Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, Об одном свойстве спаривания Гильберта,
Матем. заметки, 1988, том 43, выпуск 3, 393–400

https://www.mathnet.ru/mzm4373

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
23 января 2026 г., 07:30:06

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 43, № 3 (1988)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СПАРИВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

С. В. Востоков, И. Б. Фесенко

Пусть k — локальное поле (конечное расширение поля p-адических чисел), содержащее группу μ_n корней степени n из 1. Хорошо известно, что символ норменного вычета Гильберта степени n локального поля задает невырожденное спаривание $(\ ,\ ): k^* \times k^* \to \mu_n$, которое обладает следующим фундаментальным свойством:

$$(\alpha,\ 1-\alpha) = 1, \qquad \alpha \neq 0,\ 1 \tag{1}$$

(см., например, [1]). Свойство (1) мы называем *фундаментальным* из-за того, что, во-первых, любое билинейное спаривание со значениями в группе μ_n, которое удовлетворяет свойству (1), должно быть степенью символа Гильберта, во-вторых, оно эквивалентно для невырожденного спаривания норменному свойству символа Гильберта (см. [2]).

Исходя из отображения взаимности в локальной теории полей классов, можно задать спаривание Гильберта для формальных групп Любина — Тэйта, как это было сделано в [3]. В [4] была сделана попытка обобщения свойства (1) на формальные группы Любина — Тэйта. К сожалению, как показывает приведенная ниже теорема 1, в предположении справедливости этого обобщения мы приходим к вырождению символа Гильберта.

В работе дается формулировка и доказательство аналога фундаментального свойства (1) для некоторого класса формальных групп Любина — Тэйта и обобщение переформулированного в терминах функции Артина — Хассе свойства (1) для любой формальной группы. Наши рассуждения будут использовать знание явной формулы

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1988

для символа Гильберта в формальных модулях (см. [5], [7], [8]).

1. Будем придерживаться определений и обозначений [5]. Итак, пусть k_0 — локальное поле, поле вычетов которого имеет $q = p^f$ элементов. Пусть $\mathfrak{o}_0$ — кольцо целых элементов поля k_0 с униформизующим элементом π_0. Пусть F — формальная группа Любина — Тэйта с эндоморфизмом $[\pi_0]$ (см. [1, глава 7]), поле k — конечное расширение поля k_0, содержащее $\mathfrak{o}_0$-модуль $\varkappa_n$ корней изогении $[\pi_0^n]$. Через $\mathfrak{m}$ обозначаем максимальный идеал кольца целых поля k, а через $F(\mathfrak{m})$ — группу точек формальной группы F на идеале $\mathfrak{m}$ (см. [5, § 3]).

Напомним, что спаривание Гильберта

$$(\ ,\ ): k^* \times F(\mathfrak{m}) \to \varkappa_n$$

задается равенством $(\alpha,\ \beta)_F = \rho^{\sigma_\alpha} \sim_F \rho$, где σ_α — элемент группы Галуа расширения k^{ab}/k, соответствующий элементу α в силу локальной теории полей классов, а ρ — элемент алгебраического замыкания поля k, получающийся делением точки β на изогению $[\pi_0^n]$, т. е. $[\pi_0^n](\rho) = \beta$. Спаривание Гильберта билинейно и обладает норменным свойством. Если G и F — две изоморфные формальные группы и $\varphi(X)$ — степенной ряд, задающий изоморфизм между ними, то

$$\varphi((\alpha,\ \beta)_G) = (\alpha,\ \varphi(\beta))_F. \tag{2}$$

2. Пусть $F_m(X,\ Y) = X + Y + XY$ — мультипликативный групповой закон. Тогда символ норменного вычета задает спаривание Гильберта $(\ ,\ )_{F_m}$ на множестве $k^* \times F_m(\mathfrak{m})$ со значениями в $\mu_{p^n} - 1 = \{\theta - 1$, где $\theta \in \mu_{p^n}\}$, и при этом фундаментальное свойство (1) примет вид

$$(\alpha,\ -\alpha)_{F_m} = 0, \qquad \alpha \in \mathfrak{m}. \tag{3}$$

Было бы соблазнительно считать, что такого типа соотношение справедливо для любой формальной группы Любина — Тэйта, что и утверждается в [4, гл. 8, свойство LS.6]. Однако, это предположение приводит к вырождению спаривания. А именно, пусть поле k_n получено из k_0 присоединением $\varkappa_n$, т. е. $k_n = k_0(\varkappa_n)$ и пусть $c(\ ,\ )_F$ — спаривание на множестве $k_n^* \times F(\mathfrak{m})$ со зна-

чениями в $\varkappa_n$, удовлетворяющее свойству билинейности и (2). При этих предположениях будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если спаривание с* $(\ ,\ )_F$ *удовлетворяет соотношению с* $(\alpha, -\alpha)_F = 0$ *для любого* $\alpha \in \mathfrak{m}$ *и любой формальной группы Любина — Тэйта* F, *то с* $(\alpha, \beta)_F = 0$ *для всех* $\alpha \in k_n^*$, $\beta \in F(\mathfrak{m})$.

3. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, сделаем несколько замечаний.

Пусть $\varphi(X)$ — степенной ряд с коэффициентами из кольца целых $\mathfrak{o}$ подполя инерции T расширения k/k_0, действие оператора Фробениуса Δ на ряд $\varphi(X)$ задается действием автоморфизма Δ расширения T/k_0 на коэффициенты ряда и возведением переменной в степень q.

Предложение. *Ряд* $\lambda(X) = X + c_2X^2 + \ldots$ *с коэффициентами из поля* k_0 *является логарифмом формальной группы Любина — Тэйта тогда и только тогда, когда ряд*

$$\left(1 - \frac{\Delta}{\pi_0}\right)\lambda(X)$$

имеет целые коэффициенты.

Доказательство. 1. Предположим, что ряд

$$\lambda(X) - \frac{\lambda(X^q)}{\pi_0}$$

имеет целые коэффициенты, тогда

$$\pi_0^r c_i \in \mathfrak{o}_0, \text{ если } i = q^r s, \text{ где } q \nmid s. \tag{4}$$

Рассмотрим в кольце $k_0[[X]]$ следующее уравнение:

$$\lambda(f(X)) = \pi_0\lambda(X). \tag{5}$$

Тогда $f \equiv \pi_0 X \bmod \deg 2$. Обозначим $f_i = f^i - X^{q^i}$ и перепишем (5) в виде

$$\sum_{i\geqslant 1} c_i f_i(X) = \sum_{q\nmid i} \pi_0 c_i X^i + \sum_{q|i} \pi_0\left(c_i - \frac{c_{i/q}}{\pi_0}\right) X^i.$$

Из сделанного предположения о ряде $\lambda(X)$ следует сравнение

$$\sum_{i\geqslant 1} c_i f_i(X) \equiv 0 \bmod \pi_0. \tag{6}$$

Наша ближайшая цель — показать, что

$$f_1(X) \equiv 0 \bmod \pi_0. \tag{7}$$

Для этого проверим, что если $f_1 \equiv 0 \bmod (\pi_0, \deg r)$, то при $i \geqslant 2$

$$c_i f_i(X) \equiv 0 \bmod (\pi_0, \deg r + 1).$$

Действительно, пусть $i = q^j s$, где $q \nmid s$. Запишем

$$c_i f_i = \sum_{v>0} f_1(X)^v X^{q(i-v)} c_i C_i^v = \sum x_v.$$

В случае $v \geqslant j + 1$, ввиду (4), заключаем

$$x_v \equiv 0 \bmod (\pi_0, \deg r + 1).$$

В случае $v \leqslant j$ легко проверить, что $C_i^v c_i \in \mathfrak{o}_0$, и поэтому

$$x_v \equiv \pi_0^v \bar{f}_1^v X^{q(i-v)} C_i^v c_i \equiv 0 \bmod (\pi_0, \deg r + 1),$$

где $f_1 \equiv \pi_0 \bar{f}_1 \bmod \deg r$.

Теперь, проводя индукцию по r и используя сравнение (6), приходим к (7).

Итак, установлено, что решение f уравнения (5) удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in \mathfrak{o}_0 [[X]], \quad f \equiv \pi_0 X \bmod \deg 2, \quad f \equiv X^q \bmod \pi_0.$$

Поэтому f является эндоморфизмом формальной группы Любина — Тэйта с логарифмом $\tilde{\lambda}(X)$, причем $\tilde{\lambda}$ тоже удовлетворяет (5), значит $\lambda = \tilde{\lambda}$ (см. [1, гл. 7]).

2. Пусть $\lambda(X)$ — логарифм формальной группы Любина — Тэйта F. Из установленного только что результата следует, что ряд $\lambda_a(X) = X + X^q/\pi_0 + X^{q_2}/\pi_0^2 + \ldots$ является логарифмом формальной группы Любина — Тэйта F'. Поскольку F и F' изоморфны над $\mathfrak{o}_0$ (см. [1, гл. 7]), существует ряд $\psi \in \mathfrak{o}_0 [[X]]$ такой, что $\lambda = \lambda_a \circ \psi$. Имеем

$$\left(1 - \frac{\Delta}{\pi_0}\right)(\lambda_a \circ \psi) = \sum_{i \geqslant 1} (\psi^{q^i} - \psi^{q^{i-1}\Delta})/\pi_0^i$$

— ряд с целыми коэффициентами, так как $\psi^{q^i} \equiv \psi^{q^{i-1}\Delta} \bmod \pi_0^i$. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть* $\varphi(X) = X + d_2 X^2 + \ldots$ — *ряд с целыми коэффициентами из* $\mathfrak{o}_0$. *Тогда ряд* φ *задает изоморфизм между* $G = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$ *и* F.

Действительно, из доказательства предложения следует, что если λ — логарифм формальной группы Любина — Тэйта F, то $\left(1 - \frac{\Delta}{\pi_0}\right)(\lambda_a \circ \psi \circ \varphi)$ — ряд с целыми

коэффициентами, значит, $\lambda \circ \varphi$ — логарифм формальной группы.

4. Доказательство теоремы 1. Из сформулированного следствия и равенства (2) следует, что для любого ряда $\varphi(X) = X + d_2X^2 + \ldots$, где $d_i \in \mathfrak{o}_0$, имеем

$$\varphi(c(\alpha, \beta)_G) = c(\alpha, \varphi(\beta))_F$$

и, значит, если $c(\alpha, -\alpha)_G = 0$ для любой формальной группы G, то

$$c(\alpha, \varphi(-\alpha))_F = 0$$

для любого ряда φ. Далее, $c(\theta, \beta)_F = 0$, когда $\theta \in \mu_{q-1}$. Отсюда вытекает

$$c(\alpha, \varphi(-\theta\alpha))_F = 0. \tag{8}$$

Зафиксируем простой элемент π поля k_n и пусть элемент β взят из $F(\mathfrak{m}) \setminus F(\mathfrak{m}^2)$. Тогда β тоже будет простым в k_n и поскольку расширение k_n/k_0 вполне разветвлено (см. [1, гл. 7]), то найдутся $\theta \in \mu_{q-1}$ и ряд $\varphi(X) = X + d_2X^2 + \ldots$, где $d_i \in \mathfrak{o}_0$ такие, что $\beta = \varphi(-\theta\pi)$. Поэтому равенство (8) дает

$$c(\pi, \beta)_F = 0. \tag{9}$$

Пусть $\beta \in F(\mathfrak{m}^2)$, тогда $\beta +_F (-\pi) = \beta'$ будет простым в k_n, значит, учитывая (9), получаем

$$c(\pi, \beta')_F = c(\pi, \beta)_F +_F c(\pi, -\pi)_F = 0.$$

Итак, для всех $\beta \in F(\mathfrak{m})$ имеем $c(\pi, \beta)_F = 0$. Но простые элементы порождают мультипликативную группу поля k_n, поэтому $c(\alpha, \beta)_F = 0$ для всех $\alpha \in k_n^*$, $\beta \in F(\mathfrak{m})$. Теорема доказана.

5. Встает интересный вопрос об описании формальных групп Любина — Тэйта, для которых выполняется аналог свойства (3).

Обозначим через $\mathbf{N}_t$ множество тех натуральных чисел, которые не делятся на t.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\lambda = X + c_2X^2 + \ldots$, $c_i \in k_0$ *и коэффициенты ряда*

$$\left(1 - \frac{\Delta}{\pi_0}\right)\lambda(-X) = \sum c_i' X^i \tag{10}$$

удовлетворяют следующему условию: если $q^r \mid i$ *и* $i > 1$, *то* $c_i' \equiv 0 \bmod \pi_0^{r+1}$ *в случае* $q \geqslant p^2$ *и* $c_i' \equiv 0 \bmod \pi_0^r$ *в слу-*

чае $q = p$. Пусть $p > 2$. Тогда для формальной группы Любина — Тэйта с логарифмом λ выполняется свойство

$$(\alpha, -\alpha^u)_F = 0 \text{ для } \alpha \in \mathfrak{m}, \quad u \in \mathbf{N}_q. \tag{11}$$

Доказательство. Ряд λ является логарифмом формальной группы Любина — Тэйта согласно предложению в 3. Для доказательства (11) мы используем явную формулу для спаривания Гильберта, найденную в [5]. В обозначениях этой работы имеем

$$(\alpha, -\alpha^u)_F = [\operatorname{tr res} \Phi/s]\,(\xi).$$

Здесь ξ — фиксированная образующая группы $\varkappa_n$, через $s(X)$ обозначается ряд $[\pi_0^n]\, z(X)$, где $z(X)$ — степенной ряд, соответствующий разложению ξ по степеням π. Элемент α раскладывается в ряд по степеням π, и этот ряд при замене π на X мы обозначаем той же буквой α. Наконец, tr обозначает оператор следа в расширении T/k_0,

$$\Phi = \sum_{i\geqslant 1} c_i' \alpha^{ui-1} \frac{d\alpha}{dX} + \sum_{i\geqslant 1} (-1)^i \frac{c_i}{\pi_0} \frac{d}{dX} g_{u,i},$$

где

$$g_{u,i} = \frac{\alpha^{uiq} - \alpha^{ui\Delta}}{uiq} - l_m(\alpha)\,\alpha^{ui\Delta},$$

а через $l_m(\alpha)$ обозначена функция $\frac{1}{q}\log \alpha^{q-\Delta}$ (см. [5, § 6]).

Используем следующие сравнения:

$$\operatorname{tr res} \frac{d}{dX} \frac{g^m}{m} \Big/ s \equiv 0 \mod \pi_0^{n-r},$$

$$\operatorname{res} \frac{d}{dX} \frac{p}{q} g/s \equiv 0 \mod \pi_0^n,$$

где $g \in \mathfrak{o}[[X]]$, $m = q^r s$ и $q \nmid s$, а также то, что

$$\frac{c_i}{\pi_0} \frac{d}{dX} g_{u,i} = \frac{d}{dX} \frac{ic_i p}{\pi_0} \alpha^{ui\Delta} \sum_{j\geqslant 2} \frac{i^{j-2} u^{j-1}}{q} \frac{p^{j-1}}{j!} \left(\frac{q l_m(\alpha)}{p}\right)^j$$

(см. [5, § 11]); учитывая (10), окончательно получаем

$$(\alpha, -\alpha^u)_F = \left[\operatorname{tr res} \sum_{i\geqslant 1} c_i' \alpha^{ui-1} \frac{d\alpha}{dX} \Big/ s\right](\xi) = 0.$$

Теорема доказана.

6. Замечание 1. Пусть

$$E(X)=\exp\left(X+\frac{X^p}{p}+\frac{X^{p^2}}{p^2}+\ldots\right)$$

— функция Артина — Хассе (см. [9]). Известно, что

$$E(X)=\prod_{i\in\mathbf{N}_p}(1-X^i)^{-\frac{\mu(i)}{i}},\ 1-X=\prod_{i\in\mathbf{N}_p}E(X^i),$$

где $\mu(i)$ — функция Мёбиуса. Из этих тождеств немедленно следует, что для мультипликативного группового закона F_m свойство (3) равносильно

$$(\alpha, E(\alpha^u)-1)_{F_m}=0, \text{ где } \alpha\in\mathfrak{m},\quad u\in\mathbf{N}_q. \tag{12}$$

В доказательстве предложения в 3, существует формальная группа F_a, логарифмом которой является

$$\lambda_a(X)=X+\frac{X^q}{\pi_0}+\frac{X^{q^2}}{\pi_0^2}+\ldots$$

— функция Артина — Хассе. Если λ — логарифм формальной группы F, то ряд $\mathscr{E}=\lambda^{-1}\circ\lambda_a$ имеет целые коэффициенты и задает изоморфизм из F_a в F. Этот ряд и является естественным обобщением функции $E(X)$ на формальные группы. Отметим, что при $p>2$ выполняется

$$\left(1-\frac{\Delta}{\pi_0}\right)\lambda_a(-X)=-\left(1-\frac{\Delta}{\pi_0}\right)\lambda_a(X)$$

и поэтому так же, как в теореме 2, проверяется, что $(\alpha, \alpha^u)_{F_a}\equiv 0$, где $\alpha\in\mathfrak{m}$, $u\in\mathbf{N}_q$. Значит,

$$(\alpha, \mathscr{E}(\alpha^u))_F=0.$$

Таким образом, свойство обобщенного символа Гильберта, аналогичное (12)

$$(\alpha, \mathscr{E}(\alpha^u))_F=0, \text{ где } \alpha\in\mathfrak{m},\quad u\in\mathbf{N}_q, \tag{13}$$

выполняется для любой формальной группы Любина — Тэйта.

Замечание 2. При $p=2$ теорема 2 и (13), вообще говоря, не выполняются. Однако, проводя рассуждения, подобные доказательству теоремы 2, и используя явные формулы для символа Гильберта, полученные в работах [7] и [8], можно доказать следующее:

а) если $q>p=2$ и p/π_0 — необратимый элемент в $\mathfrak{o}_0$, то $(\alpha, \mathscr{E}(\alpha^u))_F=0$, где $\alpha\in\mathfrak{m}$, $u\in\mathbf{N}_q$;

б) если $q = 2$ и p/π_0 — необратимый элемент в $\mathfrak{o}_0$, то $(\alpha, \mathscr{E}_1(\alpha^u))_F = 0$, где $\alpha \in \mathfrak{m}$, $u \in \mathbf{N}_q$, $\mathscr{E}_1 = \lambda^{-1} \circ \lambda_1$, $\lambda_1(X) = \lambda_\alpha(X) + \lambda_\alpha(X^2) + \pi_0\lambda_\alpha(X^4)$;

в) если $q > p = 2$ и p/π_0 — обратимый элемент в $\mathfrak{o}_0$, то $(\alpha, \mathscr{E}(-\alpha^u))_F = 0$, где $\alpha \in \mathfrak{m}$, $u \in \mathbf{N}_2$;

г) если $q = 2$ и p/π_0 — обратимый элемент в $\mathfrak{o}_0$, то $(\alpha, \mathscr{E}(\alpha^u))_F = 0$, где $\alpha \in \mathfrak{m}$, $u \in \mathbf{N}_q$.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступило
26.11.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ивасава К. Локальная теория полей классов. М.: Мир, 1983.
[2] Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. М.: Мир, 1974.
[3] Fröhlich A. Formal groups // Lect. Notes in Math. Bd 74. Heidelberg: Springer, 1968.
[4] Lang S. Cyclotomic Fields. Heidelberg: Springer, 1978 (РЖМат. 1979. 11А312К).
[5] Востоков С. В. Символы на формальных группах // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1981. Т. 45, № 5. С. 985—1014.
[6] Востоков С. В. Символ Гильберта для формальных групп Любина — Тэйта. 1 // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1982. Т. 114. С. 77—95.
[7] Востоков С. В., Фесенко И. Б. Символ Гильберта для формальных групп Любина — Тэйта. 2 // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1983. Т. 132. С. 85—96.
[8] Фесенко И. Б. Символ Гильберта для формальных групп Любина — Тэйта. 3 // Кольца и матричные группы. Орджоникидзе, Изд-во СОГУ, 1984. С. 146—150.
[9] Artin E., Hasse H. Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitatsgesetz der l^n-ten Potenzreste in Körper der l^n-ten Einheitswürzeln // Abh. Mathem. Seminar Hamburg, 1928. Bd 6. S. 146—162.