Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Шутов, Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток, *Чебышевский сб.*, 2010, том 11, выпуск 1, 255–262

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.80
26 января 2025 г., 11:25:21

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

УДК 519.21

АРИФМЕТИКА И ГЕОМЕТРИЯ ОДНОМЕРНЫХ КВАЗИРЕШЕТОК [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе при помощи теоретико-числовых методов изучаются арифметические и геометрические свойства одномерных квазирешеток. Получена параметризация квазирешеток. Найдены условия их комбинаторной и геометрической эквивалентности. Изучены решения линейных диофантовых уравнений над квазирешетками.

Arithmetics and geometry of one-dimensional quasilattices.

A. V. Shutov (Vladimir)

In the paper we use some methods of number theory to study arithmetic and geometric properties of one-dimensional quasilattices. The parametrization of any quasilattice is obtained. Conditions of combinatorial and geometrical equivalence of quasilattices are found. We also study solutions of linear diophantine equations over quasilattices.

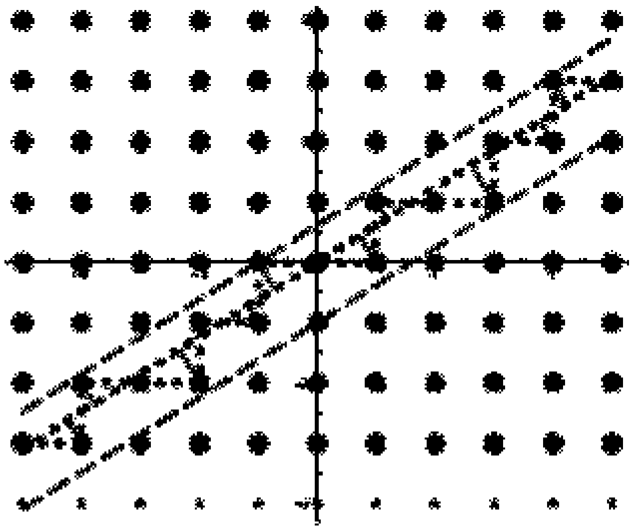
1 Понятие квазирешетки

Данная работа представляет собой расширенную версию доклада, прочитанного автором на VII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти Анатолия Алексеевича Карацубы и проходившей в мае 2010 года в городе Тула. Автор выражает признательность организаторам конференции за возможность выступить с докладом и опубликовать его текст в трудах конференции.

Целью данной работы является обзор недавних результатов полученных при помощи применения теоретико-числовых методов к изучению одномерных квазипериодических структур. Работа носит обзорный характер, поэтому доказательства всех результатов приводятся схематично или же опускаются.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00326.

Наиболее известным примером одномерной квазирешетки является так называемая квазирешетка Фибоначчи. Наиболее известный способ ее получения состоит в проектировании на прямую $y = \tau x$, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, расположенных в некоторой специально выбранной полосе вокруг этой прямой (рис. 1).



Существует целый ряд альтернативных способов определения квазирешетки Фибоначчи: геометрические подстановки, рекурентное соотношение, явная формула для точек, система счисления с основанием τ, параметризация поворотами окружности, алгебраическое сопряжение в кольце $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и т.д. Подробности можно найти в книге [6].

Существует два естественных способа обобщить определение квазирешетки Фибоначчи. Первый из них основан на использовании иррациональных поворотов окружности.

Пусть $\alpha \in (0;1)$ – иррациональное число, $\langle\cdot\rangle$ – дробная доля. В качестве квазирешетки L_α рассмотрим множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемое условиями

$$x_0 = 0;$$
$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \langle n\alpha\rangle < 1-\alpha \\ x_n + l_2, & \langle n\alpha\rangle \geqslant 1-\alpha \end{cases}; \tag{1}$$

Легко проверить, что квазирешетка Фибоначчи удовлетворяет данному определению.

Далее пусть $I \subseteq [0;1)$ – некоторый открытый справа полуинтервал. Рассмотрим множество

$$L_\alpha(I) = \{x_n \in L_\alpha : \langle n\alpha\rangle \in I\}. \tag{2}$$

Множества $L_\alpha(I)$ будем называть квазирешетками общего вида.

Второе естественное обобщение понятия квазирешетки Фибоначчи основано на использовании алгебраического сопряжения в вещественных квадратичных полях. Пусть ε – единица (обратимый элемент) некоторого вещественного квадратичного поля, причем $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Пусть I – некоторый открытый справа полуинтервал, содержащий 0. Определим квадратичную квазирешетку $L_\varepsilon(I)$ соотношением

$$L_\varepsilon(I) = \{x \in \mathbb{Z}[\varepsilon] : x' \in I\}, \tag{3}$$

где штрих означает операцию алгебраического сопряжения в поле $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Квазирешетка Фибоначчи удовлетворяет этому определению с $\varepsilon = \tau$ и $I = [-1; \tau)$.

Теорема 1. *Любая квадратичная квазирешетка является квазирешеткой общего вида.*

Доказательство теоремы 1 проводится в два этапа. Вначале рассматривается случай $I \subseteq I_\varepsilon = [-1; -1 + \varepsilon^{-1})$. В этом случае требуемый результат вытекает из того, что множество $I_\varepsilon \cap \mathbb{Z}[\varepsilon]$ имеет вид $\{-1 + \langle (n+1)\varepsilon \rangle \varepsilon^{-1} : n \in \mathbb{Z}\}$. В общем случае необходимо использовать преобразование $x \to \varepsilon^k x$ для того, чтобы построить квазирешетку $L_\varepsilon(\overline{I})$, подобную $L_\varepsilon(I)$, для которой $\overline{I} \subseteq I_\varepsilon$, после чего использовать тот факт, что множество точек, подобное квазирешетке общего вида снова есть квазирешетка общего вида.

2 Параметризация квазирешеток

Для изучения квазирешеток $L_\alpha(I)$ необходима информация о поведении дробных долей $\langle n\alpha \rangle$ на полуинтервале I. Для получения этой информации удобно использовать понятие отображения первого возвращения. Пусть $R_\alpha : x \to x + \alpha \bmod 1$ – иррациональный поворот окружности. Отображение первого возвращения на полуинтервале I определяется соотношением

$$d_I R_\alpha = R_\alpha^{n_I(x)}(x), \text{ где } n_I(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : R_\alpha^n(x) \in I\}.$$

Величина $n_I(x)$ есть время первого возвращения точки x в полуинтервал под действием R_α.

Теорема 2. *Отображение $d_I R_\alpha$ является либо поворотом окружности, либо перекладыванием трех отрезков.*

Доказательство теоремы и явное вычисление отображений $d_I R_\alpha$ можно найти в [4],[8].

Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Функция $n_I(x)$ принимает два или три значения. Более того, если $n_I(x)$ принимает три значения, то одно из них является суммой двух других.*

Доказательство можно найти в [7].

Теоремы 2, 3 немедленно приводят к следующей параметризации квазирешеток $L_\alpha(I)$.

Теорема 4. *Пусть $L_\alpha(I) = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – квазирешетка общего вида. Тогда если $d_I R_\alpha$ есть поворот окружности, то для некоторой нумерации точек квазирешетки существует поворот R_β и числа l_1', l_2' такие, что*

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n + l_1', & R_\beta(y_n) < 1 - \beta \\ y_n + l_2', & R_\beta(y_n) \geqslant 1 - \beta \end{cases}. \tag{4}$$

В противном случае существует перекладывание трех отрезков $T : [0;1) \to [0;1)$ и числа l_1', l_2', l_3' такие, что

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n + l_1', & T(y_n) \in I_1 \\ y_n + l_2', & T(y_n) \in I_2 \\ y_n + l_3', & T(y_n) \in I_3 \end{cases}, \tag{5}$$

где I_1, I_2 и I_3 – полуинтервалы, перекладываемые отображением T.

Следствие 1. *Квазирешетка $L_\alpha(I)$ содержит интервалы двух или трех различных длин. Более того, если $L_\alpha(I)$ содержит интервалы трех различных длин, то одна из этих длин является суммой двух других.*

Из полученной параметризации легко вытекает асимптотическая формула для числа точек квазирешетки в интервале.

Теорема 5. *Пусть $N(L_\alpha(I), \overline{x}, X) = \sharp\{x : x \in L_\alpha(I), \overline{x} \leqslant x < \overline{x} + X\}$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$N(L_\alpha(I), \overline{x}, X) = \frac{|I|}{l_1 + (l_2 - l_1)\alpha} X + o(X), \tag{6}$$

где $|I|$ – длина полуинтервала I.

Остаточный член в формуле (6) во многих случаях может быть значительно улучшен. В частности, в случае когда $d_I R_\alpha$ является поворотом окружности, то рассматриваемый остаток имеет порядок $O(1)$. Далее, для произвольной квадратичной квазирешетки $L_\varepsilon(I)$ остаток имеет порядок $O(\ln X)$. В общем случае рассмативамый остаток можно оценить через остаточный член задачи о числе попаданий последовательности дробных долей $\{\langle n\alpha \rangle\}$ в некоторый интервал. Точнее, можно получить оценку

$$|N(L_\alpha(I), \overline{x}, X) - \frac{|I|}{l_1 + (l_2 - l_1)\alpha} X| = O(\Delta_n(\alpha)),$$

где

$$\Delta_n(\alpha) = \sup_{J \subset [0;1)} |\sharp\{n : \langle n\alpha \rangle \in J\} - n|J||.$$

Известно, что скорость роста величины $\Delta_n(\alpha)$ определяется поведением неполных частных разложения α в цепную дробь. Современные оценки величины $\Delta_n(\alpha)$ имеются в работе [5].

3 Эквивалентность квазирешеток

Пусть $L_\alpha(I) = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – квазирешетка общего вида, имеющая длины интервалов l'_1, l'_2 и l'_3 (или l'_1 и l'_2 в вырожденном случае). Каждой такой квазирешетке поставим в соответствие кодирующую последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ по правилу

$$y_{n+1} - y_n = l'_{c_n}.$$

Введенная последовательность описывает комбинаторный порядок следования интервалов квазирешетки.

Две квазирешетки $L_\alpha(I)$ и $L_\beta(J)$ будем называть комбинаторно эквивалентными, если их кодирующие последовательности совпадают.

Две квазирешетки $L_\alpha(I)$ и $L_\beta(J)$ будем называть геометрически эквивалентными, если существует преобразование подобия $h : x \to kx + b$ такое, что $h(L_\alpha(I)) = L_\beta(J)$.

Ясно, что две геометрически эквивалентные квазирешетки комбинаторно эквивалентны. Также легко проверить, что две комбинаторно эквивалентные решетки геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие длины их интервалов пропорциональны.

Можно показать, что в случае квадратичной квазирешетки $L_\varepsilon(I)$ длины входящих в нее интервалов однозначно определяются параметризующим ее перекладыванием трех отрезков (или поворотом окружности) из теоремы 4. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Две квадратичные квазирешетки геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны.*

Рассмотрим теперь вопрос о комбинаторной эквивалентности квазирешеток. Пусть $L_\alpha(I)$ и $L_\alpha(J)$ – две квазирешетки. Через h_I и h_J обозначим преобразования подобия, переводящие I и J в $[0;1)$. Тогда из параметризаций (4), (5) легко следует, что квазирешеки будут комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда множества точек $h_I(\{\langle n\alpha\rangle\}_{n=-\infty}^{\infty} \cap I)$ и $h_J(\{\langle n\alpha\rangle\}_{n=-\infty}^{\infty} \cap J)$ совпадают. Отсюда вытекает следующий критерий комбинаторной эквивалентности.

Предложение 5. *Пусть $L_\alpha(I)$ и $L_\alpha(J)$ – две квазирешетки общего вида, а i и j – левые концы интервалов I и J соответственно. Тогда $L_\alpha(I)$ и $L_\alpha(J)$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются 2 условия.*

1) Существует преобразование подобия h такое, что

$$d_J R_\alpha = h \circ d_I R_\alpha \circ h^{-1};$$

2) Существуют $k, m \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\frac{\langle k\alpha\rangle - i}{|I|} = \frac{\langle m\alpha\rangle - j}{|J|},$$

если преобразование h из условия 1) имеет положительный коэффициент подобия и

$$\frac{\langle k\alpha\rangle - i}{|I|} \equiv 1 - \frac{\langle m\alpha\rangle - j}{|J|} \pmod 1,$$

если преобразование h из условия 1) имеет отрицательный коэффициент подобия.

Из двух условий предложения 5 наиболее трудным для проверки является условие 1). Будем называть его эквивалентностью отображений первого возвращения. В работе [4] проблема эквивалентности отображений первого возвращения была решена для случая, когда эти отображения являются поворотами окружности. В общем случае аналогичные аргументы позволяют получить следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть отображения первого возвращения $d_I R_\alpha$ и $d_J R_\alpha$ эквивалентны, то есть существует преобразование подобия h такое, что*

$$d_J R_\alpha = h \circ d_I R_\alpha \circ h^{-1}.$$

Тогда α – квадратичная иррациональность.

Теорема 8. *Пусть $\alpha \in (0;1)$ – квадратичная иррациональность. Тогда существуют эффективно вычислимые постоянные i_0, D_0 такие что отображения первого возвращения $d_I R_\alpha$ и $d_J R_\alpha$ эквивалентны тогда и только тогда когда выполняются два условия*

1) $\max\{|I|, |J|\} \leqslant i_0$;

2) $\frac{|I|}{|J|} = D_0^m$ *для некоторого целого m.*

Явные выражения для i_0 и D_0 могут быть записаны в терминах разложения α в цепную дробь.

Можно также доказать аналог теоремы 8 различающий собственные и несобственные преобразования подобия h. Интересно, что эквивалентность при помощи несобственного преобразования подобия возможна только в случае, когда длина периода разложения α в цепную дробь нечетна.

4 Диофантовы уравнения над квазирешетками

В.Г.Журавлевым было начато систематическое изучение различных классов диофантовых уравнений над квазирешеткой Фибоначчи. Были рассмотрены линейные диофантовы уравнения [1], представление чисел в виде суммы квадратов [2] и уравнение Пелля [3]. Общая гипотеза состоит в том, что все диофантовы результаты, доказанные для квазирешетки Фибоначчи, переносятся на случай квадратичной квазирешетки в случае одноклассности соответствующего поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. В данной работе мы ограничимся рассмотрением только линейных диофантовых уравнений.

Пусть вещественное квадратичное поле $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ одноклассно. Хорошо известна гипотеза о том, что таких полей бесконечно много. Рассмотрим квадратичную квазирешетку $\mathbb{L} = L_\varepsilon(I)$ для некоторого I, а также двумерную квазирешетку $\mathbb{L}^2 = L_\varepsilon(I) \times L_\varepsilon(I)$, являющуюся декартовым произведением одномерной квазирешетки $L_\varepsilon(I)$ на себя. Вопрос о разрешимости линейного диофантова уравнения $ax + by = c$ в точках квазирешетки $\mathbb{L}$ очевидным образом эквивалентен вопросу о структуре множества точек $\mathbb{L}^2 \cap l$, где l – прямая, заданная уравнением $ax + by = c$.

Теорема 9. *Пусть множество $\mathbb{L}^2 \cap l$ содержит хотя бы две точки. Тогда оно содержит бесконечно много точек. Более того, существуют открытые справа полуинтервалы I_1, I_2 такие, что*

$$\pi_i(\mathbb{L}^2 \cap l) = L_\varepsilon(I_i), \tag{7}$$

где π_i – проекции из $\mathbb{R}^2$ на оси координат.

Таким образом, либо линейное диофантово уравнение имеет не более одного решения в точках квазирешетки, либо оно имеет бесконечно много решений и множество всех решений геометрически эквивалентно некоторой квадратичной квазирешетке.

Из данной теоремы и теоремы 5 легко получить асимптитику для числа решений линейного диофантова уравнения над $\mathbb{L}$.

Теорема 10. *Пусть уравнение $ax + by = c$ имеет хотя бы два решения $x, y \in \mathbb{L}$. Пусть*

$$N(X) = \sharp\{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : ax + by = c, 0 \leqslant x < X\}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$N(X) = c(\mathbb{L}, a, b)X + O(\ln X). \tag{8}$$

Можно построить полуинтервалы, для которых остаточный член в формуле (8) имеет порядок $O(1)$.

Отметим также что в случае диофантовых уравнений над общими квазирешетками $L_\alpha(I)$ аналог теоремы 9 неверен. Более того, можно построить квазирешетку $L_\alpha(I)$, где α – квадратичная иррациональность и $I = [0; 1)$ над которой некоторые линейные диофантовы уравнения имеют не менее двух и не более конечного множества решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к дофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. -2007. -Т. 19. -Вып. 3. -С. 177–208.

[2] Журавлев В. Г. Суммы квадратов над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. -2006. -Т. 337. -С. 165–190.

[3] Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. -2008. -Т. 350. -С. 139–159.

[4] Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Записки научных семинаров ПОМИ. -2004. -Т. 314. - С. 272-284.

[5] Pinner C.G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha+\gamma\}$ // J.Number Theory. -1997. -V. 65. -P. 48-73.

[6] Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. -Springer. -2001. -402 p.

[7] Slater N.B. The distribution of the integers N for which $\{n\theta\} < \Phi$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. -1950. -V. 46. -P. 525-534.

[8] Zhuravlev V. G., Shutov A. V. Derivatives of circle rotations and similarity of orbits // Max-Plank-Institut fur mathematik. Preprint Series. -2004. -V. 62. -P. 1-11.

Владимирский Государственный Гуманитарный Университет
Получено 18.05.2010