М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2009, том 9, выпуск 4, 3–10

DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-3-10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ НА ВСЕМ ОТРЕЗКЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов*

Воронежский государственный университет, кафедра математического анализа;
*Саратовский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе установлена равносходимость на всем отрезке рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией, содержащего потенциалы, и простейшего функционально-дифференциального оператора.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, разложение по собственным и присоединенным функциям, равносходимость.

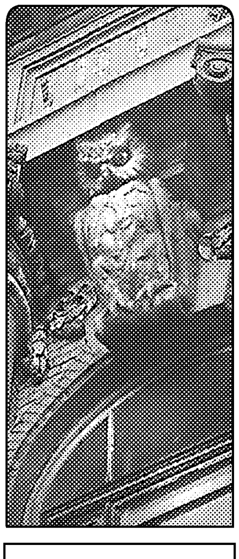
On the Same Theorem on a Equiconvergence at the Whole Segment for the Functional-Differential Operators

M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov*

Voronezh State University, Chair of Mathematical Analysis;
*Saratov State University, Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions of functional-differential operator with involution, containing the potentials, and simplest functional-differential operator at the whole segment of Fourier series is established.

Key words: functional-differential operator, involution, the expansions in eigen and associated functions, equiconvergence.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

В данной работе устанавливается равносходимость на отрезке $[0,1]$ рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (далее — с.п.ф.) для следующих функционально-дифференциальных операторов с инволюцией:

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$
$$L_0 y = y'(1-x) + \alpha y'(x), \qquad y(0) = \gamma y(1),$$

где $x \in [0,1]$, $\alpha^2 \neq 1$, α, γ — комплексные постоянные, $p_i(x) \in \in C^1[0,1]$.

Для скалярного дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями подобный результат хорошо известен [1].

1. Обозначим через $\widetilde{L}$ следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$\widetilde{L}z = Bz'(x) + P(x)z(x), \tag{1}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix}$. Оператор $\widetilde{L}$ представляет собой частный случай оператора Дирака.

Так же как в [2, 3] можно доказать

Теорема 1. *Спектры операторов L и $\widetilde{L}$ совпадают, причем если R_λ и $\widetilde{R}_\lambda$ — соответственно резольвенты операторов L и $\widetilde{L}$, и $y = R_\lambda f$, $z = \widetilde{R}_\lambda F$, где $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, то $y(x) = z_1(x)$, а $z_2(x) = y(1-x)$.*

Аналогично можно показать, что совпадают спектры операторов L_0 и $\widetilde{L}_0$, где

$$\widetilde{L}_0 z = Bz'(x), \quad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0,$$

(матрицы B, M_0, M_1 — те же, что и в (1)–(2)) и $R_\lambda^0 f(x) = [\widetilde{R}_\lambda^0 F(x)]_1$, а $[\widetilde{R}_\lambda^0 F(x)]_2 = (R_\lambda^0 f)(1-x)$, R_λ^0 и $\widetilde{R}_\lambda^0$ — соответственно резольвенты операторов L_0 и $\widetilde{L}_0$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$ ($[\cdot]_k$ означает k-ю компоненту вектора).

Исследуем резольвенту $\widetilde{R}_\lambda = (\widetilde{L} - \lambda E)^{-1}$ оператора $\widetilde{L}$ (здесь λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). Пусть $z(x) = z(x,\lambda) = \widetilde{R}_\lambda F(x)$ (в дальнейшем для краткости аргумент λ в обозначении решений различных задач будем опускать). Тогда $z(x)$ удовлетворяет задаче

$$Bz'(x) + P(x)z(x) - \lambda z(x) = F(x), \tag{3}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0. \tag{4}$$

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$, где $b = \alpha - \widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ (числа $\pm\widetilde{\omega}$ — собственные значения матрицы B). Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где $D^{-1} = \operatorname{diag}(\widetilde{\omega}, -\widetilde{\omega})$. Выполнив в (3)–(4) замену $z(x) = \Gamma u(x)$, получим следующую задачу для $u(x)$:

$$u'(x) + P_1(x)u(x) - \lambda D u(x) = F_1(x), \tag{5}$$

$$M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \tag{6}$$

где $P_1(x) = D\Gamma^{-1}P(x)\Gamma$, $F_1(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $D = \operatorname{diag}(\omega, -\omega)$ и $\omega = 1/\widetilde{\omega}$.

Далее проводится преобразование системы (5)–(6), заменяющее матрицу $P_1(x)$ на матрицу, компоненты которой имеют оценку $O\left(\lambda^{-1}\right)$ (см., напр., [2, 3]).

Лемма 1. *Существует преобразование $u(x) = H(x,\lambda)v(x)$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, $H_0(x)$ — диагональная, $H_1(x)$ — кодиагональная матрицы, приводящее систему (5)–(6) к виду*

$$v'(x) + P(x,\lambda)v(x) - \lambda D v(x) = H^{-1}(x,\lambda)F_1(x), \tag{7}$$

$$M_{0\lambda} v(0) + M_{1\lambda} v(1) = 0. \tag{8}$$

Здесь $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $h_1(x) = \exp\left\{-\omega\eta^{-1}\int_0^x r(t)\,dt\right\}$, $h_2(x) = \exp\left\{\omega\eta^{-1}\int_0^x r(1-t)\,dt\right\}$, $r(x) = q_1(x) - bq_2(1-x)$, $q_1(x) = p_1(x) + bp_2(x)$, $q_2(x) = bp_1(x) + p_2(x)$, $\eta = 1 - b^2$, $P(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H_1'(x) + P_1(x)H_1(x)]$, $M_{0\lambda} = M_0\Gamma H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1\Gamma H(1,\lambda)$.

Доказательство. Так же как в [2, 3] строим матричную функцию $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, где элементы $H_0(x)$ есть $h_k(x) = \exp\left\{-\int_0^x \widetilde{p}_{kk}(t)\,dt\right\}$ и $\widetilde{p}_{kk}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, а $H_1(x)$ — кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$H_0'(x) + P_1(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Вычислив непосредственно элементы $\widetilde{p}_{kk}(x)$, придем к утверждению леммы. □

Лемма 2. *Имеет место соотношение $h_2(1-x) = h_2(1)h_1(x)$.*

Так как $h_2(1) = \exp\left\{\omega \int_0^1 p_1(t)\,dt\right\}$, то имеем

Следствие. *Если* $\int\limits_0^1 p_1(t)\,dt = 0$, *то* $h_1(1) = h_2(1) = 1$ *и* $h_2(1-x) = h_1(x)$.

2. Исследуем решение следующей краевой задачи:

$$w'(x) - \mu\widetilde{D}w(x) = m(x), \tag{9}$$

$$U_0(w) = \widetilde{M}_0 w(0) + \widetilde{M}_1 w(1) = 0, \tag{10}$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$, $m_k(x) \in L[0,1]$, $\mu = \lambda\omega$, $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(1,-1)$, $\widetilde{M}_0 = M_0\Gamma H_0(0)$, $\widetilde{M}_1 = M_1\Gamma H_0(1)$.

Решая задачу (9)–(10) (как и в [2–4]), придем к утверждению

Лемма 3. *Если μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu))$, где $V(x,\mu) = \operatorname{diag}(e^{\mu x}, e^{-\mu x})$, обратима, то краевая задача* (9)–(10) *однозначно разрешима при любой $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и ее решение $w(x) = w(x,\mu)$ имеет вид*

$$w(x,\mu) = R_{0\mu}m(x) = -V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m) + g_\mu m(x), \tag{11}$$

где $g_\mu m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt$, $U_0(g_\mu m) = \int\limits_0^1 U_{0x}(g(x,t,\mu))m(t)\,dt$, *($U_{0x}$ означает, что U_0 применяется к g по переменной x),* $g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu), g_2(x,t,\mu))$, $g_k(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)\exp\bigl\{(-1)^{k-1} \times \times\, \mu(x-t)\bigr\}$, *при* $(-1)^{k-1}\operatorname{Re}\mu \ge 0$, $g_k(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)\exp\bigl\{(-1)^{k-1}\mu(x-t)\bigr\}$, *при* $(-1)^{k-1}\operatorname{Re}\mu \le 0$, $\varepsilon(x,t) = 1$, *если* $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, *если* $x < t$.

Непосредственно вычисляя $\Delta_0(\mu)$, получим, что $\det\Delta_0(\mu) = (b-\gamma)^2 h_1(1)e^{\mu} - (1-\gamma b)^2 h_2(1)e^{-\mu}$. Всюду далее требуем выполнения условий регулярности

$$\gamma \ne b, \quad \gamma \ne b^{-1}. \tag{12}$$

Корни $\det\Delta_0(\mu)$ есть числа $\mu_k = k\pi i + \ln\alpha_1/2$ $(k \in Z)$, где $\alpha_1 = (1-\gamma b)^2(b-\gamma)^{-2}h_2(1)/h_1(1)$. Удаляя из комплексной μ–плоскости эти корни вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ, получим область S_δ, в которой справедлива оценка

$$\bigl|\det\Delta_0(\mu)\bigr| \ge c\bigl|e^{\mu\cdot\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\mu)}\bigr|.$$

Образ области S_δ в λ–плоскости обозначим $\widetilde{S}_\delta$.

Лемма 4. *В области S_δ для элементов $\Delta_0^{-1}(\mu) = (x_{ij})_{i,j=1,2}$ имеют место оценки:*

$$\begin{array}{ll} x_{11} = O\left(e^{-2\mu}\right),\ x_{12} = O\left(e^{-\mu}\right),\ x_{21} = O\left(1\right),\ x_{22} = O\left(e^{-\mu}\right), & \text{при } \operatorname{Re}\mu \ge 0, \\ x_{11} = O\left(1\right),\ x_{12} = O\left(e^{\mu}\right),\ x_{21} = O\left(e^{2\mu}\right),\ x_{22} = O\left(e^{\mu}\right), & \text{при } \operatorname{Re}\mu \le 0. \end{array}$$

Так же как в [4, теорема 2] доказывается, что

$$\|R_{0\mu}m\|_\infty = O\left(\|m\|_1\right), \qquad \|R_{0\mu}\varphi\|_\infty = O\left(\mu^{-1}\right), \tag{13}$$

где $\varphi(x)$ — вектор-функция, каждая компонента которой есть функция ограниченной вариации, $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$ — нормы в пространствах L_∞ и $L[0,1]$ соответственно.

Всюду далее будем обозначать через $v(x,\lambda;\psi)$ решение задачи (7)–(8) с правой частью $\psi(x)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$s'(x) - \mu\widetilde{D}s(x) = m(x), \tag{14}$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda}s(0) + M_{1\lambda}s(1) = 0. \tag{15}$$

Ее решение $s(x) = R_{1\mu}m(x)$ имеет вид (11), где U_0, $\Delta_0(\mu)$ заменяются на U_1, $\Delta_1(\mu) = U_1(V(x,\mu))$ соответственно. Так же как в [5, лемма 17] можно показать, что для элементов $\Delta_1(\mu)$ справедливо представление $\Delta_1(\mu) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^2$, где a_{ij}, b_{ij} — соответственно элементы матриц $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_1$,

$[a] = a + o(1)$, $\omega_j = (-1)^{j-1}$. Поэтому при выполнении условий регулярности (12) для решения задачи (14)–(15) имеем оценки, аналогичные (13), и так же как в [3, лемма 10] получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v\left(x,\lambda;H^{-1}(x,\lambda)m\right) - R_{1\mu}(H_0^{-1}m)\right]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0. \qquad (16)$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется по контурам $|\lambda| = r$, целиком находящимся в области $\widetilde{S}_\delta$.

Лемма 5. *Для любой функции $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$ и функции $\varphi(x)$, компоненты которой есть функции ограниченной вариации, справедливы соотношения:*

$$\|R_{1\mu}m - R_{0\mu}m\|_\infty = O(\mu^{-1}\|m\|_1), \qquad \|R_{1\mu}\varphi - R_{0\mu}\varphi\|_\infty = O\left(\mu^{-2}\right). \qquad (17)$$

Доказательство. Так как $M_{0\lambda} = \widetilde{M}_0 + O(\lambda^{-1})$, $M_{1\lambda} = \widetilde{M}_1 + O(\lambda^{-1})$, то $U_1(g_\mu m(x)) = U_0(g_\mu m(x)) + O(\mu^{-1}\|m\|_1)$. Поэтому, учитывая ограниченность $V(x,\mu)\Delta_k^{-1}(\mu)$, а также $U_0(g_\mu m(x))$, и то, что компоненты $V(x,\mu)[\Delta_0^{-1}(\mu) - \Delta_1^{-1}(\mu)]$ есть $O(\mu^{-1})$, имеем

$$R_{1\lambda}m(x) - R_{0\mu}m(x) = V(x,\mu)\left[\Delta_0^{-1}(\mu) - \Delta_1^{-1}(\mu)\right]U_0(g_\mu m(x)) + O(\mu^{-1}\|m\|_1) = O(\mu^{-1}\|m\|_1),$$

откуда следует первое соотношение в (17). Используя для $\varphi(x)$ оценки $g_\mu\varphi(x) = O(\mu^{-1})$, $U_0(g_\mu\varphi(x)) = O(\mu^{-1})$ (доказательства оценок приведены, например, в [4, теорема 2]), получим второе соотношение в (17). □

Из леммы 5 по теореме Банаха – Штейнгауза получим, что

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left[H(x,\lambda)R_{1\mu}(H_0^{-1}m) - H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}m)\right]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0. \qquad (18)$$

Наконец, из (16) и (18) следует

Лемма 6. *Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$, $m_i(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left[H(x,\lambda)v\left(x,\lambda;H^{-1}(x,\lambda)m\right) - H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}m)\right]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0.$$

Обозначим через $\widetilde{R}_{0\lambda}$ резольвенту оператора $D^{-1}w'$, $U_0(w) = 0$.

Лемма 7. *Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left[\widetilde{R}_\lambda F - \Gamma H_0(x)\widetilde{R}_{0\lambda}(H_0^{-1}\Gamma^{-1}F)\right]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0,$$

где F — та же вектор-функция, что и в теореме 1.

Доказательство. Так как $\widetilde{R}_\lambda F(x) = z(x) = \Gamma H(x,\lambda)v\left(x,\lambda;H^{-1}(x,\lambda)F_1\right)$, где $F_1 = D\Gamma^{-1}F$, то из леммы 6 получаем

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left[\widetilde{R}_\lambda F - \Gamma H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}F)\right]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0. \qquad (19)$$

Так как $w = \widetilde{R}_{0\lambda}m$ есть решение задачи (9)–(10) с правой частью Dm, то

$$R_{0\mu} = \widetilde{R}_{0\lambda}D^{-1}. \qquad (20)$$

Из (19) и (20), учитывая перестановочность диагональных матриц H_0^{-1} и D, получим утверждение леммы □.

3. Положим

$$\Omega_r(m) = \int\limits_{|\lambda|=r}\left[Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm)\right]\,d\lambda,$$

где $Q(x)=\mathrm{diag}(q(x),q(1-x))$, $q(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 и $q(0)=q(1)=1$.

Лемма 8. *Имеет место оценка* $\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}[Q(x)g_\mu m(x)-g_\mu(Qm(x))]\,d\lambda\right\|_\infty = O\left(\|m\|_1\right)$.

Доказательство. Для первой компоненты данного вектора (учитывая, что $\mu=\lambda\omega$) имеем

$$\left|\int\limits_{|\lambda|=r}[Q(x)g_\mu m - g_\mu(Qm)]_1\,d\lambda\right| \le \frac{1}{|\omega|}\int\limits_{|\mu|=r_1}\left|[Q(x)g_\mu m-g_\mu(Qm)]_1\right|\cdot|d\mu| =$$

$$=\frac{1}{|\omega|}\left\{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\right\}\left|[Q(x)g_\mu m-g_\mu(Qm)]_1\right|r_1\,d\varphi, \qquad (21)$$

где $r_1=r|\omega|$. Пусть $\mathrm{Re}\,\mu\ge 0$. В этом случае $g_\mu m(x)=\left(-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}m_1(t)\,dt, \int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}m_2(t)\,dt\right)^T$. Тогда первый интеграл в (21) имеет следующую оценку:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r_1\,d\varphi\left|\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}(q(x)-q(t))m_1(t)\,dt\right| = O\left(\int\limits_x^1|m_1(t)|\,dt\int\limits_0^{\pi/2} r_1e^{r_1\cos\varphi(x-t)}|x-t|\,d\varphi\right)=$$

$$=O\left(\int\limits_x^1|m_1(t)|\,dt\int\limits_0^{\pi r_1(t-x)/2}e^{-c_1\xi}\,d\xi\right)=O\left(\|m\|_1\right)$$

(здесь использованы замена $\varphi=\pi/2-\tau$, оценка $\sin\tau\ge c_1\tau$, при $\tau\in(0,\pi/2)$, где c_1 — некоторая константа $0<c_1<2/\pi$, и замена $\xi=r_1(t-x)$).

Аналогично оцениваются второй интеграл в (21) (при $\mathrm{Re}\,\mu\le 0$) и вторая компонента вектора, указанного в условии. □

Непосредственно вычисляя компоненты матриц в (11), получим

Лемма 9. *Если* $\mathrm{Re}\,\mu\ge 0$, *то имеет место соотношение:*

$$Q(x)V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m)-V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu(Qm))=\left((\gamma b-1)(J_1+J_2),(\gamma b-1)(J_3+J_4)\right)^T,$$

где

$J_1(x,\mu)=x_{11}e^{\mu x}\int\limits_0^1 e^{-\mu t}(q_1(x)-q_1(t))m_1(t)\,dt,$ $J_2(x,\mu)=x_{12}h_2(1)e^{\mu x}\int\limits_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_1(x)-q_2(t))m_2(t)\,dt,$

$J_3(x,\mu)=x_{21}e^{-\mu x}\int\limits_0^1 e^{-\mu t}(q_2(x)-q_1(t))m_1(t)\,dt,$ $J_4(x,\mu)=x_{22}h_2(1)e^{-\mu x}\int\limits_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(x)-q_2(t))m_2(t)\,dt,$

x_{ij} — *элементы* $\Delta_0^{-1}(\mu)$, $q_1(x)=q(x)$, $q_2(x)=q(1-x)$ — *элементы матрицы* $Q(x)$.

Лемма 10. *Имеют место следующие оценки:*

$$\int\limits_{\substack{|\mu|=r_1\\ \mathrm{Re}\,\mu\ge 0}} J_k(x,\mu)\,d\mu = O(\|m\|_1),\quad k=\overline{1,4}. \qquad (22)$$

Доказательство. Продолжим функцию $q(x)$ (соответственно $q_1(x)$ и $q_2(x)$) периодически с периодом 1. Так как $q(0)=q(1)$, то полученная функция непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Докажем (22) для $J_2(x,\mu)$. Имеем

$$\left|\int\limits_{\substack{|\mu|=r_1\\ \mathrm{Re}\,\mu\ge 0}} J_2(x,\mu)\,d\mu\right|\le c\int\limits_0^1|m_2(t)|\,dt\int\limits_{\substack{|\mu|=r_1\\ \mathrm{Re}\,\mu\ge 0}}|x_{12}|\,|q_1(x)-q_2(t)|\,e^{-\mathrm{Re}\,\mu(1-x-t)}\,|d\mu|.$$

Используя периодичность $q(x)$, оценки из леммы 4 ($x_{12}=O(e^{-\mu})$), и неравенство $\sin\tau\ge c_1\tau$ (так же как в лемме 8), получим

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\operatorname{Re}\mu(2-x-t)}|q(x)-q(1-t)|r_1 d\varphi = O\left(\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)}|q(x)-q(2-t)|r_1 d\varphi\right) =$$

$$= O\left(\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)}(2-x-t)r_1 d\varphi\right) = O\left(\int\limits_0^{\pi r_1(2-x-t)/2} e^{-c_1\xi}\, d\xi\right) = O(1).$$

Отсюда следует справедливость (22) для $k=2$. Также доказывается (22) для остальных интегралов. □

Из (11), леммы 8, лемм 9, 10 (и аналогичных им лемм при $\operatorname{Re}\mu \le 0$) следует

Лемма 11. *Если $\gamma \ne b$, $\gamma \ne b^{-1}$, то $\|\Omega_r(m)\|_\infty = O(\|m\|_1)$.*

Лемма 12. *Пусть компоненты вектора $\widetilde{D}^{-1}m$ имеют ограниченную производную и $U_0(\widetilde{D}^{-1}m)=0$. Тогда $Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm) = \mu^{-1}\left[Q(x)R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}m)') - R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}Qm)')\right]$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{R}^0_\mu$ — резольвента оператора $\widetilde{D}^{-1}w'$, $U_0(w)=0$. Тогда $R_{0\mu}m = \widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}m)$.

Пусть m удовлетворяет условиям леммы и $U_0(\widetilde{D}^{-1}m)=0$. Обозначим $\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}^{-1}m)' - \mu\widetilde{D}^{-1}m = g$. Тогда $\widetilde{D}^{-1}m = \widetilde{R}^0_\mu g = \widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}^{-1}m)') - \mu\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}m)$, откуда $\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}m) = \mu^{-1}[\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}^{-1}m)') - \widetilde{D}^{-1}m]$, или

$$R_{0\mu}m = \mu^{-1}[R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}m)') - \widetilde{D}^{-1}m]. \tag{23}$$

Так как $q(0)=q(1)=1$, то $Q(0)=Q(1)=E$ и $U_0(\widetilde{D}^{-1}Qm)=0$. Поэтому так же как (23) получим

$$R_{0\mu}(Qm) = \mu^{-1}[R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}Qm)') - \widetilde{D}^{-1}Qm]. \tag{24}$$

Учитывая перестановочность диагональных матриц $\widetilde{D}^{-1}$ и $Q(x)$, из (23) и (24) получим утверждение леммы. □

Так же как в [4, теорема 2] доказывается

Лемма 13. *Если m удовлетворяет условиям леммы 12, то*

$$\|R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}m)')\|_\infty = O(æ(|\operatorname{Re}\mu|)), \qquad \|R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}Qm)')\|_\infty = O(æ(|\operatorname{Re}\mu|)),$$

где $æ(y) = (1-e^{-y})/y$ при $y>0$.

Теорема 2. *Если $\gamma \ne b$ и $\gamma \ne b^{-1}$, то для любой функции $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty}\|\Omega_r(m)\|_\infty = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть m удовлетворяет условиям леммы 12. Тогда, учитывая оценки из леммы 13, можно показать (так же как в [4, теорема 3]), что

$$\|\Omega_r(m)\|_\infty = O\left(\int\limits_{|\mu|=r_1}\frac{|æ(|\operatorname{Re}\mu|)|}{|\mu|}\,|d\mu|\right) = O\left(\frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-e^{-r_1\varphi}}{r_1\varphi}\,r_1\,d\varphi\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi r_1/2}\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi\right) = O\left(\frac{1}{r}+\frac{\ln r}{r}\right). \tag{26}$$

Так как множество таких $m(x)$ всюду плотно в $L^2[0,1]$ ($L^2[0,1]$ — множество интегрируемых вектор-функций размерности 2), то из (26) и леммы 11 по теореме Банаха – Штейнгауза следует (25). □

Следствие. *Для любой функции $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left[Q(x)\widetilde{R}_{0\lambda}m - \widetilde{R}_{0\lambda}(Qm)\right]\,d\lambda\right\|_\infty = 0.$$

4. Перейдем к основным результатам статьи.

Теорема 3. *Пусть $\gamma \ne b$, $\gamma \ne b^{-1}$. Тогда для любой вектор-функции $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $f(x)\in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\widetilde{S}_r(F,x)-\widetilde{S}_r^0(F,x)\right\|_\infty=0, \tag{27}$$

где $\widetilde{S}_r(F,x)$ ($\widetilde{S}_r^0(F,x)$) — частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $F(x)$ по с.п.ф. оператора $\widetilde{L}$ ($\widetilde{L}_0$), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ_k^0), для которых $|\lambda_k|<r$ ($|\lambda_k^0|<r$).

Доказательство. Имеем $\widetilde{S}_r(F,x)=-\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\widetilde{R}_\lambda F\,d\lambda$ (аналогичная формула для $\widetilde{S}_r^0(F,x)$).

1. Пусть сначала $\int\limits_0^1 p_1(t)\,dt=0$. По следствию из леммы 2 в этом случае $H_0(x)=\operatorname{diag}(h_1(x),h_1(1-x))$, $h_1(0)=h_1(1)=1$. Поэтому теорема 2 справедлива, если в качестве $Q(x)$ взять $H_0(x)$. Тогда, используя лемму 7 и следствие из теоремы 2, имеем

$$\int\limits_{|\lambda|=r}\widetilde{R}_\lambda F\,d\lambda=\int\limits_{|\lambda|=r}\Gamma H_0(x)\widetilde{R}_{0\lambda}(H_0^{-1}\Gamma^{-1}F)\,d\lambda+o(1)=\int\limits_{|\lambda|=r}\Gamma\widetilde{R}_{0\lambda}(\Gamma^{-1}F)\,d\lambda+o(1), \tag{28}$$

где $\|o(1)\|_\infty\to0$ при $r\to\infty$. Так как в краевых условиях (10) $H_0(0)=H_0(1)=E$ (E — единичная матрица), то для $w=\widetilde{R}_{0\lambda}m$ имеет место

$$D^{-1}w'(x)-\lambda w(x)=m(x), \tag{29}$$

$$M_0\Gamma w(0)+M_1\Gamma w(1)=0. \tag{30}$$

Умножая (29) слева на Γ и учитывая, что $B=\Gamma D^{-1}\Gamma^{-1}$, получим $B(\Gamma w)'-\lambda(\Gamma w)=\Gamma m$, Откуда $\Gamma w=\widetilde{R}_\lambda^0(\Gamma m)$ ($\widetilde{R}_\lambda^0$ — резольвента $\widetilde{L}_0$). Тогда $\Gamma\widetilde{R}_{0\lambda}(\Gamma^{-1}F)=\widetilde{R}_\lambda^0(F)$, и из (28) получаем

$$\int\limits_{|\lambda|=r}\widetilde{R}_\lambda F\,d\lambda=\int\limits_{|\lambda|=r}\widetilde{R}_\lambda^0 F\,d\lambda+o(1),$$

откуда следует утверждение теоремы.

2. Пусть теперь $\int\limits_0^1 p_1(t)\,dt=a\neq0$. Контуры, по которым ведется интегрирование в (27), целиком располагаются в области $\widetilde{S}_\delta$, образованной из λ-плоскости удалением чисел $\lambda_k=\mu_k/\omega=(2k\pi i+\ln\alpha_1)/2\omega$ вместе с некоторыми окрестностями (образами круговых окрестностей радиуса δ точек μ_k). В любом кольце $r-d\le|\lambda|\le r+d$ ($d>0$) количество таких окрестностей ограниченно константой, не зависящей от r. Следовательно, количество слагаемых в $\widetilde{S}_r(F,x)$, соответствующих этому кольцу, ограничено. Пусть $\gamma_k\in\widetilde{S}_\delta$ — круговой контур из указанного кольца достаточно малого радиуса δ_0 с центром в λ_k. Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\int\limits_{\gamma_k}\widetilde{R}_\lambda F\,d\lambda\right\|_\infty=0. \tag{31}$$

Нетрудно показать (как, например, в [3]), что

$$\widetilde{R}_\lambda F=\Gamma H(x,\lambda)v\left(x,\lambda;H^{-1}(x,\lambda)F_1\right)=\Gamma H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1)+O(\lambda^{-1}\|f\|_1),$$

откуда, учитывая оценку (13), получим, что $\|\widetilde{R}_\lambda F\|_\infty=O(\|f\|_1)$ для любой функции $f\in L[0,1]$, и

$$\left\|\int\limits_{\gamma_k}\widetilde{R}_\lambda F\,d\lambda\right\|_\infty=O(\|f\|_1). \tag{32}$$

Пусть теперь $f(x)\in C^1[0,1]$ и $f(0)=\gamma f(1)$. Тогда, положив $Lf=g$, из $Lf-\lambda f=g-\lambda f$ получим

$$R_\lambda f=-\frac{f}{\lambda}+\frac{R_\lambda g}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{\gamma_k}R_\lambda f\,d\lambda\right|=\left|\int\limits_{\gamma_k}\frac{R_\lambda g}{\lambda}\,d\lambda\right|=\left|\int\limits_{\gamma_k}(\widetilde{R}_\lambda G)_1\frac{d\lambda}{\lambda}\right|=O\left(\int\limits_{\gamma_k}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|}\right)=o(1),\quad \text{при } k\to\infty,$$

(здесь $G(x) = (g(x), g(1-x))^T$). Отсюда и из (32) следует (31). А следовательно,

$$\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r+d} \widetilde{R}_\lambda F\, d\lambda \;-\; \int\limits_{|\lambda|=r-d} \widetilde{R}_\lambda F\, d\lambda \Big\|_\infty = o(1), \quad \text{при } r \to \infty. \tag{33}$$

Рассмотрим оператор

$$L_1 y = y'(1-x) + \alpha y'(x) + \widetilde{p}_1(x) y(x) + p_2(x) y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$

где $\widetilde{p}_1(x) = p_1(x) - a$, который порождает оператор

$$\widetilde{L}_1 z = B z'(x) + \widetilde{P}(x) z(x), \quad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0$$

(матрица $\widetilde{P}(x)$ определяется через $\widetilde{p}_1(x)$, $p_2(x)$ так же как $P(x)$ в (1)). Тогда $\int\limits_0^1 \widetilde{p}_1(t)\, dt = 0$, и

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^0_\lambda F\, d\lambda + o(1),$$

где $\widetilde{R}^1_\lambda$ — резольвента оператора $\widetilde{L}_1$. Так как $R_\lambda f = R^1_{\lambda+a} f$ (R^1_λ — резольвента L_1) и соответственно $\widetilde{R}_\lambda F = \widetilde{R}^1_{\lambda+a} F$, то в силу (31) и (33)

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F\, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^1_{\lambda+a} F\, d\lambda = \int\limits_{|\lambda-a|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda - \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda + \int\limits_{|\lambda-a|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda + \int\limits_{|\lambda|=r+|a|} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda - \int\limits_{|\lambda|=r-|a|} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda + o(1) = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^1_\lambda F\, d\lambda + o(1) = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}^0_\lambda F\, d\lambda + o(1),$$

откуда следует соотношение (27) для $\widetilde{R}_\lambda F$. $\square$

Учитывая, что согласно теореме 1, $R_\lambda f = [\widetilde{R}_\lambda F]_1$, $R^0_\lambda f = [\widetilde{R}^0_\lambda F]_1$, получим

Теорема 4. *Пусть $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, $b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Тогда для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - S^0_r(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x)$ ($S^0_r(f,x)$) — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L (L_0), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ^0_k), для которых $|\lambda_k| < r$ ($|\lambda^0_k| < r$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00397) *и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ РФ* (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Stone M.H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28, № 4. P. 695–761.

2. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 4. С. 443–446.

3. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Диф. уравнения. 2007. Т. 43, № 12. С. 1597–1605.

4. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

5. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.