А. Л. Казаков, Обобщенная задача Коши для квазилинейной системы с двумя особенностями, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2009, том 12, номер 4, 51–63

Сибирский журнал
индустриальной математики
Октябрь–декабрь, 2009. Том XII, № 4(40)

УДК 517.95

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ОСОБЕННОСТЯМИ

А. Л. Казаков

Рассматривается обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях, являющихся характеристиками. Доказана теорема существования и единственности решения задачи в классе аналитических функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, квазилинейная система, начально-краевая задача, аналитическое решение, ряд, сходимость, мажоранта.

Статья посвящена построению аналитических решений начально-краевой задачи специального вида для систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которую мы, следуя Н. А. Леднёву [1], называем обобщенной задачей Коши (ОЗК). Ее отличие от задачи Коши в традиционной постановке состоит в том, что начальные (граничные) условия ставятся не на одной, а на двух или на нескольких поверхностях. Количество поверхностей не превосходит числа независимых переменных. Число условий равно числу неизвестных функций и этим ОЗК отличается от смешанной задачи. Именно к обобщенным задачам Коши с точки зрения общей теории дифференциальных уравнений с частными производными приводит математическое описание течений газа с ударными волнами [2, 3].

Ранее исследовались ОЗК для квазилинейных аналитических систем: с данными на двух [4–6], на трех [5], на произвольном числе поверхностей [1], а также ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной системы с особенностью вида u/x [5]. В статье рассматривается ОЗК с данными на двух поверхностях для системы квазилинейных уравнений с частными производными в случае, когда система имеет на одной из поверхностей особенность вида u/x, а на другой — вида v/y. Указаны необходимые и достаточные условия существования и единственности решения поставленной задачи в виде формальных степенных рядов, причем для вычисления коэффициентов рядов получены рекуррентные формулы. Приведены достаточные условия сходимости рядов и рассмотрен случай, когда приведенные достаточные условия не выполняются. Доказана теорема и построен пример типа Адамара, которые показывают, что в этом случае возможны различные ситуации: аналитическое решение рассмотренной задачи может как существовать, так и отсутствовать даже при выполнении условий существования и единственности решения в виде формальных степенных рядов.

1. Постановка задачи и формулировка основной теоремы. Рассматривается начально-краевая задача для квазилинейной системы первого порядка в случае двух неизвестных функций, зависящих от двух независимых переменных:

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + f(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + g(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Ранее рассматривался случай, когда функции $f(x,y,u,v)$, $g(x,y,u,v)$ являются аналитическими [4, 5], и случай, когда они имеют особенность u/x [5]. Нами предполагается, что задача (1) имеет две особенности:

$$f(x,y,u,v)=\frac{f_1(x,y,u,v)}{x}+\frac{f_2(x,y,u,v)}{y},$$
$$g(x,y,u,v)=\frac{g_1(x,y,u,v)}{x}+\frac{g_2(x,y,u,v)}{y}.$$

Решение задачи будет строиться в классе аналитических функций. Пусть выполнены необходимые условия разрешимости

$$f_1|_{x=0,u=0}=g_1|_{x=0,u=0}=0,\quad f_2|_{y=0,v=0}=g_2|_{y=0,v=0}=0$$

и функции f_1, g_1, f_2, g_2 имеют вид

$$f_1=uf_3(x,y,u,v)+xf_4(x,y,u,v),\quad g_1=ug_3(x,y,u,v)+xg_4(x,y,u,v),$$
$$f_2=vf_5(x,y,u,v)+yf_6(x,y,u,v),\quad g_2=vg_5(x,y,u,v)+yg_6(x,y,u,v).$$

Тогда задача (1) записывается следующим образом:

$$u_x=a(x,y,u,v)u_y+b(x,y,u,v)v_x + f_3(x,y,u,v)\frac{u}{x}+f_5(x,y,u,v)\frac{v}{y}+f_7(x,y,u,v),$$

$$v_y=c(x,y,u,v)u_y+d(x,y,u,v)v_x + g_5(x,y,u,v)\frac{u}{x}+g_5(x,y,u,v)\frac{v}{y}+g_7(x,y,u,v), \quad (2)$$

$$u(0,y)=0,\quad v(x,0)=0,$$

где

$$f_7=f_4(x,y,u,v)+f_6(x,y,u,v),\quad g_7=g_4(x,y,u,v)+g_6(x,y,u,v).$$

Если обе части системы (2) умножить на xy, то поверхности $x=0$ и $y=0$ будут являться для получившейся системы характеристиками. Однако задача (2) не является задачей Гурса или характеристической задачей Коши.

Прежде чем сформулировать основную теорему, введем некоторые константы:

$$A_0=a(O),\quad B_0=b(O),\quad C_0=c(O),\quad D_0=d(O),$$
$$e_0=f_3(O),\quad f_0=f_5(0),\quad g_0=g_3(0),\quad h_0=f_5(O). \quad (3)$$

Также вводятся числовые последовательности $H_{k,n-k}$, $A_{k,n-k}$, $B_{k,n-k}$, $C_{k,n-k}$, $D_{k,n-k}$, $n=0,1,\ldots$, $k=0,1,\ldots,n$, по формулам

$$H_{k,n-k}=(k+1-e_0)(n-k+1-h_0)-f_0g_0,$$
$$A_{k,n-k}=\frac{(k+1)(n+1-k-h_0)A_0+C_0f_0}{H_{k,n-k}},$$
$$B_{k,n-k}=\frac{(k+1)(n+1-k-h_0)B_0+D_0f_0}{H_{k,n-k}},$$
$$C_{k,n-k}=\frac{(n+1-k)(k+1-e_0)C_0+A_0g_0}{H_{k,n-k}},$$

$$D_{k,n-k} = \frac{(n+1-k)(k+1-e_0)D_0 + B_0 g_0}{H_{k,n-k}}$$

и числовые последовательности $\Delta_{k,n-k}$, $\delta_{k,n-k}$ по формулам

$$\Delta_{0,n} = 1, \quad \delta_{0,n} = B_{0,n},$$

$$\Delta_{k,n-k} = \begin{cases} 1 - C_{k,n-k}\delta_{k-1,n+1-k}, & \text{если} \quad \Delta_{k-1,n+1-k} \neq 0, \\ \text{не определено}, & \text{если} \quad \Delta_{k-1,n+1-k} = 0; \end{cases}$$

$$\delta_{k,n-k} = \begin{cases} B_{k,n-k} + \dfrac{A_{k,n-k}D_{k,n-k}\delta_{k-1,n+1-k}}{\Delta_{k,n-k}}, & \text{если} \quad \Delta_{k,n-k}\Delta_{k-1,n-k+1} \neq 0, \\ \text{не определено}, & \text{если} \quad \Delta_{k,n-k} = 0, \\ B_{k,n-k} - \dfrac{A_{k,n-k}D_{k,n-k}}{C_{k,n-k}}, & \text{если} \quad \Delta_{k-1,n-k+1} = 0, \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, n.$$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (2) *функции* a, b, c, d, f_3, g_3, f_5, g_5, f_7, g_7 *являются аналитическими в некоторой окрестности точки* O ($x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$). *Если выполняются условия*

$$H_{k,n-k} \neq 0, \quad \Delta_{n,0} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \ k = 0, 1, \dots, n, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{n,0} = \delta_\infty, \quad |\delta_\infty| < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_{n,0} = \Delta_\infty \neq 0, \quad |\Delta_\infty| < +\infty, \tag{5}$$

$$|A_0 D_0|/\Delta_\infty^2 < 1, \tag{6}$$

то у задачи (2) *существует в некоторой окрестности точки* O *единственное аналитическое решение. При этом условия* (4) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных степенных рядов, а условия* (5), (6) — *достаточными условиями сходимости рядов.*

2. Построение формального решения задачи (2). Прежде чем строить решение задачи (2) в виде формальных степенных рядов, а затем доказывать их сходимость, в задаче (2) делается замена переменных:

$$x' = \varepsilon_1 x, \quad y' = \varepsilon_2 y, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 - \text{const} > 0.$$

При условии (6) за счет выбора ε_1, ε_2 можно добиться выполнения неравенств

$$|A_0'| < |\Delta_\infty|, \quad |D_0'| < |\Delta_\infty|. \tag{7}$$

Далее предполагается, что соответствующая замена сделана и, следовательно, выполняются неравенства (7). У новой задачи для простоты написания штрихи опускаются (т. е. сохраняется написание (2)).

Решение задачи (2) будет строиться в виде рядов (символ w обозначает u или v)

$$w(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0} \frac{w_{k,l}x^k y^l}{k!l!}, \quad w_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l} w}{\partial x^k \partial y^l}\right|_{x=y=0}. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} p &= (a - A_0)u_y + (b - B_0)v_x + (f_3 - e_0)\frac{u}{x} + (f_5 - f_0)\frac{v}{y} + f_7, \\ q &= (c - C_0)u_y + (d - D_0)v_x + (g_3 - g_0)\frac{u}{x} + (g_5 - h_0)\frac{v}{y} + g_7. \end{aligned} \tag{9}$$

Обе части уравнений системы из задачи (2) умножаются на xy. С учетом введенных обозначений система примет вид

$$\begin{aligned} xyu_x &= xyA_0u_y + xyB_0v_x + ye_0u + xf_0v + xyp, \\ xyv_y &= xyC_0u_y + xyD_0v_x + yg_0u + xh_0v + xyq. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть (символ r обозначает p или q)

$$r_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l+2}(xyr)}{\partial x^{k+1}\partial y^{l+1}}\right|_{x=y=u=v=0},$$
$$\mathbf{w}_n = (w_{n,0}; w_{n-1,1}; \dots; w_{0,n}), \quad \mathbf{r}_n = (r_{n,0}; r_{n-1,1}; \dots; r_{0,n}).$$

Из (3) и (9) следует, что в $r_{k,l}$ будут входить компоненты векторов $\mathbf{w}_m$ при $0 \le m \le l+k$ и не будут входить компоненты векторов $\mathbf{w}_m$ при $m \ge l+k+1$.

Возможность однозначного определения коэффициентов рядов (8) доказывается индукцией по $n = k+l$. В силу начальных условий

$$u_{0,l} = v_{k,0} = 0 \quad \text{при всех} \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \tag{11}$$

в частности, $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$. Следовательно, $\mathbf{w}_0$ однозначно определяются начальными условиями. Пусть все $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n$, $n \ge 0$, найдены. Чтобы найти $\mathbf{w}_{n+1}$, уравнения (10) дифференцируются $k+1$ раз по x, $n-k+1$ раз по y, полагаются $x = y = u = v = 0$ и учитываются начальные условия в виде (11). В результате получаются соотношения

$$u_{0,n+1} = 0,$$
$$(n+1)u_{1,n} = A_0(n+1)u_{0,n+1} + B_0(n+1)v_{1,n} + e_0(n+1)u_{1,n} + f_0v_{0,n+1} + p_{0,n},$$
$$(n+1)v_{0,n+1} = C_0(n+1)u_{0,n+1} + D_0(n+1)v_{1,n} + g_0(n+1)u_{1,n} + h_0v_{0,n+1} + q_{0,n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned} (k+1)(n-k+1)u_{k+1,n-k} &= A_0(k+1)(n-k+1)u_{k,n-k+1} + B_0(k+1)(n-k+1)v_{k+1,n-k} \\ &+ e_0(n-k+1)u_{k+1,n-k} + f_0(k+1)v_{k,n+1-k} + p_{k,n-k}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$(k+1)(n-k+1)v_{k,n-k+1} = C_0(k+1)(n-k+1)u_{k,n-k+1}$$
$$+D_0(k+1)(n-k+1)v_{k+1,n-k} + g_0(n-k+1)u_{k+1,n-k} + h_0(k+1)v_{k,n+1-k} + q_{k,n-k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(n+1)u_{n+1,0} = (n+1)A_0u_{n,1} + (n+1)B_0v_{n+1,0} + e_0u_{n+1,0} + f_0(n+1)v_{n,1} + p_{n,0},$$
$$(n+1)v_{n,1} = (n+1)C_0u_{n,1} + (n+1)D_0v_{n+1,0} + g_0u_{n+1,0} + h_0(n+1)v_{n,1} + q_{n,0},$$
$$v_{n+1,0} = 0,$$

которые являются СЛАУ для компонент векторов $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{v}_{n+1}$.

Система (12) преобразуется к более удобному виду. Из $(2k+2)$-го уравнения системы исключается $v_{k,n+1-k}$. Для этого $(2k+2)$-е уравнение умножается на $n-k+1-h_0$ и прибавляется к $(2k+3)$-му, умноженному на f_0. В результате получаем

$$\begin{aligned} (n-k+1)&[(k+1-e_0)(n-k+1-h_0) - f_0g_0]u_{k+1,n-k} \\ &= (k+1)(n-k+1)[A_0(n-k+1-h_0) + C_0f_0]u_{k,n-k+1} \\ &+ (k+1)(n-k+1)[B_0(n-k+1-h_0) + D_0f_0]v_{k+1,n-k} + \tilde{p}_{k,n-k}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\tilde{p}_{k,n-k} = (n-k+1-h_0)p_{k,n-k} + f_0 q_{k,n-k}$.

Аналогичным образом из $(2k+3)$-го уравнения исключается $u_{k+1,n-k}$:

$$\begin{aligned}(k+1)[(k+1-e_0)(n-k+1-h_0) - f_0 g_0]v_{k,n-k+1}\\ = (k+1)(n-k+1)[B_0(k+1-e_0) + A_0 g_0]u_{k,n-k+1}\\ + (k+1)(n-k+1)[D_0(k+1-e_0) + B_0 g_0]v_{k+1,n-k} + \tilde{q}_{k,n-k},\end{aligned} \tag{14}$$

где $\tilde{q}_{k,n-k} = (k+1-e_0)q_{k,n-k} + g_0 p_{k,n-k}$.

Уравнения (13) и (14) могут быть переписаны в виде

$$u_{k,n+1-k} = A_{k,n-k}u_{k,n+1-k} + B_{k,n-k}v_{k+1,n-k} + P_{k,n-k}, \tag{15}$$

$$v_{k,n+1-k} = C_{k,n-k}u_{k,n+1-k} + D_{k,n-k}v_{k+1,n-k} + Q_{k,n-k}. \tag{16}$$

Здесь

$$P_{k,n-k} = \frac{(n-k+1-h_0)p_{k,n-k} + f_0 q_{k,n-k}}{(n-k+1)[(k+1-e_0)(n-k+1-h_0) - f_0 g_0]},$$

$$Q_{k,n-k} = \frac{(k+1-e_0)q_{k,n-k} + g_0 p_{k,n-k}}{(k+1)[(k+1-e_0)(n-k+1-h_0) - f_0 g_0]}.$$

Приведенное преобразование возможно при выполнении условия $H_{k,n-k} \neq 0$. Таким образом, с учетом (11), (15), (16) получена следующая СЛАУ:

$$\begin{gathered}v_{0,n+1} = D_{0,n}v_{1,n} + Q_{0,n},\\ v_{1,n} = D_{1,n-1}v_{2,n-1} + C_{1,n-1}u_{1,n} + Q_{1,n-1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_{k,n+1-k} = D_{k,n-k}v_{k+1,n-k} + C_{k,n-k}u_{k,n+1-k} + Q_{k,n-k},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_{n-1,2} = D_{n-1,1}v_{n,1} + C_{n-1,1}u_{n-1,2} + Q_{n-1,1},\\ v_{n,1} = C_{n,0}u_{n,1} + Q_{n,0},\\ u_{n+1,0} = A_{n,0}u_{n,1} + P_{n,0},\\ u_{n,1} = A_{n-1,1}u_{n-1,2} + B_{n-1,1}v_{n,1} + P_{n-1,1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{k+1,n-k} = A_{k,n-k}u_{k,n+1-k} + B_{k,n-k}v_{k+1,n-k} + P_{k,n-k},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{2,n-1} = A_{1,n-1}u_{1,n} + B_{1,n-1}v_{2,n-1} + P_{1,n-1},\\ u_{1,n} = B_{0,n}v_{1,n} + P_{0,n}.\end{gathered} \tag{17}$$

Система (17) решается методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). «Прямой ход» метода состоит в следующем. Первое и последнее уравнения системы (17) записываются в виде

$$\begin{gathered}v_{0,n+1} = D_{0,n}v_{1,n} + Q_{0,n} = \frac{D_{0,n}}{\Delta_{0,n}}v_{1,n} + \psi_{0,n},\\ u_{1,n} = B_{0,n}v_{1,n} + P_{0,n} = \delta_{0,n}v_{1,n} + \chi_{0,n},\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\Delta_{0,n} = 1, \quad \psi_{0,n} = Q_{0,n}/\Delta_{0,n}, \quad \delta_{0,n} = B_{0,n}, \quad \chi_{0,n} = P_{0,n}.$$

С учетом (18) второе уравнение системы (17) преобразуется к виду

$$v_{1,n} = D_{1,n-1}v_{2,n-1} + C_{1,n-1}u_{1,n} + Q_{1,n-1}$$
$$= D_{1,n-1}v_{2,n-1} + C_{1,n-1}(\delta_{0,n}v_{1,n} + \chi_{0,n}) + Q_{1,n-1},$$

отсюда

$$v_{1,n} = \frac{D_{1,n-1}}{1 - C_{1,n-1}\delta_{0,n}}v_{1,n-1,n-1} + \frac{C_{1,n-1}\chi_{0,n} + Q_{1,n-1}}{1 - C_{1,n-1}\delta_{0,n}} = \frac{D_{1,n-1}}{\Delta_{1,n-1}}v_{2,n-1} + \psi_{1,n-1},$$

где

$$\Delta_{1,n-1} = 1 - C_{1,n-1}\delta_{0,n}, \quad \psi_{1,n-1} = \frac{C_{1,n-1}\chi_{0,n} + Q_{1,n-1}}{\Delta_{1,n-1}}.$$

Предпоследнее уравнение системы (17) с учетом (18) преобразуется к виду

$$u_{2,n-1} = A_{1,n-1}u_{1,n} + B_{1,n-1}v_{2,n-1} + P_{1,n-1}$$
$$= A_{1,n-1}(\delta_{0,n}v_{1,n} + \chi_{0,n}) + B_{1,n-1}v_{2,n-1} + P_{1,n-1}$$
$$= A_{1,n-1}\delta_{0,n}\left(\frac{D_{1,n-1}}{\Delta_{1,n-1}}v_{2,n-1} + \psi_{1,n-1}\right) + A_{1,n-1}\chi_{0,n} + B_{1,n-1}v_{2,n-1} + P_{1,n}$$
$$= \left(B_{1,n-1} + A_{1,n-1}D_{1,n-1}\frac{\delta_{0,n}}{\Delta_{1,n-1}}\right)v_{2,n-1} + A_{1,n-1}(\delta_{0,n}\psi_{1,n-1} + \chi_{0,n}) + P_{1,n-1}$$
$$= B_{1,n-1}\delta_{1,n-1}v_{2,n-1} + \chi_{1,n-1},$$

где

$$\delta_{1,n-1} = B_{1,n-1} + A_{1,n-1}D_{1,n-1}\frac{\delta_{0,n}}{\Delta_{1,n-1}},$$
$$\chi_{1,n-1} = A_{1,n-1}(\delta_{0,n}\psi_{1,n-1} + \chi_{0,n}) + P_{1,n-1},$$

и так далее, с каждым шагом продвигаясь к центру системы. В результате получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} v_{k,n-k+1} = \frac{D_{k,n-k}}{\Delta_{k,n-k}}v_{k+1,n-k} + \psi_{k,n-k}, \\ u_{k+1,n-k} = \delta_{k,n-k}v_{k+1,n-k} + \chi_{k,n-k}, \\ k = 0, \dots, n, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} \chi_{0,n} = P_{0,n}, \quad \chi_{k,n-k} = A_{k,n-k}(\delta_{k-1,n-k+1}\psi_{k,n-k} + \chi_{k-1,n-k+1}) + P_{k,n-k}, \\ \psi_{0,n} = \frac{Q_{0,n}}{\Delta_{0,n}}, \quad \psi_{k,n-k} = \frac{C_{k,n-k}\chi_{k-1,n+1-k} + Q_{k,n-k}}{\Delta_{k,n-k}}, \\ \Delta_{0,n} = 1, \quad \Delta_{k,n-k} = 1 - C_{k,n-k}\delta_{k-1,n-k+1}, \\ \delta_{k,n-k} = B_{k,n-k} + A_{k,n-k}D_{k,n-k}\frac{\delta_{k-1,n-k+1}}{\Delta_{k,n-k}}. \end{gathered} \tag{20}$$

«Обратный ход» метода состоит в последовательном определении значений $u_{k+1,n-k}$, $v_{k,n-k+1}$. При выполнении условий теоремы 1 $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{v}_{n+1}$ однозначно определяются:

$$\begin{gathered} v_{n+1,0} = 0, \quad v_{n,1} = \psi_{n,0}, \quad u_{n+1,0} = \chi_{n,0}, \\ v_{n-1,2} = \frac{D_{n-1,1}}{\Delta_{n-1,1}}v_{n,1} + \psi_{n-1,1}, \quad u_{n,1} = \delta_{n-1,1}v_{n,1} + \chi_{n-1,1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{0,n+1} = \frac{D_{0,n}}{\Delta_{0,n}}v_{1,n} + \psi_{0,n}, \quad u_{1,n} = \delta_{0,n}v_{1,n} + \chi_{0,n}, \end{gathered} \tag{21}$$

где $\chi_{k,n-k}$, $\psi_{k,n-k}$, $k = 0, \ \dots, n$, находим из (20).

Для доказательства сходимости рядов (8) удобно преобразовать соотношения (20), (21), проведя переход от рекуррентных формул для $\chi_{k,n-k}$ к явным через $A_{i,n-i}$, $B_{i,n-i}$, $\Delta_{i,n-i}$, $\delta_{i,n-i}$, $P_{k,l}$, $Q_{k,l}$.

Как показано выше (см. (20)),

$$\chi_{0,n} = P_{0,n}, \psi_{1,n-1} = \frac{C_{1,n-1}P_{0,n} + Q_{1,n-1}}{\Delta_{1,n-1}}.$$

С учетом выражений для $\psi_{1,n-1}, \chi_{0,n}$ формула для $\chi_{1,n-1}$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\chi_{1,n-1} &= A_{1,n-1}(\delta_{0,n}\psi_{1,n-1} + \chi_{0,n}) + P_{1,n-1} \\ &= A_{1,n-1}\left[\delta_{0,n}\frac{(C_{1,n-1}P_{0,n} + Q_{1,n-1})}{\Delta_{1,n-1}} + P_{0,n}\right] + P_{1,n-1} \\ &= A_{1,n-1}\left(C_{1,n-1}\frac{\delta_{0,n}}{\Delta_{1,n-1}} + 1\right)P_{0,n} + A_{1,n-1}Q_{1,n-1}\frac{\delta_{0,n}}{\Delta_{1,n-1}} + P_{1,n-1} \\ &= \frac{A_{1,n-1}}{\Delta_{1,n-1}}P_{0,n} + P_{1,n-1} + \frac{A_{1,n-1}}{\Delta_{1,n-1}}\delta_{0,n}Q_{1,n-1}.\end{aligned}$$

Докажем, что для $\chi_{k,n-k}$ справедлива формула

$$\begin{aligned}\chi_{k,n-k} = &\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}}\right)P_{i-1,n+1-i}\right] + P_{k,n-k}\right\} \\ &+ \left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}}\right)\delta_{i-1,n+1-i}Q_{i,n-i}\right]\right\}. \qquad (22)\end{aligned}$$

Это устанавливается индукцией по k. Случай $k = 1$ уже рассмотрен, база индукции установлена. Пусть до k включительно формула (22) справедлива. Докажем, что в этом случае она верна и для $k+1$. С использованием соотношений (20), (21) и предположения индукции выражение для $\chi_{k+1,n-k-1}$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\chi_{k+1,n-k-1} &= A_{k+1,n-k-1}(\delta_{k,n-k}\psi_{k+1,n-k-1} + \chi_{k,n-k}) + P_{k+1,n-k-1} \\ &= A_{k+1,n-k-1}\left[\delta_{k,n-k}\frac{(C_{k+1,n-k-1}\chi_{k,n-k} + Q_{k+1,n-k-1})}{\Delta_{k+1,n-k-1}} + \chi_{k,n-k}\right] + P_{k+1,n-k-1} \\ &= A_{k+1,n-k-1}\left(\frac{C_{k+1,n-k-1}\delta_{k,n-k}}{\Delta_{k+1,n-k-1}} + 1\right)\chi_{k+1,n-k} \\ &\quad + P_{k+1,n-k-1} + \frac{A_{k+1,n-k-1}Q_{k+1,n-k-1}\delta_{k,n-k}}{\Delta_{k+1,n-k-1}} \\ &= \frac{A_{k+1,n-k-1}\chi_{k,n-k}}{\Delta_{k+1,n-k-1}} + P_{k+1,n-k-1} + \frac{A_{k+1,n-k-1}\delta_{k,n-k}Q_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1,n-k-1}} \\ &= \frac{A_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1,n-k-1}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}}\right)P_{i-1,n+1-i}\right] + P_{k,n-k}\right\} \\ &\quad + \frac{A_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1,n-k-1}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}}\right)\delta_{i-1,n-1+1}Q_{i,n-i}\right]\right\}\end{aligned}$$

$$+ P_{k+1,n-k-1} + \delta_{k,n-k} Q_{k+1,n-k-1} \frac{A_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1,n-k-1}}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(\prod_{j=i}^{k+1} \frac{A_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}} \right) P_{i-1,n+1-i} \right] + P_{k+1,n-k-1} \right\}$$

$$+ \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(\prod_{j=i}^{k+1} \frac{A_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}} \right) \delta_{i,n-i} Q_{i,n-i} \right] \right\},$$

что и требовалось доказать.

Теперь $v_{k,n-k+1}$ выражаются через $\psi_{i,n-i}$. Получение выражений проводится индукцией по $n-k = 0, 1, \ldots, n-1$. Из (21) известно, что

$$v_{n,1} = \psi_{n,0}.$$

С учетом последнего соотношения выражение для $v_{n-1,2}$ имеет вид

$$v_{n-1,2} = \frac{D_{n-1,1}}{\Delta_{n-1,1}} \psi_{n,0} + \psi_{n-1,1}.$$

База индукции установлена.

Пусть

$$v_{k+1,n-k} = \sum_{i=k+2}^{n} \left[\left(\prod_{j=k+1}^{i-1} \frac{D_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}} \right) \psi_{i,n-i} \right] + \psi_{k+1,n-k-1}.$$

Тогда (см. (19))

$$v_{k,n-k+1} = \frac{D_{k,n-k}}{\Delta_{k,n-k}} \sum_{i=k+2}^{n} \left[\left(\prod_{j=k+1}^{i-1} \frac{D_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}} \right) \psi_{i,n-i} \right] + \psi_{k,n-k}.$$

Отсюда следует искомая формула

$$v_{k,n-k+1} = \sum_{i=k+1}^{n} \left[\left(\prod_{j=k}^{i-1} \frac{D_{j,n-j}}{\Delta_{j,n-j}} \right) \psi_{i,n-i} \right] + \psi_{k,n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Итак, при известных $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{Q}_n$ построение $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{v}_{n+1}$ можно осуществить по следующей процедуре. Вначале по формулам (22) через $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{Q}_n$ определить $\boldsymbol{\chi}_n = (\chi_{n,0}, \chi_{n-1,1}, \ldots, \chi_{0,n})$. Затем из части равенств (21) найти $\boldsymbol{\psi}_n = (\psi_{n,0}, \psi_{n-1,1}, \ldots, \psi_{0,n})$ через $\boldsymbol{\chi}_n$, $\mathbf{Q}_n$. Далее, по формулам (20) определить $\mathbf{v}_{n+1}$ через $\boldsymbol{\psi}_n$. Наконец, из формул (19) найти $\mathbf{u}_{n+1}$ через $\mathbf{v}_{n+1}$, $\boldsymbol{\chi}_n$.

3. Доказательство сходимости рядов (8). Сходимость рядов (8) доказывается методом мажорант. Для задачи (2) мажорантная задача строится следующим образом. Вначале выбираются положительные константы M, ρ такие, чтобы функция

$$R = \frac{M}{[1 - (x + y + U + V)/\rho]} [(x + y + U + V)(U_x + U_y + V_x + V_y) + 1]$$

мажорировала функции

$$P = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_{k,l} \frac{x^k y^l}{k!l!}, \quad Q = \sum_{k,l=0}^{\infty} Q_{k,l} \frac{x^k y^l}{k!l!}.$$

Это возможно при условии, что $U \gg u$, $V \gg v$ в силу аналитичности функций a, b, c, d, f_3, g_3, f_5, g_5, f_7, g_7. Из условий (5), (6) и их следствий видно, что существуют константы M_1, M_2, q_* такие, что при всех $k, n \in \mathbb{N}_0$

$$M_1 \geq 1, \quad M_2 \geq 1, \quad 0 < q_* < 1,$$
$$\left(\prod_{i=n}^{k+n} \frac{|A_{i,n-i}|}{|\Delta_{i,n-i}|}\right) \leq M_1 q_*^k, \quad \left(\prod_{i=n}^{n+k} \frac{|D_{i,n-i}|}{|\Delta_{i,n-i}|}\right) \leq M_1 q_*^k,$$
$$\frac{1}{|\Delta_k|} \leq M_2, |\delta_k| \leq M_2, \quad \frac{|C_{k,n-k}|}{|\Delta_{k,n-k}|} \leq M_2, \quad |A_{k,n-k}| \leq M_2.$$

Построим константы $U_{k,l}$, $V_{k,l}$ по формулам

$$V_{k,0} = U_{0,l} = 0, \quad V_{0,1} = U_{1,0} = R_{0,0},$$
$$V_{n,1} = \Psi_{n,0}, \quad V_{n-1,2} = M_1 q_* \Psi_{n,0} + \Psi_{n-1,1},$$
$$V_{k,n+1-k} = M_1 \sum_{i=k+1}^{n} (q_*^{i-k} \Psi_{i,n-i}) + \Psi_{k,n-k}, \quad k = n-1, \dots, 0,$$
$$U_{k+1,n-k} = M_2 V_{k+1,n-k} + X_{k,n-k}, \quad k = 0, \dots, n+1,$$

где

$$X_{0,n} = R_{0,n}, \quad X_{0,n} = M_1 R_{0,n} + M_2 R_{1,n-1},$$

$$X_{k,n-k} = M_1 \sum_{i=1}^{k} \left(q_*^{k-i+1} R_{i-1,n-i+1}\right) + R_{k,n-k}$$
$$+ M_1 M_2 \sum_{i=1}^{k} \left(q_*^{k-i+1} R_{i,n-i}\right), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\Psi_{k,n-k} = M_2 (X_{k-1,n-k+1} + R_{k,n-k}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда $V_{k,l} \geq |v_{k,l}|, U_{k,l} \geq |u_{k,l}|$ и, следовательно,

$$U(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} U_{k,l} \frac{x^k y^l}{k! l!} \gg u(x,y), \quad V(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} V_{k,l} \frac{x^k y^l}{k! l!} \gg v(x,y). \tag{23}$$

Далее доказывается сходимость рядов (23). Вводится функция

$$R^* = \frac{M M_6}{[1 - (t + 2W^*)/\rho]} [(t + 2W^*) 4 W_t^* + 1]$$

и константы W_n^* строятся по формулам

$$W_0^* = 0, \quad W_1^* = R_0^* > V_{1,0} = U_{0,1} > U_{0,1} = V_{0,1} = 0,$$
$$W_{n+1}^* = R_n^*, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{24}$$

где

$$R_n^* = \left.\frac{d^n R^*}{dt^n}\right|_{t = W^* = 0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$
$$M_6 = M_2 M_5 + M_3, \quad M_5 = M_4 \left(1 + \frac{1}{1 - q_*}\right),$$
$$M_4 = M_2 (M_3 + 1), \quad M_3 = 1 + M_1 q_* \frac{1 + M_2}{1 - q_*}.$$

Тогда $W_n^* \geq \max\limits_{k+l=n}(U_{k,l}; V_{k,l})$ и, следовательно, $W(x+y)$ мажорирует как $U(x,y)$, так и $V(x,y)$. Построение коэффициентов ряда

$$W^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n^* t^n}{n!} \tag{25}$$

по формулам (24) равносильно решению задачи Коши

$$W_t^* = \frac{M_6 M}{[1-(t+2W^*)/\rho]}[(t+2W^*)4W_t^* + 1], \quad W^*(0) = 0.$$

Если последнюю задачу записать в нормальном виде

$$W_t^* = G_3(t, W^*), \quad W^*(0) = 0, \tag{26}$$

то правая часть дифференциального уравнения — функция $G_3(t, W^*)$ — является аналитической в окрестности точки ($t = 0$, $W^* = 0$) функцией, мажорирующей нуль:

$$G_3(t, W^*) = \frac{G_2}{(1-4G_1G_2)},$$

где

$$G_1(t, W^*) = t + 2W^* \gg 0, \quad G_1(O) = 0, \quad G_2(t, W^*) = \frac{MM_6}{1-G_1/\rho} \gg 0.$$

По теореме Коши задача (26) имеет единственное аналитическое, мажорирующее нуль решение, задаваемое сходящимся рядом (25), коэффициенты которого находятся по формулам (24). Из способа построения задачи (26) следует, что она является мажорантной для (2): $W^*(x+y) \gg u(x,y), v(x,y)$. Из сходимости ряда (25) следует сходимость рядов (23), что обеспечивает сходимость рядов (8), решающих задачу (2). Теорема 1 доказана.

4. Случай, когда достаточные условия сходимости (6) не выполняются. Приведенные ниже теорема и пример показывают, что при невыполнении достаточных условий сходимости из условия теоремы 1 возможны различные ситуации: аналитическое решение задачи (2) может как существовать, так и отсутствовать даже при выполнении условий (4) существования и единственности решения в виде формальных рядов.

Теорема 2. *Если f, g — аналитические в окрестности точки O функции, то у полулинейной расщепленной в главной части задачи*

$$\begin{gathered} u_x = u_y + e_0\frac{u}{x} + f(x,y,u,v), \\ v_y = v_x + h_0\frac{v}{y} + g(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0 \end{gathered} \tag{27}$$

при выполнении неравенств

$$e_0 < 1, \quad h_0 < 1 \tag{28}$$

в некоторой окрестности точки $(x,y) = (0,0)$ существует единственное аналитическое решение.

Доказательство теоремы 2. Задача (27) — частный случай задачи (2), в котором $A = D = 1$, $B = C = 0$, следовательно,

$$H_{k,n-k} = (k+1-e_0)(n-k+1-h_0), \quad \Delta_{k,n-k} = 1,$$

т. е. при выполнении (28) условия (4) выполняются, а (6) нет.

Задача (27) имеет формальное решение с коэффициентами

$$u_{0,0} = v_{0,0} = 0, \quad u_{0,1} = v_{1,0} = 0, \quad u_{1,0} = \frac{1}{1-e_0} f_{0,0}, \quad v_{0,1} = \frac{1}{1-h_0} g_{0,0},$$
$$u_{0,n+1} = 0, \quad u_{k+1,n-k} = \sum_{i=0}^{k} \left(\prod_{j=i}^{k} \frac{j+1}{j+1-e_0} \right) f_{i,n-i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$
$$v_{n+1,0} = 0, \quad v_{n-k,k+1} = \sum_{i=0}^{k} \left(\prod_{j=i}^{k} \frac{j+1}{j+1-h_0} \right) g_{n-i,i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

При доказательстве сходимости рядов будет существенно использовано следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=k}^{n} \frac{i}{i-\varepsilon} \right) = \frac{n}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon \notin \mathbb{N}. \tag{29}$$

Равенство (29) доказывается индукцией по n.

Пусть

$$M_* = \max \left\{ \frac{1}{1-e_0}, \frac{1}{1-h_0} \right\}. \tag{30}$$

Из условия теоремы 2 (28) следует, что $M_* > 0$.

Коэффициенты мажорантного ряда строятся по формулам

$$W_0^* = 0, \quad W_1^* = M_* R_0^*, \ldots, W_{n+1}^* = M_*(n+1) R_n^*,$$

где

$$R_n^* = \left. \frac{d^n R^*}{dt^n} \right|_{t=W^*=0}, \quad R^* = \frac{M}{1-(t+2W^*)/\rho},$$

т. е. при решении такой задачи Коши

$$W_t^* = M_* \big(t R_t^* + R^* \big), \quad W^*(0) = 0.$$

С учетом формул

$$\begin{aligned} R_t^* &= \frac{M}{[1-(t+2W^*)/\rho]^2} \frac{1}{\rho} \big(1 + 2W_t^* \big) = \frac{R^*}{[1-(t+2W^*)/\rho]} \frac{1}{\rho} \big(1 + 2W_t^* \big) \\ &= \frac{R^*}{[\rho - (t+2W^*)]} \big(1 + 2W_t^* \big) = \frac{R^*}{[\rho - (t+2W^*)]} + \frac{2R^* W_t^*}{[\rho - (t+2W^*)]} \\ &\qquad = R^* G_4 + 2R^* G_4 W_t^*, \quad G_4 = 1/(\rho - (t+2W^*)), \end{aligned}$$

уравнение из последней задачи Коши в нормальной форме имеет вид

$$W_t^* = M_* \big(t R^* G_4 + 2t R^* G_4 W_t^* + R^* \big),$$

т. е.

$$(1 - 2M_* t R^* G_4) W_t^* = M_* R^* (1 + t G_4).$$

Поэтому последняя задача Коши для W^* имеет вид

$$W_t^* = \frac{M_* R^* (1 + t G_4)}{1 - 2M_* t R^* G_4}, \quad W^*(0) = 0. \tag{31}$$

Задача Коши (31) по теореме Коши имеет единственное аналитическое решение, мажорирующее нуль.

С другой стороны, из (29) и (30) следует, что $W^*_{n+1} > u_{k,n+1-k}$, $W^*_{n+1} > v_{n+1-k,k}$ при всех $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, т. е. функция $W^*(x+y, u+v)$ является мажорантой для функций u, v. Теорема 2 доказана.

Очевидно, что в формулировке теоремы 2 можно у слагаемого u_y взять знак минус, и новая задача также будет иметь единственное аналитическое решение.

Замечание. Справедливо равенство

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i-\varepsilon} = nB(1-\varepsilon, n),$$

где $B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ — бета-функция Эйлера.

Пример 1. Задача

$$\begin{gathered} u_x = u_y + e_0\frac{u}{x} + yv_y + xv_x + v + 1, \\ v_y = v_x + h_0\frac{v}{y} + xu_x + yu_y + u + 1, \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{gathered}$$

где $e_0 < 1$, $h_0 < 1$, имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в точке $(x,y) = (0,0)$.

Приведенный пример отличается от теоремы 2 тем, что в данном случае $f = yv_y + xv_x + v + 1$, $g = xu_x + yu_y + u + 1$. У рассматриваемой задачи существует формальное решение с коэффициентами

$$\begin{gathered} u_{0,0} = v_{0,0} = 0, \quad u_{0,1} = v_{1,0} = 0, \quad u_{1,0} = \frac{1}{1-e_0}, \quad v_{0,1} = \frac{1}{1-h_0}, \\ u_{0,n+1} = 0, \quad u_{k+1,n-k} = \sum_{i=0}^{k}\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{j+1}{j+1-e_0}\right)(n+1)v_{i,n-i}, \\ v_{n+1,0} = 0, \quad v_{n-k,k+1} = \sum_{i=0}^{k}\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{j+1}{j+1-h_0}\right)(n+1)u_{n-i,i}. \end{gathered} \tag{32}$$

Докажем, что ряды для $u(x,y), v(x,y)$ расходятся при $xy \neq 0$.

Индукцией по n легко показать, что $u_{0,n} = v_{n,0} = 0$, $u_{i,n-i} > 0$, $v_{n-i,i} > 0$ при $i = 1, \dots, n$. Из соотношений (32) следует, что значения $v_{n-k,k}$, $u_{k,n-k}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ возрастают по k, $0 \le k \le n$. Учитывая равенство (29) и то, что $e_0 < 1$, $h_0 < 1$, имеем

$$u_{n+1,0} > (n+1)M_*\sum_{i=0}^{n-1} v_{n-1,1} = (n+1)nM_*v_{n-1,1},$$

где константа $M_* > 0$ определена в доказательстве теоремы 2. С другой стороны, $v_{n-1,1} > nM_*u_{n-1,0}$. Таким образом, установлено, что

$$u_{n+1,0} > n^2(n+1)M_*^2 u_{n-1,0}.$$

Отсюда следует, что ряд для $u(x,y)$ расходится при $x \neq 0$. Аналогично устанавливается расходимость ряда $v(x,y)$ при $y \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леднёв Н. А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. Вып. 2. С. 205–266.

2. *Тешуков В. М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 2. С. 225–234.

3. *Блохин А. М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.

4. *Соболев С. Л.* Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Мат. сб. 1931. Т. 38, вып. 1–2. С. 107–147.

5. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006.

6. *Казаков А. Л.* Обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1041–1055.

Казаков Александр Леонидович
Институт динамики систем
и теории управления СО РАН
ул. Лермонтова, 134
664033 г. Иркутск
E-mail: kazakov@icc.ru

Статья поступила 24 апреля 2009 г.