



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Слисенко, Одно свойство перечислимых множеств, содержащих “сложно выводимые” формулы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 200–207

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

10 февраля 2025 г., 13:05:36



ОДНО СВОЙСТВО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ, СОДЕРЖАЩИХ
"СЛОЖНО ВЫВОДИМЫЕ" ФОРМУЛЫ ^{*)}

Рассматриваются перечислимые множества формул исчисления предикатов, содержащие для каждого достаточно большого n формулу, сложность установления выводимости которой наибольшая среди формул с длиной, не превосходящей n . В теореме, доказанной в настоящей заметке, приводится нижняя оценка некоторой характеристики плотности таких перечислимых множеств.

Хотя ниже рассматривается множество всех выводимых формул, причем их выводимость в исчислении предикатов устанавливается многолеточными машинами Тьюринга, эти рассмотрения, по-видимому, можно перенести на произвольные универсальные (для сильных сводимостей) множества и произвольные алгоритмы, для которых аксиоматически (как в [1]) заданы функции, считающие шаги.

I. Будем считать, что формулы исчисления предикатов строятся в некотором алфавите A , не содержащем знака $*$ и имеющем не менее двух букв. Через a будем обозначать число букв в A , через $|W|$ - длину слова W и через $\omega(k)$ - число слов в A , длина которых не превосходит k . Заметим, что можно рассматривать и нестандартные понятия "длины" слова - лишь бы все слова данной "длины" можно было эффективно задать списком.

Буквы X, Y будут использоваться в качестве переменных для формул, буквы k, l, n - в качестве переменных для натуральных чисел.

Буквы f, g, h и они же с индексами будут использоваться в

*) Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 24 сентября 1970 г.

качестве переменных для многоленточных машин Тьюринга со входом и выходом, имеющих входным алфавитом алфавит $A \cup \{*\}$ (знак * будет служить разделительным знаком); ниже такие машины Тьюринга будут именоваться просто "машинами".

Посредством t_f будет обозначаться функция, вычисляющая число шагов работы машины f , при этом, разумеется, для любого входного слова W

$$!f(W) \iff !t_f(W)$$

(знак! означает вычислимость следующего за ним термина).

Известно, что имеется операция Δ , которая по любой машине f и любому слову W строит формулу $\Delta(f, W)$, такую что

$$\vdash \Delta(f, W) \iff !f(W)$$

(здесь и ниже знак \vdash означает выводимость в исчислении предикатов),

$$|\Delta(f, W)| \leq \Omega \cdot |W| + C_f,$$

где константа Ω зависит лишь от языка, в котором строятся формулы (и от определения "длины" в случае нестандартных "длин"), а C_f зависит еще и от f . Зафиксируем какую-нибудь такую операцию (и, тем самым, константу Ω).

Условимся придавать выражению "для достаточно длинных слов W " (сокращенно: "для д.д. слов W ") следующий смысл: "для всех слов W , длина которых больше некоторого натурального числа", причем не требуется, чтобы это натуральное число можно было эффективно построить. Аналогично будет пониматься выражение "для достаточно больших n " (сокращенно: "для д.б. n ").

Посредством $\nu(E, k)$ будем обозначать число элементов произвольного множества E , длина которых не превосходит k (это число, вообще говоря, эффективно не вычислимо).

2. Машину E будем называть алгоритмом установления выводимости, если область ее применимости (обозначение: $\text{dom} f$) есть множество всех выводимых формул.

Переменными для алгоритмов установления выводимости будут

служить буквы δ и q .

Зафиксируем произвольный алгоритм δ . Из результатов М. Блюма [1] вытекает, что, с одной стороны, по данному ускорению можно построить множество E_1 выводимых формул, на котором δ допускает это ускорение, а, с другой стороны, по заданной оценке сложности можно построить множество E_2 выводимых формул, на которых δ имеет данную нижнюю оценку числа шагов и не допускает произвольных ускорений; причем для некоторого C

$$v(E_i, n) \geq w\left(\frac{n-C}{n}\right) \quad \text{для д.б. } n \quad (i=1,2)$$

Поэтому в терминах числа шагов работы δ над отдельными формулами трудно охарактеризовать качество работы δ в целом. Естественно рассмотреть "усредненные" характеристики вычислительной сложности δ - например, (невыводимую) функцию $\tau_\delta(n)$ - максимальное число шагов работы алгоритма δ над выводимыми формулами длины не более n :

$$\tau_\delta(n) = \max_{X, |X| \leq n} t_\delta(n).$$

Из неразрешимости множества всех выводимых формул вытекает, что для любых δ и q неверно утверждение

$$\tau_q(n+1) \leq \tau_\delta(n) \quad \text{для д.б. } n.$$

Это утверждение можно истолковывать как невозможность "очень больших" (не оцениваемых общерекурсивной функцией) улучшений алгоритмов установления выводимости.

Более того, нетрудно видеть, что для любых δ и q можно построить общерекурсивную функцию H , такую что

$$\tau_\delta(n) \leq H(n, \tau_q(n)) \quad \text{для всех } n.$$

3. Функция τ_δ определяется значениями t_δ на "предельно сложных" для установления выводимости формулах, т.е. таких X , что $t_\delta(X) = \tau_\delta(|X|)$. Одно свойство перечислимых множеств, содержащих "достаточно много" предельно сложных формул, формулируется ниже.

Теорема. Пусть алгоритм \mathcal{A} — произво-
 лен, а перечислимое множество вы-
 водимых формул E для любого д. б. n
 содержит формулу X , для которой
 $|X| \leq n$ и $t_1(X) = \tau_1(n)$. Тогда при неко-
 тором C выполнено неравенство

$$v(E, n) > w\left(\frac{n-C}{\Omega} - \log_a n\right) \quad \text{для д. б. } n.$$

(Здесь a — количество букв в A — см. [1]).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и пусть ма-
 шина h такова, что $E = \text{dom } h$.

Допустим, что при любом натуральном C для бесконечно мно-
 гих n

$$v(E, n) \leq w\left(\frac{n-C}{\Omega} - \log_a n\right). \quad (I)$$

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть ξ — произ-
 вольная машина. Возьмем достаточно большое n , для которого вы-
 полнено (I). Формулы из множества E с длиной, не превосходящей
 n можно закодировать столь короткими словами W , что
 $|\Delta(\xi, W)| \leq n$. Выбрав подходящим образом ξ , нетрудно полу-
 чить противоречие. Кодирование и декодирование упомянутых формул
 осуществляется описанными ниже машинами β и β , а в качестве
 "подходящего" ξ берется одна из машин ζ_0, ζ_1 (см. ниже).

Будем считать, что положительные натуральные числа кодируют-
 ся словами алфавита A с помощью алфавитной нумерации, т.е. сло-
 во $a_{i_n} \dots a_{i_1} a_{i_0}$, где i_0, i_1, \dots, i_n — номера букв в A , принима-
 ющие значения от 1 до a , изображает натуральное число

$$i_0 + i_1 \cdot a + \dots + i_n \cdot a^n.$$

Посредством β будем обозначать машину, работающую над
 формулой X следующим образом. Сначала она выписывает в порядке
 возрастания номеров все формулы с длиной, не превосходящей $|X|$,
 и записывает в счетчик ноль. Далее β моделирует шаги работы h и
 вычеркивает при этом некоторые из выписанных формул. Допустим, что

β смоделировала i шагов работы h и формула X еще не вычеркнута. Тогда β моделирует $(i+1)$ -ый шаг работы h над каждой из невычеркнутых формул. Возможны 2 случая.

(а) $(i+1)$ -ый шаг h не оказался последним ни для какой из невычеркнутых формул. Тогда моделируется $(i+2)$ -ой шаг.

(б) $(i+1)$ -ый шаг h оказался последним для некоторых формул. Тогда вычеркивается первая из таких формул и в счетчик прибавляется 1, затем вторая и в счетчик прибавляется 1 и т.д. до тех пор, либо пока не вычеркнется X — тогда β кончает работу и результатом считается содержимое счетчика (являющееся словом в A), либо пока не вычеркнутся все из выписанных формул, над которыми h кончает работу ровно за $(i+1)$ шаг — тогда β переходит к моделированию $(i+2)$ -го шага работы h над невычеркнутыми формулами.

Нетрудно видеть, что

$$\forall X (X \in E \Leftrightarrow !\beta(X)).$$

Пусть $\bar{\beta}$ — обращение машины β , точнее, машина, перерабатывающая любую пару вида $n * l$ следующим образом: выписываются в порядке возрастания номеров все формулы, длина которых не более n , и среди них ищется l -ая путем такого же моделирования шагов работы h , как при работе машины β . Конструкцию машины $\bar{\beta}$ нетрудно уточнить так, чтобы для любого X

$$!\beta(X) \Rightarrow \bar{\beta}(|X| * \beta(X)) = X. \quad (2)$$

Пусть машина α удовлетворяет условному равенству

$$\alpha(X) \simeq t_s(X) + t_p(X) + (2|X| + 1)^2$$

Используя теорему 7 из [1], построим f , такую что

$$\text{dom } f = E,$$

$$\forall X (X \in E \Rightarrow (f(X) = 0 \vee f(X) = 1))$$

какова бы ни была f' , равная f ,

$$t_p(X) > \alpha(X) \quad \text{для д.д. } X \text{ из } E$$

Посредством $f_i (i=0)$ обозначим машину со свойствами:

$$\forall X (!f_i(X) \Leftrightarrow f(X) \simeq i),$$

$$\forall X (!f_i(X) \Rightarrow t_{f_i}(X) = t_f(X)). \quad (i=0,1).$$

Нетрудно видеть, что для любой f_i' с той же областью применимости, что и f_i ,

$$t_{f_i'}(X) >_{\alpha} (X) \text{ для д.д. } X \text{ из } \text{dom } f_i (i=0,1) \quad (3)$$

Построим естественным образом машины g_i, ζ_i удовлетворяющие равенствам

$$g_i(n * l) \simeq f_i(\bar{\beta}(n * l)),$$

при любых n, l, X ($i=0,1$).

$$\zeta_i(X) \simeq s(\Delta(g_i, |X| * \beta(X)))$$

При $i=0,1$ и любом X имеем, используя (2)

$$! \zeta_i(X) \Leftrightarrow ! g_i(|X| * \beta(X)) \Leftrightarrow f_i(X) \& ! \beta(X) \Leftrightarrow ! f_i(X), \quad (4)$$

т.е. $\text{dom } \zeta_i = \text{dom } f_i$. Отсюда и из (3) получаем

$$t_{\zeta_i}(X) >_{\alpha} (X) \quad (5)$$

для д.д. X из $\text{dom } f_i$ ($i=0,1$).

Заметим, что имеется константа C' , обладающая свойством: для д.б. n из $t_3(X) = t_3(n)$ вытекает $|X| > \frac{n - C'}{\Omega}$ (Это можно получить следующим образом. Воспользуемся описанным выше способом построения по машине α машин f_0 и f_1 . Применим эту конструкцию, взяв в качестве α машину t_3 . Получим машины \bar{f}_0 и \bar{f}_1 . Тогда для каждой д.д. выводимой формулы X при некотором i ($i=0,1$) будет верно неравенство $t_3(\Delta(\bar{f}_i, X)) > t_3(X)$, откуда следует требуемое).

Пусть δ_i ($i=0,1$) - машины обладающие следующими свойствами:

для любого слова W в $A \cup \{*\}$

$$\delta_i(W) \simeq \Delta(g_i, W)$$

и для д.д. слов W в $A \cup \{*\}$

$$t_{\epsilon_i}(W) \leq |W|^2 \quad (i=0,1).$$

Зафиксируем n , для которого, во-первых, верно (I) при $c = 2\Omega - \max\{c_{g_0}, c_{g_1}\}$, во-вторых, для любого X из $\text{dom } f_i$, такого что $|X| > \frac{n-c}{\Omega}$, выполнено (5) и, в-третьих, для любого слова W из $AU\{*\}$, такого что $|W| > \frac{n-c'}{\Omega}$, выполнено

$$t_{\epsilon_i}(W) \leq |W|^2 \quad (6)$$

Существует (неэффективно) Y из E , для которого $t_s(Y) = \tau_s(n)$. При некотором j ($j=0,1$) будет $!f_j(Y)$. Тогда

$$t_{\epsilon_j}(Y) > \alpha(Y) \quad (7)$$

Теперь оценим $t_{\epsilon_j}(Y)$ сверху.

Учитывая, что композиция машин устраивалась естественным образом,

$$t_{\epsilon_j}(Y) \leq t_s(\Delta(q_j, |Y| * \beta(Y))) + t_p(Y) + t_{\epsilon_j}(|Y| * \beta(Y))$$

(не умаляя общности считаем, что $|Y|$ вычисляется за число шагов, не превосходящее $t_p(Y)$).

В силу (I),

$$|\beta(Y)| \leq \frac{n-c}{\Omega} - \log_a n.$$

Следовательно,

$$|\Delta(q_j, |Y| * \beta(Y))| \leq \Omega \cdot (|Y| * \beta(Y)) + c_{g_j}$$

$$= \Omega (|Y| + 1 + |\beta(Y)|) + c_{g_j}$$

$$\leq \Omega (\log_a n + 2 + \frac{n-c}{\Omega} - \log_a n) + c_{g_j}$$

$$= 2\Omega + n - c + c_{g_j} \leq n$$

Отсюда, учитывая равенство $t_s(Y) = \tau_s(n)$, (6) и очевидное неравенство $|\beta(Y)| \leq |Y|$, получаем

$$t_{\epsilon_j}(Y) \leq t_s(Y) + t_p(Y) + (2|Y| + 1)^2 = \alpha(Y),$$

что противоречит (7).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- I. Blum M. A machine-independent theory of the complexity of recursive functions. "J.Assoc.Comput.Mach.", 1967, 14, 2, 322-336. (Русский перевод в книге: "Проблемы математической логики", М., 1970).