



Общероссийский математический портал

С. В. Востоков, М. А. Иванов, Закон взаимности Эйзенштейна для формальных групп Любина–Тейта, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2011, том 386, 129–143

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

14 февраля 2025 г., 10:28:53



С. В. Востоков, М. А. Иванов

## ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ ЭЙЗЕНШТЕЙНА ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ЛЮБИНА–ТЕЙТА

### ВВЕДЕНИЕ

Классический закон взаимности Эйзенштейна дает условия равенства степенных вычетов в круговом поле, когда один из аргументов лежит в основном поле: пусть  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  – круговое расширение ( $p \neq 2$  – нечетное простое число,  $\zeta_p$  – первообразный корень степени  $p$  из 1),  $a \in \mathbb{Q}^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$ , причем  $\alpha \equiv b \pmod{(\zeta_p - 1)^2}$  для некоторого  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $(ab, p) = 1$ ,  $(a, \alpha) = 1$ ; тогда

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)_p = \left(\frac{\alpha}{a}\right)_p \quad (1)$$

(см. [1]).

Закон взаимности теории полей классов связывает произведение степенных вычетов с локальными символами норменного вычета, в частности для кругового поля  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)_p \left(\frac{\alpha}{a}\right)_p^{-1} = \left(\frac{a, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_p,$$

где  $\mathfrak{p} = (\zeta_p - 1)$  – простой идеал в  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ . Поэтому равенство (1) сводится к исследованию тривиальности локального символа норменного вычета  $\left(\frac{a, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_p$ . Используя это соображение, а также явные формулы для символа норменного вычета (см. [2]), в работе [6] закон взаимности Эйзенштейна обобщается на произвольное круговое поле  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ,  $n \neq 2$ .

В настоящей работе рассматривается обобщенный символ норменного вычета на формальных модулях Любина–Тейта и исследуется тривиальность этого символа, когда первый аргумент лежит в

---

*Ключевые слова:* формальные группы, символ Гильберта.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00777-а. Также авторы благодарят СПбГУ за поддержку исследований.

поле определения формальной группы. Пусть  $k$  – локальное поле, над кольцом целых  $\mathfrak{o}$  которого определена формальная группа Любина–Тейта  $F(X, Y)$ , соответствующая простому элементу  $\pi$  поля  $k$ , пусть  $[\pi]_F(X)$  – изогения для  $\pi$ , и расширение  $k'$  поля  $k$  содержит все корни изогении  $[\pi^n]_F(X)$ . Пусть  $\mathfrak{M}$  – максимальный идеал поля  $k'$  и  $F(\mathfrak{M})$  – формальный модуль на идеале  $\mathfrak{M}$ . На поле  $k'$  определен обобщенный символ норменного вычета:

$$\begin{aligned} (\ , \ )_{F,n} : k'^* \times F(\mathfrak{M}) &\rightarrow \ker [\pi^n]_F \\ (\alpha, \beta)_{F,n} &= \rho^{\sigma_\alpha} -_F \rho, \end{aligned}$$

где  $\sigma_\alpha$  – автоморфизм из  $\text{Gal}(k'^{alg}/k')$ , соответствующий элементу  $\alpha$  в системе локальной теории полей классов, а  $\rho$  – элемент алгебраического замыкания поля  $k$ , получающийся делением точки  $\beta$  на изогению  $[\pi^n]_F$ , то есть  $[\pi^n]_F(\rho) = \beta$  (см. [3, 4]).

**Теорема.** Пусть  $k' = k(\xi)$ ,  $[\pi](\xi) = 0$ ,  $\xi \neq 0$ , – поле деления круга для формальной группы Любина–Тейта  $F(X, Y)$ . Тогда для  $a \in \mathfrak{o}^*$ ,  $\beta \in F(\mathfrak{M})$  имеем

$$(a, \beta)_{F,1} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \underline{\beta}'(0) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

где  $\underline{\beta}(X)$  – произвольный ряд из кольца  $\mathfrak{o}[[X]]$ , такой что  $\underline{\beta}(\xi) = \beta$ .

**Теорема.** Пусть  $k' = k(\xi)$ ,  $[\pi^n]_F(\xi) = 0$ ,  $[\pi^{n-1}]_F(\xi) \neq 0$ . Тогда для  $a \in \mathfrak{o}^*$

$$(a, \beta)_F = 0 \ \forall \beta \Leftrightarrow \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \equiv 0 \pmod{\pi^n}.$$

Для доказательства этих теорем используются явные формулы для обобщенного символа норменного вычета  $(\ , \ )_{F,n}$ . Такие формулы впервые были получены Востоковым в работе [3], однако в этих формулах требовалось, чтобы разложение первого аргумента  $\alpha$  в  $(\alpha, \beta)_{F,n}$  из мультипликативной группы  $k'^*$  начиналось с представителя Тайхмюллера (подробнее см. [3, с. 788]). Такое ограничение не позволяет использовать эти формулы напрямую для обобщения закона взаимности Эйзенштейна на формальные группы Любина–Тейта. Поэтому в настоящей работе мы избавляемся от этого ограничения в формуле работы [3] (см. ниже §1.5). В первом параграфе доказываются вспомогательные результаты, а основные теоремы проверяются в последнем параграфе.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

## 1.1. Обозначения

•  $k$  – локальное поле характеристики 0 с полем вычетов нечетной характеристики  $p$ ,

•  $k'$  – конечное расширение  $k$ ,

•  $T', T$  – подполя инерции в расширении  $k'/k$  и  $k'/\mathbb{Q}_p$  соответственно,

•  $\mathfrak{o}$  – кольцо целых поля  $k$ ,

•  $\mathfrak{o}_{T'}, \mathfrak{o}_T$  – кольца целых полей  $T'$  и  $T$  соответственно,

•  $\mathfrak{o}'$  – кольцо целых поля  $k'$ ,

•  $\pi$  – простой элемент в  $\mathfrak{o}$ ,

•  $\pi'$  – простой элемент в  $\mathfrak{o}'$ ,

•  $\mathfrak{M}$  – максимальный идеал поля  $k'$ ,

•  $q = p^f$  – порядок поля вычетов  $k$ ,

•  $e$  – индекс ветвления  $k'/T$ ,

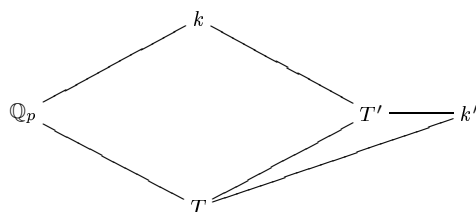
•  $\Delta$  – автоморфизм Фробениуса в  $T'/k$ ,

•  $\mathfrak{X}$  – система представителей Тайхмюллера в поле  $T'$ ,

•  $\text{Tr} : T' \rightarrow k$  – оператор следа,

•  $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$  такой, что  $\underline{\alpha}(\pi') = \alpha$ ,

•  $d = \frac{d}{dX}$ .



Пусть  $F(X, Y)$  – одномерная коммутативная формальная группа Любина–Тейта, определенная над кольцом  $\mathfrak{o}$ . Она определяет  $\mathfrak{o}$ -модуль  $F(\mathfrak{M})$  (см. [3, 4]). Обозначим  $\lambda(X) = X + c_2 X^2 + \sum_{j=3}^{\infty} c_j X^j$  – ее логарифм,

а  $[\pi](X) = \pi X + \pi C X^2 + X^q + \pi \sum_{i=3}^{\infty} g_i X^i$  – изогению элемента  $\pi$ .

Пусть поле  $k'$  содержит все корни изогении  $[\pi^n]$  и  $\xi$  – первообразный корень этой изогении, то есть  $[\pi^n](\xi) = 0$ , а  $[\pi^{n-1}](\xi) \neq 0$ .

Определим действие оператора  $\Delta$  на  $\mathfrak{o}_T\{\{X\}\}$ :

$$\Delta\left(\sum a_i X^i\right) = \left(\sum a_i X^i\right)^\Delta = \sum a_i^\Delta X^{qi}.$$

Введем ряд  $\underline{\xi}(X)$  из  $\mathfrak{o}_T$  такой, что  $\underline{\xi}(\pi') = \xi$ . Пусть  $s_m(X) = [\pi^m](\underline{\xi}(X))$ . Будем обозначать  $s_n(X)$  просто  $s(X)$ . Через  $u(X)$  обозначим  $\frac{s_n(X)}{s_{n-1}(X)}$ .

Построим логарифмы Артина–Хассе. Для мультипликативной группы: для любого  $\varphi(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$

$$\ell_m(\varphi) = \frac{1}{q} \log\left(\frac{\varphi^q}{\varphi^\Delta}\right),$$

или если  $\varphi(X) \in 1 + X\mathfrak{o}_T[[X]]$ , то

$$\ell_m(\varphi) = \left(1 - \frac{\Delta}{q}\right) \log(\varphi).$$

Для формальной группы логарифм Артина–Хассе задается формулой: для любого  $\psi(X) \in \mathfrak{o}_T[[X]]$

$$\ell_F(\psi) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right) \lambda(\psi).$$

Теперь можно определить спаривание

$$\begin{aligned} k'^* \times F(\mathfrak{M}) &\rightarrow \ker[\pi^n]_F, \\ \langle \alpha, \beta \rangle &= [\text{Tr res } \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})V]_F(\xi), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) &= \ell_F(\underline{\beta}) \underline{\alpha}^{-1} d\underline{\alpha} - \ell_m(\underline{\alpha}) d\left(\frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})\right) \\ V &= \frac{1}{s} - c_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_2$  – коэффициент при  $X^2$  в логарифме формальной группы.

В работе мы будем использовать те же обозначения для спаривания  $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = (\text{Tr res } \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})V) \bmod \pi^n$ .

Легко видеть, что спаривание  $\langle \alpha, \beta \rangle$  (а также  $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle$ ) имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 \alpha_2, \beta \rangle &= \langle \alpha_1, \beta \rangle +_F \langle \alpha_2, \beta \rangle, \\ \langle \alpha, \beta_1 +_F \beta_2 \rangle &= \langle \alpha, \beta_1 \rangle +_F \langle \alpha, \beta_2 \rangle \\ \langle \alpha^a, \beta \rangle &= [a]_F \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \langle \alpha, [c]_F \beta \rangle &= [c]_F \langle \alpha, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a \in \mathbb{Z}_p$ ,  $c \in \mathfrak{o}_k$ .

## 1.2. Несколько лемм

**Лемма 1.1.** В обозначениях предыдущего параграфа:

1.  $c_m \pi^{m-1} \in \mathfrak{o}$ , для коэффициентов  $c_m$  логарифма  $\lambda(X)$ .
2. Свойства  $s_m : ds_m \equiv 0$ ,  $s^\Delta \equiv s_{n-1}^\Delta$ ,  $\frac{1}{s} \equiv \frac{1}{s_{n-1}^\Delta}$ .
3.  $-c_2 = \frac{C}{\pi-1}$ .
4. Если  $G(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$  такой ряд, что  $G(\pi') = 0$ , то существует ряд  $\psi(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$  такой, что  $G(X) = u(X)\psi(X)$ .
5. Для любых  $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$  выполнено  $\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]X^{-1}$ .
6. Ряд  $\ell_m(\underline{\alpha})$  корректно определен, и  $p^{f-1}\ell_m(\underline{\alpha}) \in \mathfrak{o}_T[[X]]$ .
7. Для любого ряда  $h \in \mathfrak{o}_T((X))$  выполнено  $dh^\Delta = X^{-1}q(Xdh)^\Delta$ .
8. Для любого ряда  $h \in \mathfrak{o}_T((X))^*$  выполнено  $h^{-1}dh = d\ell_m(h) + X^{-1}(Xh^{-1}dh)^\Delta$ .

**Доказательство.**

1. см. [3, §1, п. 1].
2. см. [3, §1, п. 4].
3. Так как  $\lambda(X) = X + c_2X^2 + \dots$ , то  $\lambda^{-1}(X) = X - c_2X^2 + \dots$ .  
Поэтому

$$\begin{aligned} [\pi]_F(X) &= \lambda^{-1}(\pi\lambda(X)) \\ &= (\pi X + \pi c_2 X^2 + \dots) - c_2 (\pi X + \pi c_2 X^2 + \dots)^2 + \dots \\ &= \pi X - \pi(\pi-1)c_2 X^2 + \dots \end{aligned}$$

А так как мы обозначили  $[\pi]_F(X) = \pi X + \pi C X^2 + \dots$ , то получаем, что  $-c_2 = \frac{C}{\pi-1}$ .

4. См. [2, §2, лемма 6].
5. См. [3, §5, лемма 12].
6. См. [3, в доказательстве леммы 12].
7. Так как это тождество линейное, его достаточно доказать для одночленов. Подставив  $h(X) = X^i$ , получаем, что обе части равны  $qiX^{qi-1}$ .
8. Пусть  $h(X) = aX^m\varepsilon(X)$ , где  $a \in \mathfrak{o}_T^*$ ,  $\varepsilon \equiv 1 \pmod{X}$ . Тогда из определения функции  $\ell_m$  следует, что  $\ell_m(h) = \ell_m(a) + \ell_m(\varepsilon)$  и, значит,  $d\ell_m(h) = d\ell_m(\varepsilon)$ , так как  $\ell_m(a) \in \mathfrak{o}_T$ .

Далее  $\ell_m(\varepsilon) = (1 - \frac{\Delta}{q}) \log \varepsilon$ , откуда, используя тождество п. 7, получаем  $d\ell_m(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}d\varepsilon - X^{-1}(X\varepsilon^{-1}d\varepsilon)^\Delta$ . Кроме того, для  $h(X) = aX^m\varepsilon(X)$  имеем  $h^{-1}dh = mX^{-1} + \varepsilon^{-1}d\varepsilon$ . Значит,

$$\begin{aligned} d\ell_m(h) + X^{-1}(Xh^{-1}dh)^\Delta &= \varepsilon^{-1}d\varepsilon + X^{-1}(X(h^{-1}dh - \varepsilon^{-1}d\varepsilon))^\Delta \\ &= \varepsilon^{-1}d\varepsilon + X^{-1}(XmX^{-1})^\Delta \\ &= \varepsilon^{-1}d\varepsilon + mX^{-1} = h^{-1}dh. \end{aligned}$$

□

**Замечание 1.2.** Из леммы 1.1, пп. 2, 3 следует, что ряд  $V$  в формуле (2) можно заменить на

$$\frac{1}{s_{n-1}^\Delta} + \frac{C}{\pi - 1}.$$

**Лемма 1.3.** Для любого  $m \geq 1$  выполнено сравнение

$$c_m \frac{u^{\Delta m}}{\pi} (1 - \pi \Delta)V \equiv 0 \pmod{(\pi^n, \deg 1)}.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$u = \frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{[\pi](s_{n-1})}{s_{n-1}} = \pi + \pi C s_{n-1} + s_{n-1}^2 f(s_{n-1}),$$

где  $f \in \mathfrak{o}[[X]]$ . Тогда

$$u^{\Delta m} \equiv \pi^m + \pi^m m C s_{n-1}^\Delta \pmod{(s_{n-1}^2)^\Delta}. \quad (4)$$

Откуда получаем

$$c_m \frac{u^{\Delta m}}{\pi} \frac{1}{s_{n-1}^\Delta} \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^\Delta} + c_m \pi^{m-1} m C \pmod{\deg 1},$$

и, значит, (пользуясь замечанием 1.2)

$$c_m \frac{u^{\Delta m}}{\pi} V \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^\Delta} + c_m \pi^{m-1} m C + c_m \frac{u^{\Delta m}}{\pi} \frac{C}{\pi - 1} \pmod{\deg 1}. \quad (5)$$

Далее

$$\frac{u^{\Delta m}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} = \frac{u^{\Delta m}}{s^{\Delta}} \cdot \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} = \frac{u^{\Delta(m-1)}}{s_{n-1}^{\Delta}} \cdot \frac{u^{\Delta} s_{n-1}^{\Delta}}{s^{\Delta}} \cdot \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} = \frac{u^{\Delta(m-1)}}{s_{n-1}^{\Delta}} \cdot \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}},$$

так как  $u = \frac{s}{s_{n-1}}$ . Используя вид  $u^{\Delta m}$ , получаем

$$\begin{aligned} c_m \frac{u^{\Delta m}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} &\equiv c_m \left( \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\Delta}} + \pi^{m-1}(m-1)C \right) \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} \\ &\equiv c_m \pi^{n-1} \left( \frac{1}{s_{n-1}^{\Delta}} + (m-1)C \right) \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} \pmod{\deg 1}. \end{aligned}$$

По лемме 1.1, п. 1, первый сомножитель имеет целые коэффициенты, а по п. 2  $\frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} \equiv 1 \pmod{\pi^n}$ , значит

$$c_m \frac{u^{\Delta m}}{s_{n-1}^{\Delta \Delta}} \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\Delta}} + c_m \pi^{m-1}(m-1)C \pmod{(\pi^n, \deg 1)}.$$

Отсюда (пользуясь замечанием 1.2)

$$c_m u^{\Delta m} V^{\Delta} \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\Delta}} + c_m \pi^{m-1}(m-1)C + c_m u^{\Delta m} \frac{C}{\pi - 1}. \quad (6)$$

Вычитая из сравнения (5) сравнение (6), получаем

$$\begin{aligned} c_m \frac{u^{\Delta m}}{\pi} (1 - \pi \Delta) V &\equiv c_m \pi^{m-1} C - c_m U^{\Delta m} \frac{C}{\pi} \\ &= c_m C \left( \pi^{n-1} - \frac{u^{\Delta m}}{\pi} \right) \pmod{(\pi^n, \deg 1)}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что согласно сравнению (4)  $\pi^{n-1} - \frac{u^{\Delta m}}{\pi} \equiv 0 \pmod{\deg 1}$ , откуда следует сравнение нашей леммы.  $\square$

### 1.3. Независимость спаривания по второму аргументу

Независимость спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  по второму аргументу означает, что спаривание  $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle$  не зависит от способа разложения элемента  $\beta$  из  $F(\mathfrak{M})$  в степенной ряд по униформизирующей  $\pi'$  с коэффициентами из  $\mathfrak{o}_{T'}$ . Из линейности спаривания по второму аргументу (см. (3)) нам достаточно доказать, что

$$\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = 0, \quad \text{если } \underline{\beta}(\pi') = 0.$$



**Лемма 1.4.** Если  $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$  и  $\underline{\beta}(\pi') = 0$ , то для любого  $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$  выполнено сравнение

$$\ell_m(\underline{\alpha}) \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) dV \equiv 0 \pmod{(\pi^n, \deg 0)}. \quad (7)$$

**Доказательство.** Так как  $\frac{1}{s} \equiv \frac{1}{s_{n-1}^\Delta} \pmod{\pi^n}$ , то

$$d \frac{1}{s} \equiv X^{-1} q \left( X d \frac{1}{s_{n-1}} \right)^\Delta \pmod{\pi^n},$$

тем самым сравнение (7) равносильно

$$\left( \frac{q}{\pi} \ell_m(\underline{\alpha}) \right) X^{-1} \left( X \lambda(u\psi) d \frac{1}{s_{n-1}} \right)^\Delta \equiv 0 \pmod{(\pi^n, \deg 0)}. \quad (8)$$

Согласно лемме 1.1, п. 4,  $\underline{\beta} = u\psi$ , для некоторого ряда  $\psi(X) \in X \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ . Кроме того,  $\frac{q}{\pi} \ell_m(\underline{\alpha}) \in \mathfrak{o}_T[[X]] \subset \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$  и, значит, сравнение (8) сводится к проверке сравнения

$$\lambda(u\psi) d \left( \frac{1}{s_{n-1}} \right) \equiv 0 \pmod{(\pi^n, \deg 0)}.$$

Из определения рядов  $u$ ,  $\lambda$  и  $s_{n-1}$  следует, что

$$\lambda(u\psi) = \pi a + a_0 X^e + a_1 \frac{X^{qe}}{\pi} + a_2 \frac{X^{2qe}}{\pi^2} + \dots,$$

где  $a, a_i \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ . Далее,

$$ds_{n-1} \equiv 0 \pmod{\pi^{n-1}},$$

(см. лемму 1.1, п. 2). Кроме того,

$$\frac{1}{s_{n-1}} \in X^{-\frac{\epsilon}{q-1}} \mathfrak{o}[[X]] \left[ \left[ \pi X^{-\frac{\epsilon}{q}} \right] \right]$$

по определению  $s_{n-1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} d \frac{1}{s_{n-1}} &= \frac{ds_{n-1}}{s_{n-1}^2} \\ &= \pi^{n-1} \left( b_0 X^{-\frac{2\epsilon}{q-1}} + b_1 \pi X^{-\frac{2\epsilon}{q-1} - \frac{\epsilon}{q}} + b_2 \pi^2 X^{-\frac{2\epsilon}{q-1} - \frac{2\epsilon}{q}} + \dots \right), \end{aligned}$$

где  $b_i \in \mathfrak{o}[[X]]$ . Откуда

$$\lambda(u\psi)d\frac{1}{s_{n-1}} = \pi^{n-1} \left( \pi a + a_0 X^e + a_1 \frac{X^{qe}}{\pi} + a_2 \frac{X^{2qe}}{\pi^2} + \dots \right) \\ \times \left( b_0 X^{-\frac{2e}{q-1}} + b_1 \pi X^{-\frac{2e}{q-1} - \frac{e}{q}} + b_2 \pi^2 X^{-\frac{2e}{q-1} - \frac{2e}{q}} + \dots \right).$$

Осталось проверить, что коэффициенты при отрицательных степенях делятся на  $\pi^n$ . Действительно рассмотрим произведение

$$\pi^{n-1} \frac{1}{\pi^m} a_m X^{m q e} \cdot \pi^r b_r X^{-\frac{2e}{q-1} - \frac{r e}{q}}.$$

Надо проверить, что если:  $m q e < \frac{2e}{q-1} - \frac{r e}{q}$ , то:  $n - 1 - m + r \geq n \Leftrightarrow r \geq m + 1$ . Последнее проверяется непосредственно.  $\square$

**Лемма 1.5.** Если  $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$  и  $\underline{\beta}(\pi') = 0$ , то при любом  $\alpha(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$  выполнено

$$\text{res } \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})V \equiv \text{res} \left( \lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V - \frac{1}{q} \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-\Delta} d\underline{\alpha}^{\Delta}V \right) \text{ mod } \pi^n.$$

**Доказательство.** Из предыдущей леммы и очевидного равенства

$$0 = \text{res } d \left( \ell_m(\underline{\alpha}) \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})V \right) \\ = \text{res} \left( d(\ell_m(\underline{\alpha})) \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})V + \ell_m(\underline{\alpha}) d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) V + \ell_m(\underline{\alpha}) \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) dV \right)$$

следует, что

$$\text{res } \ell_m(\underline{\alpha}) d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) V \equiv - \text{res } d(\ell(\underline{\alpha})) \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})V \text{ mod } \pi^n.$$

Отсюда и из определения ряда  $\Phi$  (см. (2)) получаем:

$$\text{res } \Phi V \equiv_{\pi^n} \text{res} \left( \ell_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V + d\ell_m(\underline{\alpha}) \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})V \right) \\ = \text{res} \left( \ell_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V + \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V - \frac{1}{q} \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-\Delta} d\underline{\alpha}^{\Delta}V \right) \\ = \text{res} \left( \lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V - \frac{1}{q} \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-\Delta} d\underline{\alpha}^{\Delta}V \right).$$

$\square$

**Лемма 1.6.** При выполнении условий леммы 1.4 имеем

$$\text{res } \Phi V \equiv \text{res } (X^{-1}(1-\Delta)(X\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V)) \equiv 0 \pmod{\pi^n}.$$

**Доказательство.** Так как  $d\underline{\alpha}^\Delta = qX^{q-1}(d\underline{\alpha})^\Delta$ , то ряд

$$h = \frac{1}{q}X\underline{\alpha}^{-\Delta}d\underline{\alpha}^\Delta \in \mathfrak{o}_T[[X]].$$

Поэтому сравнение леммы 1.3 дает сравнение для  $\underline{\beta} = u\psi$ :

$$\frac{1}{q}X\underline{\alpha}^{-\Delta}d\underline{\alpha}^\Delta \frac{\Delta}{\pi}\lambda(\underline{\beta})(1-\pi\Delta)V \equiv 0 \pmod{(\pi^n, \text{deg } 1)}.$$

Откуда

$$\text{res } \frac{1}{q}\underline{\alpha}^{-\Delta}d\underline{\alpha}^\Delta \frac{\Delta}{\pi}\lambda(\underline{\beta})V \equiv \text{res } \frac{1}{q}\underline{\alpha}^{-\Delta}d\underline{\alpha}^\Delta \lambda(\underline{\beta})^\Delta V^\Delta \pmod{\pi^n}.$$

Тогда, используя лемму 1.5, получаем

$$\begin{aligned} \text{res } \Phi V &= \text{res } \left( \underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V - \frac{1}{q}\underline{\alpha}^{-\Delta}d\underline{\alpha}^\Delta \lambda(\underline{\beta})^\Delta V^\Delta \right) \\ &\equiv \text{res } X^{-1} \left( X\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V - (X\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V)^\Delta \right) \\ &\equiv \text{res } \left( X^{-1}(1-\Delta)(X\underline{\alpha}^{(-1)}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V) \right) \equiv 0 \pmod{\pi^n}. \end{aligned}$$

□

**Предложение 1.7.** Если  $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ ,  $\beta(\pi') = 0$  и  $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$ , то выполнено равенство  $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = 0$ .

**Доказательство.**  $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = [\text{Tr } \text{res } \Phi V](\xi)$ , при этом согласно лемме 1.6,  $\text{Tr } \text{res } \Phi V \equiv 0 \pmod{\pi^n}$ . □

#### 1.4. Инвариантность спаривания относительно замены переменной

Пусть имеется замена переменной  $X = g(Y) = rY\varepsilon(Y)$ , где  $r \in \mathfrak{o}_T^*$ ,  $\varepsilon(Y) \equiv 1 \pmod{Y}$ . Докажем инвариантность спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  для пары  $X, \beta(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]X$ . Заметим, что так как  $\beta(X) = E_F(\ell_F(\beta))$  (см. [3, §2, п. 3, (29)]), то из формальной аддитивности функции  $E_F$  и линейности спаривания по второму аргументу следует, что инвариантность достаточно доказать для пары  $X, E_F(aX^m)$ ,  $m \geq 1$ , где  $a$  – представитель системы Тайхмюллера  $\mathfrak{A}$ .

Поскольку функции  $\ell_F$  и  $E_F$  так же, как и  $\Delta$ , зависят от выбора переменной, то будем писать  $\ell_{F,X}, E_{F,X}, \Delta_X$ . Кроме того, для удобства обозначим

$$[\underline{\alpha}(X), \underline{\beta}(X)]_X := \text{res } X \Phi_X(\underline{\alpha}, \underline{\beta})V(X).$$

**Предложение 1.8.** Пусть  $p \neq 2$ ,  $X = g(Y) = rY\varepsilon(Y)$ . Тогда

$$[X, E_{F,X}(aX^m)]_X = [g(Y), E_{F,X}(ag^m(Y))]_Y \bmod \pi^n.$$

**Доказательство.** Из определения спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_X(X, E_{F,X}(aX^m)) &= aX^{m-1}, \\ \Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m)) &= \ell_{F,Y}(E_{F,X}(ag^m))g^{-1} \frac{dg}{dY} - \ell_{m,Y}(g) \frac{d}{dY} \left( \frac{\Delta_Y}{\pi} \lambda(E_{F,X}(ag^m)) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{\Delta_Y}{\pi} \right) \left( ag^m + \frac{(ag^m)^q}{\pi} + \frac{(ag^m)^{q^2}}{\pi^2} + \dots \right) g^{-1} \frac{dg}{dY} \\ &\quad - \ell_{m,Y}(g) \frac{d}{dY} \frac{\Delta_Y}{\pi} \left( ag^m + \frac{(ag^m)^q}{\pi} + \frac{(ag^m)^{q^2}}{\pi^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m)) &= ag^{m-1} \frac{dg}{dY} \\ &\quad + \sum_{r \geq 1} \frac{\alpha^{q^r}}{\pi^r} \left( (g^{mq^r} - g^{mq^{r-1}\Delta_Y}) g^{-1} \frac{dg}{dY} - \ell_{m,Y}(g) \frac{d}{dY} (g^{mq^{r-1}\Delta_Y}) \right). \end{aligned}$$

Из леммы 1.1, пп. 7 и 8, получаем

$$\begin{aligned} (g^{mq^r} - g^{mq^{r-1}\Delta_Y}) g^{-1} \frac{dg}{dY} - \ell_{m,Y}(g) \frac{d}{dY} (g^{mq^{r-1}\Delta_Y}) \\ = \frac{d}{dY} \left( \frac{g^{mq^r} - g^{mq^{r-1}\Delta_Y}}{q^r m} - \ell_{m,Y}(g) g^{mq^{r-1}\Delta_Y} \right). \end{aligned}$$

Поэтому ряд  $\Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m))$  можно записать в виде

$$\Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m)) = ag^{m-1} \frac{dg}{dY} + \frac{d}{dY} \sum_{r \geq 1} \varphi_r(Y),$$

где  $\varphi_r(Y) = (ag^m)^{q^{r-1}\Delta_Y} S_r$ , а  $S_r = \frac{g^{q^r m (1 - \frac{\Delta_Y}{q})} - 1}{q^r m \pi^r} - \frac{\ell_{m,Y}(g)}{\pi^r}$ .

Проверим, что  $p^{f-1}S_r \in \mathfrak{o}_T[[X]]$ . Действительно,

$$\begin{aligned} p^{f-1}S_r &= p^{f-1} \left( \frac{\exp(q^r m \ell_{m,Y}(g)) - 1}{q^r m \pi^r} - \frac{\ell_{m,Y}(g)}{\pi^r} \right) \\ &= \sum_{i \geq 2} \frac{a_i}{i!} (p^{f-1} \ell_{m,Y}(g))^i, \end{aligned}$$

где  $a_i = \frac{(q^r m)^{i-1}}{\pi^r p^{(f-1)(i-1)}}$ . Ряд  $p^{f-1} \ell_{m,Y}(g)$  имеет целые коэффициенты согласно лемме 1.1, п. 6. Кроме того, из условий  $r \geq 1$ ,  $i \geq 2$ ,  $q = p^f$  следует, что  $a_i \equiv 0 \pmod{p^{i-2}}$ . Поэтому при  $p \neq 2$  элемент  $\frac{a_i}{i!} \in \mathbb{Z}_p$ , то есть ряд  $p^{f-1}S_r$ , а с ним ряды  $p^{f-1}\varphi_r$ , а значит и  $p^{f-1} \sum_{r \geq 1} \varphi_r(Y)$

будут иметь целые коэффициенты.

Осталось использовать лемму 13 работы [3], чтобы получить сравнение

$$\begin{aligned} [g, E_{F,X}(ag^m)]_Y &= \text{res}_Y \Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m)) / s_{n-1}^\Delta(Y) \\ &= \text{res}_Y \left( ag^{m-1} \frac{dg}{dY} + \frac{d}{dY} \sum_{r \geq 1} \varphi_r \right) / s_{n-1}^\Delta(Y) \\ &\equiv \text{res}_Y \left( ag^{m-1} \frac{dg}{dY} \right) / s_{n-1}^\Delta(Y) \\ &= \text{res}_Y ag^{m-1} / s_{n-1}^\Delta(Y) \frac{dg}{dY} \\ &= \text{res}_X aX^{m-1} / s_{n-1}^\Delta(X) = [X, E_{F,X}(aX^m)]_X, \end{aligned}$$

и предложение доказано.  $\square$

### 1.5. Совпадение с обобщенным символом норменного вычета

Целью этого параграфа является доказательство совпадения построенного в явном виде спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  с обобщенным символом норменного вычета.

**Теорема 1.9.** *Для любого  $\alpha \in k'^*$  и  $\beta \in F(\mathfrak{M})$  и рядов  $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$ ,  $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_T[[X]]$  таких, что  $\underline{\alpha}(\pi') = \alpha$ ,  $\underline{\beta}(\pi') = \beta$  имеем равенство*

$$\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = (\alpha, \beta)_F,$$

тем самым,

$$(\alpha, \beta)_F = [\text{Tr res}_X \Phi(\alpha, \beta)V](\xi),$$

где ряды  $\Phi$  и  $V$  определены в (2).

**Доказательство.** Доказательство проходит так же, как и доказательство теоремы 2 в работе [3], с использованием выше доказанных предложений 1.7 и 1.8. Именно, сперва, используя независимость спаривания  $\langle , \rangle$  (см. предложение 1.7), доказывается, что  $\langle \pi', \beta \rangle = (\pi', \beta)_F$  для простого элемента  $\pi'$  из  $k'$  и элемента  $\beta \in F(\mathfrak{M})$ .

Далее, пусть  $u$  – единица кольца  $\mathfrak{o}'$ ,  $\pi'$  – фиксированный простой элемент поля  $k'$ , а  $\tau = \pi' u$  – другой простой из  $k'$ .

Тогда из инвариантности спаривания  $\langle , \rangle$  (см. предложение 1.8) следует

$$\begin{aligned} \langle u, \beta \rangle_{\pi'} &= \langle \tau, \beta \rangle_{\pi'} -_F \langle \pi', \beta \rangle_{\pi'} = \langle \tau, \beta \rangle_{\tau} -_F \langle \pi', \beta \rangle_{\pi'} \\ &= (\tau, \beta)_F -_F (\pi', \beta)_F = (u, \beta)_F. \end{aligned}$$

В общем случае, отсюда и из линейности спаривания  $\langle , \rangle$  по первому аргументу получаем для  $\alpha = (\pi')^a u$ ,  $u \in \mathfrak{o}'^*$ :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_F = [a]_F \langle \pi', \beta \rangle_F +_F \langle u, \beta \rangle_F = [a](\pi', \beta)_F +_F (u, \beta)_F = (\alpha, \beta)_F.$$

□

## 2. ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ ЭЙЗЕНШТЕЙНА

В этом разделе мы обобщим закон взаимности Эйзенштейна на символ норменного вычета в случае формальной группы Любина–Тейта. В мультипликативном случае соответствующие результаты получены в [6].

**Лемма 2.1.** Пусть  $a \in \mathfrak{o}^*$ , тогда

$$\frac{q}{\pi} \ell_m(a) = \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} t,$$

причем

$$t \equiv 1 \pmod{\pi}.$$

**Доказательство.** Так как  $\frac{a^{q-1}-1}{\pi} \in \mathfrak{o}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{q}{\pi} \ell_m(a) &= \frac{q}{\pi} \cdot \frac{1}{q} \log \left( \frac{a^q}{a^\Delta} \right) = \frac{1}{\pi} \log(a^{q-1}) = \frac{1}{\pi} \log \left( 1 + \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \right) \\ &= \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \pi + \frac{1}{3} \left( \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \pi \right)^2 - \dots \right)}_t \equiv \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} t. \end{aligned}$$

□

**Теорема 2.2.** Пусть  $k' = k(\xi)$ ,  $[\pi](\xi) = 0$ ,  $\xi \neq 0$ , – поле деления круга для формальной группы Любина–Тейта  $F(X, Y)$ . Тогда для  $a \in \mathfrak{o}^*$ ,  $\beta \in F(\mathfrak{M})$  имеем

$$(a, \beta)_{F,1} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \underline{\beta}'(0) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

где  $\underline{\beta}(X)$  – произвольный ряд из кольца  $\mathfrak{o}[[X]]$ , такой что  $\underline{\beta}(\xi) = \beta$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\xi$  – корень  $[\pi]_F(X) = 0$  в  $k'$ . Тогда  $\xi$  – униформизирующая поля  $k'$  (см. [5]). Пусть  $\beta = b_1\xi + b_2\xi^2 + \dots$ . Воспользовавшись тем, что  $\underline{\beta}'(0) \pmod{\pi}$  не зависит от разложения  $\beta$  по степеням  $\pi$ , будем считать, что  $\underline{\beta}(X) = b_1X + b_2X^2 + \dots$ , где  $b_i \in \mathfrak{o}$ . Так как  $a$  лежит в нижнем поле, то  $\underline{a}(X) = a \Rightarrow da = 0$ . Тогда

$$(a, \beta)_F = \left[ \text{Tr} \text{res} \left( -\ell_m(a) d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) V \right) \right]_F(\xi). \quad (9)$$

Поскольку  $[\pi]_F(\xi) = 0$ , то нас интересуют только сравнения по модулю  $\pi$ , при этом  $V \equiv X^{-q} - c_2 \pmod{\pi}$ .

Так как  $d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) = \frac{q}{\pi} X^{q-1} (d\lambda(\underline{\beta}))^\Delta$  (лемма 1.1, п. 7), то

$$\begin{aligned} & \text{res} \left( -\ell_m(a) d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) V \right) \\ & \equiv - \text{res} \frac{q}{\pi} \ell_m(a) X^{q-1} (d\lambda(\underline{\beta}))^\Delta (X^{-q} - c_2) \\ & \equiv - \text{res} \frac{q}{\pi} \ell_m(a) (b_1^\Delta + 2b_2^\Delta X^q + \dots) (X^{-1} - c_2 X^{q-1}) \\ & \equiv - \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} b_1^\Delta \equiv - \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} b_1 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством Фробениуса и леммой 2.1.  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть  $k' = k(\xi)$ ,  $[\pi^n]_F(\xi) = 0$ ,  $[\pi^{n-1}]_F(\xi) \neq 0$ . Тогда для  $a \in \mathfrak{o}^*$

$$(a, \beta)_{F,n} = 0 \forall \beta \Leftrightarrow \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \equiv 0 \pmod{\pi^n}.$$

**Доказательство.** Так как (по лемме 1.1, п. 7):

$$d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) = \frac{q}{\pi} X^{q-1} (d\lambda(\underline{\beta}))^\Delta,$$

то, согласно (9), имеем:

$$\begin{aligned} \text{Tr res} \left( -\ell_m(a) d \left( \frac{\Delta}{\pi} \lambda(\underline{\beta}) \right) \right) V \\ = -\frac{q}{\pi} \ell_m(a) \text{Tr res } X^{q-1} (d\lambda(\underline{\beta}))^\Delta V \\ = -\frac{a^{q-1} - 1}{\pi} t \text{Tr res } (d\lambda(\beta))^\Delta X^{q-1} V. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив  $\beta = \lambda^{-1}(X)$  и воспользовавшись тем, что  $\text{res } X^{q-1} V \equiv 1 \pmod{\pi}$ , а также леммой 2.1, получаем, что необходимым условием является

$$\frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \equiv 0 \pmod{\pi^n}.$$

Из (10) следует, что оно является и достаточным.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. Eisenstein, *Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze*. — J. für die reine u. ang. Mathematik **39** (1850), 351–364.
2. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности*. — Изв. АН СССР, Сер. матем. **42**, No. 6 (1978), 1288–1321.
3. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях*. — Изв. АН СССР, Сер. матем. **43**, No. 4 (1979), 765–794.
4. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions*. Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
5. *Алгебраическая теория чисел*. Ред. Дж. Касселс, А. Фрелих. Мир, М., 1969.
6. С. В. Востоков, М. А. Иванов, Г. К. Пак, *К одной работе Хассе о законе взаимности Эйзенштейна*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 122–129.

Vostokov S. V., Ivanov M. A. Eisenstein’s reciprocity law for Lubin–Tate formal groups.

In the present paper, we study a generalized norm residue symbol on Lubin–Tate formal groups and research a triviality for this symbol, when the first argument locate in the definition field of formal group.

We use explicit formulas for the generalized norm residue symbol  $(, )_{F,n}$ , herewith requirement, consisting of a bound to representing in the form uniformizing’s degrees is removed.

С.-Петербургский  
государственный университет  
Университетский пр. 28, Петродворец,  
198504 Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Поступило 23 декабря 2010 г.