambda_{m-2})=1+\lambda_m$. Тем самым рассмотрение случая 4.1 завершено.

4.2. Пусть S — полупростое артиново кольцо и $a, b \in S$. Покажем, что тогда $(a+br)S=aS+bS$ для некоторого $r \in S$.

Доказательство случая 4.2 аналогично проверке условия $\mathrm{st.r.}\, S=1$, доказанного в [15]. (Здесь $\mathrm{st.r.}\, S$ — стабильный ранг кольца S.)

4.3. Пусть $a \in U(R, j)$. Тогда существуют $b \in E(R, j)$, $\lambda \in I$ и $s, t \in e_{22}Re_{22}$, такие, что

$$ts=(1+\lambda)e_{22}, \quad e_{12}Sab=\alpha+\beta, \tag{12}$$

$$\alpha\beta^j=\beta\beta^j=\alpha\alpha^j=e_{21}\beta e_{11}+(e_{21}\beta e_{11})^j=0, \tag{13}$$

$$\alpha \in e_{11}R(1-e_{11}), \quad \beta \in e_{11}R(e_{11}+e_{44}). \tag{14}$$

Действительно, пусть $S=R/RI$. Тогда фактор-кольцо $S/J(S)$ кольца S по радикалу $J(S)$ является полупростой артиновой алгеброй над полем Z/I. Из равенства

$$e_{22}=e_{22}aa^j e_{22}=e_{22}a(e_{33}+e_{44}+(1-e_{33}-e_{44}))a^j e_{22},$$

пункта 4.2 и определения группы $E(R, j)$ получаем, что существуют $b \in E(R, j)$, $r_1, r_2 \in R$, для которых

$$e_{22}abe_{33}r_1e_{22}-e_{22} \in \mathrm{RI}, \tag{15}$$

$$e_{22}abe_{11}r_2e_{22}-e_{22} \in \mathrm{RI}. \tag{16}$$

Из (15), (16) и пункта 4.1 получаем, что найдутся $\lambda_1, \lambda_2 \in I$, r_3, $r_4 \in R$, для которых

$$e_{22}abe_{33}r_3e_{22}=(1+\lambda_1)e_{22}, \tag{17}$$

$$e_{22}abe_{11}r_4e_{22}=(1+\lambda_2)e_{22}. \tag{18}$$

Положим $c=ab$, $w=e_{12}c^j e_{12}c$,

$$\beta=(1+\lambda_1)((1+\lambda_1)^j we_{11}-we_{11}c^j e_{11}r_3{}^j e_{44}),$$

$$\alpha=(1+\lambda_1)(1+\lambda_1)^j w-\beta.$$

Тогда

$$\alpha+\beta=e_{12}(1+\lambda_1)(1+\lambda_1{}^j)c^j e_{12}ab, \quad \beta \in e_{11}R(e_{11}+e_{44}),$$

$$\alpha \in e_{11}R(1-e_{11}), \quad \beta\beta^j=\beta(e_{11}+e_{44})(e_{22}+e_{33})\beta^j=0,$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^j \in \mathrm{R}e_{12}abb^j a^j e_{12}R=\mathrm{R}e_{12}e_{12}R=\{0\},$$

$$\beta\alpha^j \in ((1+\lambda_1)^j we_{11}c^j e_{11}-we_{11}c^j e_{11}r_3{}^j e_{44}c^j e_{11})R=0\cdot R=\{0\}.$$

Наконец,

$$e_{12}\beta e_{11}+(e_{21}\beta e_{11})^j=(1+\lambda_1)(1+\lambda_1)^j(e_{22}c^j e_{12}ce_{11}+(e_{22}c^j e_{12}ce_{11})^j)=0$$

и

$$e_{22}r_4^j e_{22}(1+\lambda_1)(1+\lambda_1)^j c^j e_{12}=(1+\lambda_2)(1+\lambda_1)^j(1+\lambda_1).$$

Тем самым справедливость условий (12), (13), (14) доказана, что завершает рассмотрение случая 4.3.

Пусть $a\in U(R, j)$. Для каждого максимального идеала I кольца Z зафиксируем элемент $\lambda_I\in I$, для которого справедливо условие (12) пункта 4.3. Тогда идеал кольца Z, порожденный элементами $(1+\lambda_I)(1+\lambda_I)^j$, совпадает со всем кольцом Z и

$$1=\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)(1+\lambda_i)^j\alpha_i,$$

где $\alpha_i\in Z$, $\lambda_i\in I_i$, I_i — максимальный идеал в Z. Следовательно,

$$1=\Big(\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)(1+\lambda_i)^j\alpha_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)(1+\lambda_i)^j\alpha_i\Big)^j$$

и

$$1=\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)(1+\lambda_i)^j\beta_i,\qquad \beta_i\in Z,\quad \beta_i^j=\beta_i. \tag{19}$$

Из равенства (19) вытекает, что

$$1+a^je_{12}a=\prod_{i=1}^{n}(1+((1+\lambda_i)a)^j(\beta_ie_{12})(1+\alpha_i)a)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}b_i(1+(e_{12}s_iab)^je_{21}t_i^j\beta_ie_{12}t_ie_{21}(e_{12}s_iab_i))b_i^j.$$

Из (12), (13), (14) и леммы 8 вытекает

$$d_i=1+(e_{12}s_iab_i)^je_{21}t_i^j\beta_ie_{12}t_ie_{21}(e_{12}s_iab_i)\in E_f(R, j),$$

$$b_i\in E_f(R, j),\ 1+a^je_{12}a=\prod_{i=1}^{n}b_id_ib_i^j\in E_f(R, j).$$

Тем самым доказательство теоремы завершено.

§ 5. Унитарные группы над PI-кольцами. Пусть I — идеал кольца R и $U(R, I, j)=\{a\in U(R, j)\mid a-1\in I\}$ — конгруэнц-подгруппа уровня I. Проведем доказательство теоремы 5, следствия 6 и теоремы 7.

5.1. Пусть Q — пересечение всех первичных идеалов P кольца R, для которых p. i. $\deg R/P<$ p. i. $\deg R$. Покажем, что

$$[E_f(R, j), U(R, Q, j)]\subseteq E_f(R).$$

Поскольку

$$[E_f(R, j), 1+e_{12}]=E_f(R, j)\ \text{и}\ [U(R, Q, j), E_f(R, j)]\subseteq U(R, Q, j),$$

то достаточно показать, что

$$1+a^je_{12}a\in E_f(R, j) \tag{20}$$

для всех $a\in U(R, Q, j)$. Пусть $a\in U(R, Q, j)$ и Λ — подкольцо кольца R, порожденное множеством

$$Z\cup\{e_{ij}\mid 1\leqslant i, j\leqslant 4\}\cup\{a, a^j\}.$$

В работе И. З. Голубчика и В. Т. Маркова [16] доказано, что идеал Q алгебраичен над $Q\cap Z$, и поскольку $a-1\in Q$, то все элементы коль-

ца Λ алгебраичны над Z. В силу теоремы А. И. Ширшова [17] кольцо Λ — конечно-порожденный модуль над Z. По теореме 4

$$1+a^j e_{12} a \in E_f(\Lambda, j) \subseteq E_f(R, j).$$

Тем самым условие (20) выполнено и рассмотрение случая 5.1 завершено.

5.2. Пусть $\operatorname{rad} R$ — первичный идеал кольца R. Тогда

$$[U(R, \operatorname{rad} R, j), E_f(R, j)] \subseteq E_f(R, j).$$

Действительно, достаточно показать, что

$$1+b^j e_{21} b \in E_f(R, j) \tag{21}$$

для всех $b \in U(R, \operatorname{rad} R, j)$. Пусть $b \in U(R, \operatorname{rad} R, j)$. Тогда $b-1 \in \operatorname{rad} R$ и $e_{11} b e_{11} r e_{11} = e_{11}$ для некоторого $r \in R$. Поэтому существует $a \in E_f(R, j)$, для которого

$$e_{11} b a e_{11} = 0,$$

и для элементов $\alpha = e_{11} b a$ и $\beta = 0$ выполнены условия леммы 8. Следовательно, $1+a^j b^j e_{21} b a \in E_f(R, j)$ и

$$1+b^j e_{21} b = a(1+a^j b^j e_{21} b a) a^j \in E_f(R, j).$$

Тем самым справедливость условия (21) доказана и рассмотрение случая 5.2 завершено.

Поскольку $\text{p. i. deg}\, R/Q < \text{p. i. deg}\, R$, где Q — идеал из пункта 5.1, то, проводя индукцию, получаем

$$[U(R, j), \underbrace{E_f(R, j), \ldots, E_f(R, j)}_{k-1}] \subseteq E_f(R, j) \cdot U(R, Q, j).$$

Далее, по пункту 5.1

$$[U(R, j), \underbrace{E_f(R, j), \ldots, E_f(R, j)}_{k}] \subseteq E_f(R, j) \cdot U(R, \operatorname{rad} R, j)$$

и по пункту 5.2

$$[U(R, j), \underbrace{E_f(R, j), \ldots, E_f(R, j)}_{k+1}] \subseteq E_f(R, j).$$

Тем самым доказательство теоремы 5 завершено.

5.3. Доказательство следствия 6. Пусть $S = R_n$ — кольцо $(n \times n)$-матриц над R, $\{f_{k,m} \mid 1 \leqslant k, m \leqslant n\}$ — матричные единицы кольца R_n, $a \in S$, $a^\tau = q a^j q^{-1}$, $e_{ij} = f_{k_i, k_j}$, $f = e_{11}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, k_1, k_2, k_3, k_4 — числа из условия следствия 6. Тогда $h^j(f) > 1$, система $E_f = \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 4\}$ удовлетворяет определению 1 с инволюцией τ, $U_n(q, R) = U(S, \tau)$, $E_n(q, R) = U_f(S, \tau)$. Таким образом, утверждение следствия 6 вытекает из теорем 4, 5.

5.4. Доказательство теоремы 7. Положим $H_k = [H, \underbrace{E(R, j), \ldots, E(R, j)}_{m+2-k}]$ для $1 \leqslant k \leqslant m+2$. Тогда $H_{m+2} = H$. По теореме 5 $H_1 = E(R, j)$. Проведя индукцию по k, покажем, что автоморфизм φ тождествен на группе PH. Так как $H_1 = E(R, j)$, то по условию следствия 7 автоморфизм φ тождествен на PH_1. Пусть φ тождествен на PH_{k-1} и $1 < k \leqslant m+2$. Тогда $H_{k-1} = [H_k, E(R, j)]$. В силу индуктивного предположения

$$\varphi(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}) = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} \tag{22}$$

для всех $\bar{a} \in PH_k$, $\bar{b} \in PE(R, j)$. Пусть

$$\varphi(\bar{a}) = \bar{c}_a = c_a \cdot (Z \cap H), \tag{23}$$

где $c_a \in H$, $a \in H_k$. Из (22) следует существование элементов $\lambda_{a,b} \in Z$, для которых

$$c_a b c_a^{-1} = aha^{-1} \cdot \lambda_{a,b} \tag{24}$$

при всех $b \in E(R, j)$. Из (24) получаем, что $c_a b c_a^{-1} = aba^{-1}$ для всех $b \in [E(R, j), E(R, j)]$. Поэтому $a^{-1}c_a$ лежит в централизаторе группы $[E(R, j), E(R, j)]$ и $a^{-1}c_a \in Z$, $\bar{a} = \bar{c}_a$. Из (23) следует, что $\varphi(\bar{a}) = \bar{a}$ для всех $\bar{a} \in PH_k$. Таким образом, теорема 7 доказана.

Авторы благодарны референту за ряд замечаний и предложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, **41**, № 2, 235—252.
2. Туленбаев М. С. Мультипликатор Шура элементарных матриц конечного порядка. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1979, **86**, 162—169.
3. Суслин А. А., Копейко В. И. Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1977, **71**, 216—250.
4. Копейко В. И. Стабилизация симплектических групп над кольцами многочленов. — Матем. сб., 1978, **106**, № 1, 94—107.
5. Taddei G. Invarience du sous-groupe symplectique élémentaire dans le groupe symplectique sur un anneau. — C. r. Acad. sci. **A**, 1982, **295**, 47—50.
6. Боревич З. И., Вавилов Н. А., Наркевич В. О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1979, **94**, 13—20.
7. Боревич З. И., Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом. — Докл. АН СССР, 1982, **267**, № 4, 777—778.
8. Вавилов Н. А. Коммутационные формулы в классических группах Шевалле. — В кн.: XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Часть первая. Минск, 1983, с. 37.
9. Герасимов В. Н. О свободных линейных группах. — В кн.: XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Часть первая. Минск, 1983, с. 52—53.
10. Голубчик И. З., Михалев А. В. О группе элементарных матриц над PI-кольцами. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1984, № 1, с. 78.
11. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972.
12. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1983, **132**, 97—109.
13. Боревич З. И., Вавилов Н. А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1978, **146**, 43—57.
14. Ленг С. Алгебра. М., 1968.
15. Басс Х. Алгебраическая *K*-теория. М., 1973.
16. Голубчик И. З., Марков В. Т. Локализационная размерность PI-колец. — Тр. Семинара им. И. Г. Петровского, 1981, вып. 6, 34—47.
17. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.

Поступила в редакцию
03.05.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1985, № 1

УДК 519.251

Е. Г. Дьяконова

НЕКОТОРЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ БОЛЬШОГО ПАКЕТА ЗАЯВОК

1. Постановка задачи. Обычно в системах массового обслуживания мы располагаем некоторой информацией о ходе обслуживания. С каждым требованием свяжем случайную величину η_0, которую будем трактовать как его длину, то есть как время, необходимое для обслужива-