Математические заметки

Том 84 выпуск 5 ноябрь 2008

УДК 515.142.22

Числа Лефшеца для отображений расслоенных пространств

Д. В. Артамонов

Приводятся формулы, выражающие числа Лефшеца отображений расслоенных пространств через числа Лефшеца отображений слоев и базы. Аналогичная задача рассматривается для чисел Лефшеца совпадений.

Библиография: 8 названий.

Зафиксируем с самого начала поле коэффициентов F, все группы когомологий будут браться с коэффициентами в этом поле. Элементы поля F будем называть числами.

Как известно, для эйлеровой характеристики верна следующая формула. Пусть имеется расслоение с постоянным пучком Лере такое, что когомологии тотального пространства E, базы X и слоя S конечномерны и равны нулю во всех размерностях, начиная с некоторой. Тогда верна формула для эйлеровых характеристик: $\chi(E) = \chi(X)\chi(S)$. Широко известный способ доказательства этой формулы заключается в рассмотрении спектральной последовательности Лере проекции $E \to X$ (см. следствие 9.1 в [1]).

Аналогичный результат имеет место для расслоений с локально постоянным пучком Лере, но при условии, что база – конечный CW-комплекс (см. замечание в пункте 2 главы 3 в [2]). Без этого условия данная формула, вообще говоря, может нарушаться, см. пример на с. 2 доклада Дуади в [3].

В этом примере пространство расслоения – факторпространство $S^\infty \times S^{2n}$, где S^∞ – подмножество векторов длины 1 в пространстве $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{i=1,\dots} \mathbb{R}$, по отношению к отождествлению (x, y) и $(-x, -y)$. С одной стороны, данное пространство расслоено над P^{2n} со слоем S^∞, так что когомологии X совпадают с когомологиями P^{2n}, поэтому $\chi(X) = 1$. С другой стороны, данное пространство расслоено над P^∞ со слоем S^{2n}, но $\chi(P^\infty) = 1$, $\chi(S^{2n}) = 2$, так что формула нарушается.

Сделаем некоторые замечания о пучке Лере. На протяжении всей работы мы будем предполагать, что этот пучок либо постоянный, либо локально постоянный. Последнее значит, что для каждой точки существует окрестность, ограничение пучка на которую постоянно. Функции же перехода, постоянные на пересечениях карт (см. § 7 в [4]), – линейные преобразования слоя, т.е. структурная группа есть $GL(V)$, где V – линейное пространство слоя. Отметим, что ограничение топологии пучка на

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00463).

© Д. В. Артамонов, 2008

слой дает на нем дискретную топологию. Для обычных векторных расслоений над достаточно хорошей базой структурная группа $GL(V)$ может быть редуцирована к ортогональной подгруппе (см. предложение 6.4 в [4]). Для пучков же аналогичное утверждение не имеет места. Подобно накрытиям локально постоянные пучки над односвязной базой тривиальны.

В работе [5] получено обобщение обсуждаемого результата. Рассматривается коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[d, "f"'] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X \end{tikzcd}$$

В данной диаграмме пространства E, X и слои $f^{-1}(x)$ – компактные конечномерные clc пространства. Причем X предполагается связным. Эти ограничения (они будут соблюдаться и в настоящей работе) обеспечивают конечномерность когомологий этих пространств с коэффициентами в F (см. [6; теорема 16.4 гл. 2]).

Для любой точки $x \in X$ определено число Лефшеца λ_x ограничения g на $f^{-1}(x)$. В предположении, что f имеет постоянный пучок Лере $\mathscr{H}^*(f)$, оно не зависит от точки x, поэтому определено число Лефшеца отображений слоев. В работе [5] для этого случая установлена формула $\lambda(g) = \lambda \cdot \chi(X)$, где $\lambda(g)$ – число Лефшеца отображения g. В частности, при $g = \mathrm{id}$ получается предыдущее соотношение $\chi(E) = \chi(f^{-1}(x))\chi(X)$. Доказательство соотношения $\lambda(g) = \lambda \cdot \chi(X)$ обобщает доказательство соотношения для эйлеровых характеристик с помощью спектральной последовательности Лере.

В данной работе с помощью спектральной последовательности Лере производятся некоторые дальнейшие обобщения обсуждаемых соотношений.

В первой части рассматривается коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[d, "f"'] \\ X \arrow[r, "g_1"'] & X \end{tikzcd}$$

в предположении, что пучок Лере $\mathscr{H}^*(f)$ постоянен. Хотя в данной ситуации слой над точкой x под действием g отображается в слой над точкой $g_1(x)$, но вследствие постоянства пучка Лере определено число Лефшеца λ отображения слоя $f^{-1}(x)$ в слой $f^{-1}(g_1(x))$. Данное число не зависит от x и имеет место формула: $\lambda(g) = \lambda \cdot \lambda(g_1)$ (теорема 1).

Во второй части при дополнительных ограничениях на пространства будет рассмотрена аналогичная задача при более общем предположении, что пучок $\mathscr{H}^*(f)$ локально постоянен.

В случае, когда $g_1 = \mathrm{id}$, будет доказано, что числа Лефщеца отображений слоев в себя равны одному и тому же числу λ. Для случая, когда база – конечный клеточный комплекс, будет установлено, что $\lambda(g) = \lambda \cdot \chi(X)$ (теорема 2).

Далее рассмотрен общий случай, когда $g_1 \neq \mathrm{id}$. В случае, когда пучок Лере $\mathscr{H}^*(f)$ локально постоянен, обобщения обсуждаемого соотношения с заменой $\chi(X)$

на $\lambda(g_1)$ не существует (см. п. 2). Однако в случае, когда база X – конечный клеточный комплекс, а отображение g_1 клеточно, для числа $\lambda(g)$ будет получено некоторое выражение при локально постоянном пучке Лере (предложение 3), следствием которого при постоянном пучке Лере окажется теорема 1, а при локально постоянном – также теорема 2.

В третьей части рассмотрим ситуацию с парами послойных отображений одного расслоения в другое:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g,h"] \arrow[d, "f"] & E' \arrow[d, "f'"'] \\ X \arrow[r, "g_1,h_1"'] & X' \end{tikzcd}$$

Здесь $g_1 f = f' g$ и $h_1 f = f' h$. Пространства X, X', E, E', а также все слои $f^{-1}(x)$, $f'^{-1}(x')$ предполагаются компактными ориентируемыми многообразиями, для которых $\dim X = \dim X' = n$, $\dim f^{-1}(x) = \dim f'^{-1}(x') = m$ для всех $x \in X$, $x' \in X'$, а отображения f, f' – имеющие постоянные пучки Лере $\mathscr{H}^*(f)$, $\mathscr{H}^*(f')$ (как пучки колец по отношению к когомологическому умножению). В этих условиях $\dim E = \dim E' = n + m$.

Вследствие постоянства пучков Лере, может быть определен аналог числа Лефшеца совпадений для отображений слоев $f^{-1}(x)$ в слои $f^{-1}(g_1(x))$ под действием g и в слои $f^{-1}(h_1(x))$ под действием h. Будет доказано, что это число не зависит от выбора точки x. Будем обозначать это число как Λ. В конечном итоге будет установлено соотношение $\Lambda(g,h) = \Lambda \cdot \Lambda(g_1,h_1)$ (теорема 3). Здесь $\Lambda(g,h)$, $\Lambda(g_1,h_1)$ – числа Лефшеца совпадений для пар отображения g, h и g_1, h_1 соответственно. Эти числа определяются следующим образом. Сначала определим отображение $\theta^q\colon H^q(E') \to H^q(E')$ как коппозицию $D_{E'}^{-1} h_* D_E g^*$. Здесь $D_E\colon H^q(E) \to H_{n+m-q}(E)$ – двойственность Пуанкаре на E, а $D_{E'}$ – двойственность Пуанкаре на E'. Учтя, что когомологии $H^q(E')$ конечномерны во всех размерностях, мы без труда определим следы $\operatorname{tr}\theta^q$. Определим $\Lambda(g,h)$ как $\sum_q (-1)^q \operatorname{tr}\theta^q$.

0. Предварительные замечания

Приведем описание некоторых типичных конструкций, используемых в основной части работы.

Пусть $f\colon E \to X$ и $f'\colon E' \to X'$ – отображения компактных конечномерных clc пространств, для которых пучки Лере локально постоянны. Пусть имеются также отображения $g\colon E \to E'$ и $g_1\colon X \to X'$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & E' \arrow[d, "f'"'] \\ X \arrow[r, "g_1"'] & X' \end{tikzcd}$$

Соответствующие спектральные последовательности Лере (см. теорему 6.1 главы 4 в [6]), сходящиеся к когомологиям пространств E, E', обозначим как $E_r^{p,q}$ и $E'^{p,q}_r$. При этом вторые члены этих последовательностей представляют из себя соответственно $E_2^{p,q} = H^p(X; \mathscr{H}^q(f))$ и $E'^{p,q}_2 = H^p(X'; \mathscr{H}^q(f'))$.

Имеется индуцированный g_1 когомоморфизм $g'\colon \mathscr{H}^*(f') \to \mathscr{H}^*(f)$ такой, что на слоях он совпадает с гомоморфизмами, индуцированными ограничениями на них g, т.е. с ограничениями g^*: $\mathscr{H}^*(f')_{g_1(x)} = H^*(f'^{-1}(g_1(x))) \to_{g^*} H^*(f^{-1}(x)) = \mathscr{H}^*(f)_x$ (см. п. 3.5 и 4.3 в главе 4 в [6]).

Имеется отображение когомологий $g^*\colon H^*(E') \to H^*(E)$. Имеется также отображение спектральных последовательностей такое, что отображение члена E_∞ согласовано с представленным выше отображением g^* (см. п. 6.2 главы 4 в [6]). Будем говорить, что отображение спектральных последовательностей индуцировано отображениями g, g_1.

При этом отображение вторых членов $H^p(X', \mathscr{H}^*(f')) \to H^p(X, \mathscr{H}^*(f))$ есть отображение когомологий, индуцированное непрерывным отображением g_1 и когомоморфизмом g' (см. п. 6.2 в главе 4 в [6]).

Как всякий когомоморфизм, g' разлагается в композицию $g' = h_2 h_1$, где h_1 есть когомоморфизм в обратный образ $\mathscr{H}^*(f') \to g_1^*\mathscr{H}^*(f')$, а h_2 есть гомоморфизм из $g_1^*\mathscr{H}^*(f')$ в $\mathscr{H}^*(f)$ (§ 4 главы 1 в [6]). В соответствии со сказанным разложением когомоморфизма гомоморфизм $H^p(X', \mathscr{H}^*(f')) \to H^p(X, \mathscr{H}^*(f))$ разлагается в композицию гомоморфизма $H^p(X', \mathscr{H}^*(f')) \to H^p(X, g_1^*\mathscr{H}^*(f'))$, индуцированного с помощью h_1, и гомоморфизма $H^p(X, g_1^*\mathscr{H}^*(f')) \to H^p(X, \mathscr{H}^*(f))$, индуцированного с помощью h_2.

Так как пучки Лере локально постоянны, пучок $g_1^*\mathscr{H}^*(f')$ также локально постоянен. При этом h_1 отображает слой $\mathscr{H}^*(f')_{g_1(x)}$ в слой $g_1^*\mathscr{H}^*(f)_x$ изоморфно. Гомоморфизм же h_2 из $g_1^*\mathscr{H}^*(f)$ в $\mathscr{H}^*(f)$ одинаково действует на слоях, так как он есть гомоморфизм локально постоянных пучков.

Наконец предположим, что $E = E'$, $X = X'$, $f = f'$. Тогда определено число Лефшеца отображения g. Пространства $E_2^{p,q}$ конечномерны, поэтому, так как $E_r = H(E_{r-1})$, конечномерны все пространства $E_r^{p,q}$, где $r = 2, \dots, \infty$, и можно говорить о числах Лефшеца λ_r индуцированного с помощью g отображения градуированного пространства E_r в себя. Как обычно, под числом Лефшеца отображения в себя двойного комплекса $\{K^{p,q}\}$ мы понимаем число Лефшеца отображения в себя комплекса $\{K^n = \Sigma_{p+q=n} K^{p,q}\}$.

Установим равенство $\lambda_2 = \lambda(g)$. Так как $E_r = H(E_{r-1})$, то $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ (теорема Лефшеца). В силу конечномерности базы и слоев только конечное число групп $E_2^{p,q}$, а следовательно, и групп $E_n^{p,q}$, отлично от нуля. Поэтому существует N такое, что $E_r = E_\infty$ для $r > N$. Следовательно, $\lambda_2 = \lambda_\infty$.

Покажем, что $\lambda_\infty = \lambda(g)$. Это имеет место в силу равенства $E_\infty^n = H^n(E)$, которое следует из того, что $E_\infty^{p,q}$ есть градуированная группа, ассоциированная с некоторой фильтрацией в $H^n(E)$. Но так как мы имеем дело с векторными пространствами, то $H^n(E)$ восстанавливается как $H^n(E) = \sum_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$. Тем самым, $E_\infty^n = H^n(E)$ и $\lambda_2 = \lambda_\infty = \lambda(g)$.

1. Случай постоянного пучка Лере $\mathscr{H}^*(f)$

Рассматриваем ситуацию, когда $E = E'$, $X = X', f = f'$ и пучок Лере постоянен. Определим число λ, которое можно интерпретировать как число Лефшеца отображений слоев.

Возьмем произвольную точку $x \in X$. Как известно, в рассматриваемых условиях слой $\mathscr{H}^*(f)_x$ изоморфен $H^*(f^{-1}(x))$ (см. предложение 4.2 главы 4 в [6]). Под действием g слой $f^{-1}(x)$ отображается в слой $f^{-1}(g_1(x))$, значит, имеется отображение когомологий: $g_1^*\colon H^*(f^{-1}(g_1(x))) \to H^*(f^{-1}(x))$. В силу постоянства пучка $\mathscr{H}^*(f)$ имеется канонический изоморфизм когомологий $H^*(f^{-1}(x)) \simeq H^*(f^{-1}(g_1(x)))$, поэтому определено отображение $H^*(f^{-1}(x)) \to H^*(f^{-1}(x))$. Число Лефшеца этого отображения обозначим как λ_x.

Предложение 1. *Число λ_x не зависит от x.*

Доказательство. Так как пучок Лере $\mathscr{H}^*(f)$ постоянен, постоянен и пучок $g_1^*\mathscr{H}^*(f)$.

Возьмем точки x, y. Из предыдущих рассуждений и постоянства пучков Лере следует, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
H^*(f^{-1}(x)) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] & H^*(f^{-1}(y)) \arrow[d, "\simeq"'] \\
H^*(f^{-1}(g_1(x))) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, "g^*"] & H^*(f^{-1}(g_1(y))) \arrow[d, "g^*"'] \\
H^*(f^{-1}(x)) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"'] & H^*(f^{-1}(y))
\end{tikzcd}$$

При этом горизонтальные стрелки – канонические изоморфизмы между слоями постоянного пучка. Из данной диаграммы и из определений чисел λ_x и λ_y следует, что они равны.

Обозначим λ не зависящее от x число λ_x. Оно может быть интерпретировано как число Лефшеца отображения слоя над точкой x в слой над точкой $g_1(x)$.

Обозначим как k^* отображение (постоянного) слоя $\mathscr{H}^*(f)$, индуцированное g.

Нашей целью является доказательство утверждения.

Теорема 1. *В случае, когда $E = E'$, $X = X'$, $f = f'$ и пучок Лере постоянен, верно равенство $\lambda(g) = \lambda \cdot \lambda(g_1)$.*

Доказательство. Рассмотрим сходящуюся к когомологиям E спектральную последовательность Лере отображения $f\colon E \to X$ и действие этого отображения на ее второй член $E_2^{p,q} = H^p(X; \mathscr{H}^q(f))$. Разложением когомоморфизма g' в композицию $\mathscr{H}^q(f) \to^{h_1} g_1^*\mathscr{H}^q(f) \to^{h_2} \mathscr{H}^q(f)$ определяется композиция $H^p(X; \mathscr{H}^q(f)) \to_{h_1'} H^p(X; g_1^*\mathscr{H}^q(f)) \to_{h_2'} H^p(X; \mathscr{H}^q(f))$ (см. § 8 главы 2 в [6]).

Как и $\mathscr{H}^q(f)$, пучок $g_1^*\mathscr{H}^q(f)$ постоянен и имеет те же слои, поэтому $\mathscr{H}^q(f) = g_1^*\mathscr{H}^q(f)$.

В силу определений h_1 и h_2 отображение h_1' есть

$$g_1^*\colon H^p(X; \mathscr{H}^q(f)) \to H^p(X; \mathscr{H}^q(f))$$

(индуцировано отображением g_1), а h_2' есть отображение $H^p(X; \mathscr{H}^q(f))$ в себя, индуцированное отображениями слоев посредством k^q.

Так как пучок Лере постоянен, а его слои – векторные пространства, то выполнено $H^p(X; \mathscr{H}^q(f)) = H^p(X) \otimes \mathscr{H}^q(f)$. Обозначим как $\theta^{p,q}$ отображение $H^p(X) \otimes$

$\mathscr{H}^q(f) \to H^p(X) \otimes \mathscr{H}^q(f)$, совпадающее с гомоморфизмом $E_2^{p,q}$ в себя, индуцированным g. Как было показано, $\theta^{p,q} = \theta^p \otimes k^q$, где θ^p – отображение $H^p(X) \to H^p(X)$, индуцированное g_1.

Пусть λ_2 – число Лефшеца отображения $E_2^{p,q}$ в себя, индуцированного отображением g (имеется в виду число Лефшеца отображения градуированного векторного пространства E_2^* в себя, в котором $E_2^n = \sum_{p+q=n} E_2^{p,q}$). Имеем

$$\lambda_2 = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}\Big(\bigoplus_{p+q=n} \theta^{p,q}\Big) = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}\Big(\bigoplus_{p+q=n} \theta^p \otimes k^q\Big)$$
$$= \sum_n (-1)^n \sum_{p+q=n} \operatorname{tr}\theta^p \otimes k^q = \sum_p (-1)^p \operatorname{tr}\theta^p \sum_q (-1)^q \operatorname{tr} k^q = \lambda(g_1)\lambda.$$

Тем самым, $\lambda_2 = \lambda(g_1)\lambda$.

В п. 0 было установлено, что $\lambda_2 = \lambda(g)$. Значит, имеет место формула $\lambda(g) = \lambda \cdot \lambda(g_1)$.

2. Случай, когда пучок Лере локально постояненен

2.1. В этом пункте предполагается, что градуированный пучок $\mathscr{H}^*(f)$ локально постоянен. Имеется в виду, что у каждой точки существует окрестность, ограничения на которую всех пучков $\mathscr{H}^q(f)$ постоянны. Так как пространство E конечномерно, достаточно потребовать локального постоянства каждого отдельного пучка $\mathscr{H}^q(f)$. Сначала рассмотрим ситуацию, когда $g_1 = \mathrm{id}$.

Как и в предыдущем пункте, сперва определим число λ. Пусть λ_x – число Лефшеца отображения слоя $f^{-1}(x)$ в себя под действием отображения g.

Предложение 2. *Число λ_x не зависит от x.*

Доказательство. Имеется отображение $X \to F$, относящее точке x число λ_x. Это отображение локально постоянно. В самом деле, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "g|_{f^{-1}(U)}"] \arrow[d, "f|_{f^{-1}(U)}"] & f^{-1}(U) \arrow[d, "f|_{f^{-1}(U)}"] \\ U \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & U \end{tikzcd}$$

Для малых областей U пучок Лере $\mathscr{H}^*(f)|_U = \mathscr{H}^*(f|_{f^{-1}(U)})$ постоянен, и мы можем применить предложение 1. Из него следует, что для всех точек из U числа Лефщеца отображений слоев совпадают, что и означает локальную постоянность функции λ_x, а следовательно, и ее постоянность на связном пространстве X.

Пусть λ – не зависящее от x число λ_x

Теорема 2. *При условии, что пучок $\mathscr{H}^*(f)$ локально постоянен, X – конечный CW-комплекс, а $g_1 = \mathrm{id}$, имеет место формула: $\lambda(g) = \lambda \cdot \chi(X)$. Здесь λ – число Лефшеца отображений слоев.*

Доказательство. Как показывает упомянутый во введении пример Дуади, ограничение конечности на комплекс X существенно.

Воспользуемся равенством $\lambda(g) = \lambda_2$, где λ_2 – число Лефшеца отображения в себя двойного комплекса $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{H}^q(f))$ (см. п. 0).

Имеется конечнопорожденная группа клеточных коцепей $C^p(X; \mathscr{H}^q(f))$ (считаем клетки достаточно мелкими, чтобы ограничения на них пучков $\mathscr{H}^q(f)$ были постоянными). Имеется отображение коцепей

$$g^* \colon C^p(X; \mathscr{H}^q(f)) \to C^p(X; \mathscr{H}^q(f)).$$

Его число Лефшеца совпадает с $\lambda(g) = \lambda_2$.

Пусть U, V – подкомплексы в X. Пусть g_U – отображение $f^{-1}(U)$ в себя, индуцированное g. Тогда верно равенство $\lambda(g_{U\cup V}) = \lambda(g_U) + \lambda(g_V) - \lambda(g_{U\cap V})$ и аналогичное – для эйлеровых характеристик: $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$. Это следует из точной последовательности комплексов клеточных коцепей и совпадения чисел Лефшеца, определяемых коцепями и когомологиями

$$0 \to C^*(U \cup V; \mathscr{H}^*(f)) \to C^*(U; \mathscr{H}^*(f)) \oplus C^*(V; \mathscr{H}^*(f)) \to C^*(U \cap V; \mathscr{H}^*(f)) \to 0.$$

В силу приведенных равенств соотношение $\lambda(g) = \lambda \cdot \chi(X)$, справедливое для $A = U, V, U \cap V$, справедливо и для $A = U \cup V$, пользуясь этим и представлением X объединением конечного числа клеток, с помощью индукции получаем искомое соотношение для всего X.

2.2. Далее рассмотрим случай, когда $g_1 \neq \mathrm{id}$ (X – конечный CW-комплекс).

Отметим прежде всего, что числа λ_x для различных точек x в этом случае могут отличаться, поэтому аналога теоремы 1 не существует. Это подтверждается на следующем примере.

Пусть E – бутылка Клейна, X – окружность. Представим E в виде единичного квадрата на плоскости Oxy, у которого вертикальные стороны склеены с сохранением ориентации, а горизонтальные – с обращением ориентации. Рассмотрим вертикальный отрезок $x = 1/2$; при склейке он перейдет в окружность, это и будет X. Рассмотрим горизонтальный отрезок $y = a$, где $a \in [0, 1]$. При склейке он также перейдет в‘окружность S^1_a. Отображение f будет устроено так: окружность S^1_a оно переводит в точку ее пересечения с окружностью X. На квадрате это точка $(1/2, a)$.

Пусть g есть отображение, заданное симметрией квадрата относительно прямой $y = 1/2$. Это отображение послойное, в X имеются две неподвижные точки: одна – x_1 – отвечает точке квадрата $(1/2, 1/2)$, другая – x_2 – паре точек квадрата $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$. Слой $S^1_{x_1}$ над первой точкой отображается в себя неподвижно, слой $S^1_{x_2}$ – посредством гомеоморфизма, обращающего ориентацию. При этом само отображение g_1 есть также гомеоморфизм X, обращающий ориентацию.

Получаем, что число Лефщеца отображения в себя слоя $S^1_{x_1}$ равно 0, число Лефщеца отображения в себя слоя $S^1_{x_2}$ равно 2. Таким образом, прямого аналога теоремы 1 нет.

До конца этого пункта $g_1 \colon X \to X$ – клеточное отображение конечного CW-комплекса X. Пусть, кроме того, клетки X настолько малы, что ограничения пучков $\mathscr{H}^*(f)|_{g_1(\Delta)}$, $\mathscr{H}^*(f)|_\Delta$ постоянны для всех клеток Δ клеточного комплекса X.

При этих условиях для $\lambda(g)$ выведем некоторое соотношение, имеющее своим следствием (в случае постоянного $\mathscr{H}^*(f)$) формулу из теоремы 1.

Занумеруем индексом i все клетки X, вне зависимости от их размерности. Клетки будем обозначать как Δ_i^p, где верхний индекс означает размерность. Множество индексов, отвечающих p-мерным клеткам, обозначим как I_p.

Сначала определим число σ_i^p. Имеется индуцированное g отображение клеточных коцепей $g^*\colon C^p(X) \to C^p(X)$. Имеется коцепь $(\Delta_i^p, 1)$, принимающая значение 1 на клетке Δ_i^p и нуль на остальных клетках. Всевозможные коцепи вида $(\Delta_i^p, 1)$, где $i \in I_p$, образуют базис $C^p(X)$. Пусть $g_1^*(\Delta_i^p, 1) = \sum_{i'} \varphi_{i,i'}(\Delta_{i'}^p, 1)$. Положим $\sigma_i^p = \varphi_{i,i}$. Заметим, что если $\Delta_i^p \not\subseteq g_1(\Delta_i^p)$, то $\sigma_i^p = 0$.

Иначе говоря, σ_i^p есть алгебраическая кратность, с которой Δ_i^p себя накрывает.

Определим теперь числа λ^i. Пусть i таково, что $\Delta_i^p \subset g_1(\Delta_i^p)$. Пусть $x \in \Delta_i^p$. Так как $\Delta_i^p \subset g_1(\Delta_i^p)$ и так как ограничение пучка $\mathscr{H}^*(f)$ на $g_1(\Delta_i^p)$ постоянно, мы можем канонически отождествить когомологии слоев $f^{-1}(x)$ и $f^{-1}(g_1(x))$. Поэтому определено число Лефшеца $\lambda^{i,x}$ отображения слоя $f^{-1}(x)$ в слой $f^{-1}(g_1(x))$. Проверим, что оно не зависит от x. Возьмем другую точку $y \in \Delta_i^p$. Имеется когоморфизм $g'\colon \mathscr{H}^*(f) \to \mathscr{H}^*(f)$ и его ограничение $\mathscr{H}^*(f)|_{g_1(\Delta_i^p)} \to \mathscr{H}^*(f)|_{\Delta_i^p}$. Так как пучки постоянны, все слои отображаются одинаково. Значит имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H^*(f^{-1}(x)) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, "g^*"] & H^*(f^{-1}(y)) \arrow[d, "g^*"'] \\
H^*(f^{-1}(x)) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"'] & H^*(f^{-1}(y))
\end{tikzcd}$$

Тем самым, числа Лефщеца вертикальных отображений равны. Обозначим это число как λ^i. Считаем, что $\lambda^i = 0$, если Δ_i^p не содержится в $g_1(\Delta_i^p)$.

Предложение 3. *В рассматриваемых условиях верна формула*

$$\lambda(g) = \sum_p (-1)^p \sum_{i \in I_p} \lambda^i \sigma_i^p.$$

При этом σ_i^p есть алгебраическая кратность, с которой клетка Δ_i^p накрывает себя посредством g_1, а λ^i есть число Лефшеца отображения в себя слоя над клеткой Δ_i^p.

Доказательство. Как показано в п. 0, имеет место равенство $\lambda(g) = \lambda_2$, где λ_2 – число Лефшеца отображения в себя двойного комплекса

$$\bigoplus_{p,q} H^p(X; \mathscr{H}^q(f)) = \bigoplus_{p,q} E_2^{p,q} = E_2^*.$$

Имеет место равенство λ_2 числу Лефшеца для отображения в себя двойного комплекса клеточных коцепей $\bigoplus_{p,q} C^p(X, \mathscr{H}^q(f))$ (теорема Лефшеца). Рассмотрим это подробнее. Для каждой p-мерной клетки $\Delta_i^p \subset X$ зафиксируем тривиализацию – изоморфизм пучков $\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p}$ и $\Delta_i^p \times V^q$, где V^q – некоторое конечномерное векторное пространство.

Пусть элементы $\{e_j^q, j = 1, \dots, l_q\}$ образуют базис V^q. Базисом векторного пространства $C^p(X, \mathscr{H}^q(f))$ являются пары (Δ_i^p, e_j^q), которые определяются следующим образом. При фиксированной тривиализации $\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p}$ элементы e_j^q будут сечениями $\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p}$. Пара (Δ_i^p, e_j^q) определяется как коцепь, относящая симплексу Δ_i^p сечение e_j^q. Ясно, что $C^p(X, \mathscr{H}^q(f)) \simeq C^p(X, V^q)$ (но только как векторные пространства, а не как комплексы).

Теперь рассмотрим след отображения $C^p(X;\mathscr{H}^q(f)) \to C^p(X;\mathscr{H}^q(f))$ под действием g^*. Запишем $g^*(\Delta_i^p, e_j^q) = \sum_{i',j'} \alpha^{p,q}_{(i,j),(i',j')}(\Delta_{i'}^p, e_{j'}^q)$. Для определения числа Лефшеца необходимо вычислить след отображения

$$g^n\colon \bigoplus_{p+q=n} C^p(X;\mathscr{H}^q(f)) \to \bigoplus_{p+q=n} C^p(X;\mathscr{H}^q(f)).$$

Но этот след записывается как $\operatorname{tr} g^n = \sum_{p+q=n}\sum_{i,j} \alpha^{p,q}_{(i,j),(i,j)}$.

Для отличного от нуля $\alpha^{p,q}_{(i,j),(i,j)}$, как это следует из определения отображения коцепей, $\Delta_i^p \subset g_1(\Delta_i^p)$. Найдем коэффициенты $\alpha^{p,q}_{(i,j),(i,j')}$.

Для этих подкомплексов имеется отображение коцепей

$$C^p(g_1(\Delta_i^p);\mathscr{H}^q(f)|_{g_1(\Delta_i^p)}) \to C^p(\Delta_i^p;\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p}).$$

Это отображение индуцировано отображением g_1 и когомоморфизмом пучков g'. Кроме того, участвующие ограничения пучков постоянны.

Фиксированную тривиализацию над Δ_i^p распространим до тривиализации над $g_1(\Delta_i^p)$. Этим будут фиксированы изоморфизмы

$$C^p(g_1(\Delta_i^p);\mathscr{H}^q(f)|_{g_1(\Delta_i^p)}) = C^p(g_1(\Delta_i^p)) \otimes V^q,$$
$$C^p(\Delta_i^p;\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p}) = C^p(\Delta_i^p) \otimes V^q.$$

При этом вышеуказанное отображение коцепей будет совпадать с отображением

$$g_1^* \otimes k^q\colon C^p(g_1(\Delta_i^p)) \otimes V^q \to C^p(\Delta_i^p) \otimes V^q,$$

где k^q есть отображение $V^q \simeq H^q(f^{-1}(g_1(x))) \to_{g^*} H^q(f^{-1}(x)) \simeq V^q$. Пусть при отображении k^q элемент e_j^q переходит в элемент $\sum_{j'} \beta^q_{i,j,j'} e_{j'}^q$. В силу определений получается равенство $\sum_q (-1)^q \sum_{j=1,\dots,l_q} \beta^q_{i,j,j} = \lambda^i$.

Так как $\Delta_i^p \subset g_1(\Delta_i^p)$, в пространстве $C^p(g_1(\Delta_i^p);\mathscr{H}^q(f)|_{g_1(\Delta_i^p)})$ имеется элемент (Δ_i^p, e_j^q). При описанном отображении он переходит в элемент $\sigma_i \sum_{j'} \beta^q_{i,j,j'}(\Delta_i^p, e_{j'}^q)$.

Проверим, что $\alpha^{p,q}_{(i,i)(i,j')} = \sigma_i \beta^q_{i,j,j'}$. Действительно, ограничивая коцепи, мы получаем проекции

$$\pi_1\colon C^p(X;\mathscr{H}^q(f)) \to C^p(g_1(\Delta_i^p);\mathscr{H}^q(f)|_{g_1(\Delta_i^p)}),$$
$$\pi_2\colon C^p(X;\mathscr{H}^q(f)) \to C^p(\Delta_i^p;\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p}).$$

Проекции коммутируют с отображением, индуцированным g. Для фиксированного i пространство $C^p(\Delta_i^p;\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p})$ есть подпространство $C^p(X;\mathscr{H}^q(f))$, порожденное элементами $(\Delta_i^p, e_{j'}^q)$ для всевозможных j'.

К равенству $g^*(\Delta_i^p, e_j^q) = \sum_{i',j'} \alpha^{p,q}_{(i,j),(i',j')}(\Delta_{i'}^p, e_{j'}^q)$ в $C^p(X;\mathscr{H}^q(f))$ применим оператор π_2; получим равенство $\pi_2 g^*(\Delta_i^p, e_j^q) = \sum_{j'} \alpha^{p,q}_{(i,j),(i,j')}(\Delta_i^p, e_{j'}^q)$. Но $\pi_2 g^*(\Delta_i^p, e_j^q) = g^*\pi_1(\Delta_i^p, e_j^q) = g^*(\Delta_i^p, e_j^q)$, где в последнем случае коцепь (Δ_i^p, e_j^q) рассмотрена как элемент $C^p(g_1(\Delta_i^p);\mathscr{H}^q(f)|_{g_1(\Delta_i^p)})$. Значит, для отображения $C^p(g_1(\Delta_i^p);\mathscr{H}^q(f)|_{g_1(\Delta_i^p)}) \to C^p(\Delta_i^p;\mathscr{H}^q(f)|_{\Delta_i^p})$ верно равенство $g^*(\Delta_i^p, e_j^q) = \sum_{j'} \alpha^{p,q}_{(i,j),(i,j')}(\Delta_i^p, e_{j'}^q)$. Отсюда следует, что $\alpha^{p,q}_{(i,i)(i,j')} = \sigma_i^p \beta^q_{i,j,j'}$.

Теперь вычислим $\lambda(g)$. Пусть I_p^1 – множество индексов всех p-мерных клеток, накрывающих себя.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\lambda(g) &= \sum_n (-1)^n \operatorname{tr} g^n = \sum_n (-1)^n \sum_{p+q=n} \sum_{i\in I_p^1, j} \alpha^{p,q}_{(i,j),(i,j)} \\ &= \sum_n \sum_{p+q=n} (-1)^{p+q} \sum_{i\in I_p^1, j} \sigma_i^p \beta^q_{i,j,j} = \sum_p (-1)^p \sum_{i\in I_p^1} \sigma_i^p \sum_q (-1)^q \sum_j \beta^q_{i,j,j} \\ &= \sum_p (-1)^p \sum_{i\in I_p^1} \sigma_i^p \lambda^i.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\sigma_i^p = 0$ при $\Delta_i^p \not\subseteq g_1(\Delta_i^p)$, можно распространить суммирование по всем i и заменить I_p^1 на I_p.

Итак, $\lambda(g) = \sum_p (-1)^p \sum_{i\in I_p} \lambda_i \sigma_i^p$. Имеем также $\lambda(g_1) = \sum_p (-1)^p \sum_{i\in I_p} \sigma_i^p$. В случае постоянного пучка Лере все числа λ^i равны одному числу λ (предложение 1) и из полученной формулы следует соотношение из теоремы 1.

В случае же, когда $g_1 = \mathrm{id}$ и $\lambda^i = \lambda$ для всех i (см. предложение 2), полученная формула дает соотношение из теоремы 2.

3. Формула для чисел Лефшеца совпадений

Пусть имеется двойная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g,h"] \arrow[d, "f"] & E' \arrow[d, "f'"'] \\ X \arrow[r, "g_1,h_1"'] & X' \end{tikzcd}$$

в которой $g_1 f = f' g$ и $h_1 f = f' h$. В этой диаграмме пространства X, X', E, E', а также слои $f^{-1}(x)$, $f'^{-1}(x')$, для всех $x \in X$, $x' \in X'$ предполагаются компактными ориентируемыми многообразиями, для которых $\dim X = \dim X' = n$, $\dim f^{-1}(x) = \dim f'^{-1}(x') = m$. Предполагаем, что пучки Лере $\mathscr{H}^*(f)$, $\mathscr{H}^*(f')$ постоянны как пучки колец (с обычным когомологическим умножением). Следствием спектральной последовательности Лере в этих условиях оказывается, что $\dim E = \dim E' = n + m$.

Прежде всего, как и в части 1, определим число Λ, которое можно интерпретировать как “число Лефшеца совпадений для отображений слоев”.

Имеется g_1-когомоморфизм $g' \colon \mathscr{H}^*(f') \to \mathscr{H}^*(f)$, отображение слоев при котором есть отображение $H^*(f'^{-1}(g_1(x))) \to H^*(f^{-1}(x))$, индуцированное g (см. содержание п. 0).

Для каждого $x \in X$ имеется изоморфизм $H_*(f^{-1}(x)) = \operatorname{Hom}_F(H^*(f^{-1}(x)), F)$. Определим пучок $\mathscr{H}_*(f)$ как пучок $\operatorname{Hom}_F(\mathscr{H}^*(f), F)$ (см. п. 1.7 главы 2 в [7]). Это будет постоянный пучок со слоем $\mathscr{H}_*(f)_x = H_*(f^{-1}(x))$.

Покажем, что имеется изоморфизм пучков $D : \mathscr{H}^*(f) = \mathscr{H}_{m-*}(f)$, являющийся на слоях двойственностью Пуанкаре в слоях: $H_{m-*}(f^{-1}(x)) = H^*(f^{-1}(x))$. Определяется он следующим образом.

Имеется глобальное сечение μ пучка $\mathscr{H}_m(f)$ такое, что для каждой точки x оно ограничивается в фундаментальный класс гомологий μ_x многообразия $f^{-1}(x)$. Сопоставим элементу $a_x \in H^*(f^{-1}(x))$ элемент $a_x \frown \mu_x$ в $H_{m-*}(f^{-1}(x))$. Эти отображения слоев дают нам некоторое отображение $D\colon \mathscr{H}^*(f) \to \mathscr{H}_{m-*}(f)$ пучков, которое на слоях есть двойственность Пуанкаре. В соответствии с определением D биективно. Так как пучки постоянны, для доказательства непрерывности достаточно проверить, что образ под действием D глобального сечения – глобальное сечение.

Пусть a – глобальное сечение $\mathscr{H}^*(f)$. Его образ Da представляет из себя некоторое сечение $\mathscr{H}_{m-*}(f) = \mathrm{Hom}_F(\mathscr{H}^{m-*}(f), F)$. Проверим, что оно непрерывно. Так как пучки $\mathscr{H}^{m-*}(f)$, F постоянны, то Da есть некоторое послойное отображение $\mathscr{H}^{m-*}(f) \to F$ (здесь F – постоянный пучок). Если Da окажется непрерывным отображением $\mathscr{H}^{m-*}(f) \to F$, то (по самому определению пучка Hom_F) оно будет представлять из себя непрерывное глобальное сечение $\mathscr{H}_{m-*}(f)$. В свою очередь, Da непрерывно, если для каждого непрерывного глобального сечения b пучка $\mathscr{H}^{m-*}(f)$ сечение постоянного пучка F, служащего образом b при отображении $Da\colon \mathscr{H}^{m-*}(f) \to F$ непрерывно.

Пусть b – глобальное сечение $\mathscr{H}^{m-*}(f)$. Сечение $Da(b)$ постоянного пучка F определяется как $x \mapsto (a_x \frown \mu_x)(b_x) = (a_x \frown \mu_x) \frown b_x = \mu_x(a_x \smile b_x)$ (ср. соотношение (8) в § 10 главы 5 в [6]). Оно непрерывно. Действительно, для постоянных (вместе с умножением) пучков Лере операция умножения непрерывна, а μ – непрерывное отображение из $\mathscr{H}^m(f)$ в F. Следовательно, Da – глобальное непрерывное сечение $\mathscr{H}_{m-*}(f)$. Значит, D непрерывно.

Аналогично определяется пучок $\mathscr{H}_*(f')$ на X' и изоморфизм между $\mathscr{H}_*(f')$ и $\mathscr{H}^{m-*}(f')$.

Рассмотрим отображение (сначала как множеств) $h'\colon \mathscr{H}_*(f) \to \mathscr{H}_*(f')$, переводящее слой над точкой x в слой над точкой $h_1(x)$, и совпадающее на слоях с отображениями $h^x_*\colon H_*(f^{-1}(x)) \to H_*(f'^{-1}(h_1(x)))$. Это отображение непрерывно.

В самом деле, слои постоянных пучков $\mathscr{H}_*(f)$, $\mathscr{H}_*(f')$ дуальны соответствующим слоям постоянных пучков $\mathscr{H}^*(f)$, $\mathscr{H}^*(f')$, и соответственно отображения h^x_* – отображениям h^*_x, одинаковым для всех $x \in X$ в представлении $\mathscr{H}^*(f)$, $\mathscr{H}^*(f')$ как декартовых произведений базы и слоя. Поэтому аналогичным качеством по отношению к структурам декартовых произведений на $\mathscr{H}_*(f)$, $\mathscr{H}_*(f')$ обладают и отображения h^*_x, т.е. они являются ограничениями на слои непрерывного отображения $\mathscr{H}_*(f) \to \mathscr{H}_*(f')$. Также имеется упомянутый в п. 0 когомоморфизм $g'\colon \mathscr{H}^*(f') \to \mathscr{H}^*(f)$.

Таким образом, имеется композиция непрерывных послойных гомоморфных на слоях отображений $\mathscr{H}^*(f') \to_{g'} \mathscr{H}^*(f) =_D \mathscr{H}_{m-*}(f) \to_{h'} \mathscr{H}_{m-*}(f) =_{D^{-1}} \mathscr{H}^*(f')$, дающая непрерывное послойное гомоморфное на слоях отображение $\mathscr{H}^*(f')$ в себя. При этом слой над точкой $g_1(x)$ отображается в слой над точкой $h_1(x)$. В силу постоянства $\mathscr{H}^*(f')$ все слои отображаются одинаково, поэтому определено число Лефшеца Λ_x отображения слоя над точкой $g_1(x)$ в слой над точкой $h_1(x)$. При этом (ср. предложение 2), так как все слои отображаются одинаково, число Λ_x не зависит от x. Обозначим это число как Λ.

Теорема 3. *Имеет место равенство* $\Lambda(g,h) = \Lambda \cdot \Lambda(g_1,h_1)$.

Доказательство. Обозначим члены спектральной последовательности Лере отображения $E \to X$ как $E^{p,q}_r$, а отображения $E' \to X'$ – как $E'^{p,q}_r$.

Имеется отображение спектральных последовательностей, во втором члене равное $E'^{p,q}_2 = H^p(X'; \mathscr{H}^q(f')) \to_{g^*} E^{p,q}_2 = H^p(X; \mathscr{H}^q(f))$, в пределе дающее отображение, согласованное с отображением $g^*\colon H^{p+q}(E) \to H^{p+q}(E)$ (см. п. 0).

Имеется аналогичное отображение спектральных последовательностей для h:

$$E'^{p,q}_2 = H^p(X'; \mathscr{H}^q(f')) \to_{h^*} E^{p,q}_2 = H^p(X; \mathscr{H}^q(f)),$$

дающее в переделе $h^*\colon H^{p+q}(E) \to H^{p+q}(E)$.

Пусть слой пучка $\mathscr{H}^q(f)$ есть V^q, а $\mathscr{H}^q(f')$ – V'^q. Как было установлено в п. 0, отображения $g^*\colon E'^{p,q}_2 \to_{g^*} E^{p,q}_2$ есть композиция отображения $H^p(X'; V'^q) \to H^p(X; V'^q)$ под действием g_1^* и отображения $H^p(X; V'^q) \to H^p(X; V^q)$ под действием отображения $k_g^q\colon V'^q \to V^q$, которое определялось как индуцированное g отображение

$$V'^q = H^q(f'^{-1}(g_1(x))) \to_{g^*} H^q(f^{-1}(x)) = V^q.$$

Иными словами, если мы представим $E'^{p,q}_2$ как $H^p(X') \otimes V'^q$, а $E^{p,q}_2$ – как $H^p(X) \otimes V^q$, то отображение $E'^{p,q}_2 \to_{g_1} E^{p,q}_2$ есть тензорное произведение отображений g_1^* и k_g^q.

Отображения $h^*\colon E'^{p,q}_2 \to_{h_1} E^{p,q}_2$ – также композиции отображений $H^p(X'; V'^q) \to H^p(X; V'^q)$ под действием h_1^* и отображений $H^p(X; V'^q) \to H^p(XV^q)$ под действием коэффициентных отображений $k_h^q\colon V'^q \to V^q$, которые определялись как отображения

$$V'^q = H^q(f'^{-1}(h_1(x))) \to H^q(f^{-1}(x)) = V^q,$$

индуцированные h.

Теперь определим гомологические спектральные последовательности и их отображения. Применим функтор $\mathrm{Hom}_F(., F)$ к спектральным последовательностям $E^{p,q}_r$, $E'^{p,q}_r$.

Получим некоторые спектральные последовательности $E^r_{p,q} = \mathrm{Hom}_F(E^{p,q}_r, F)$, $E'^r_{p,q} = \mathrm{Hom}_F(E'^{p,q}_r, F)$. В пределе они будут давать $H_*(E)$ и $H_*(E')$ соответственно. Далее к отображению из $E'^{p,q}_r$ в $E^{p,q}_r$, индуцированному h, применим $\mathrm{Hom}_F(., F)$. Получим отображение из $E^r_{p,q}$ в $E'^r_{p,q}$, дающее в пределе отображение $h_*\colon H_*(E) \to H_*(E')$. Найдем вторые члены спектральных последовательностей и их отображения.

Имеем равенства

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_F(H^p(X, V^q)), F) &= \mathrm{Hom}_F(H^p(X) \otimes V^q, F)\\ &= \mathrm{Hom}_F(H^p(X), \mathrm{Hom}_F(V^q, F)) = H_p(X; \mathrm{Hom}_F(V^q, F))\end{aligned}$$

(второе равенство – теорема 3.1 главы 5 в [8], третье – формула универсальных коэффициентов). Аналогичные равенства имеются для пространства X'. При этом так как $V^q = \mathscr{H}^q(f)_x$, то $\mathrm{Hom}_F(V^q, F) = H_q(f^{-1}(x))$ и $E^{p,q}_2 = H_p(X, H_q(f^{-1}(x)))$.

Из описания отображения $h^*\colon E'^{p,q}_2 \to E^{p,q}_2$ получаем, что отображение из $E^2_{p,q}$ в $E'^2_{p,q}$ есть композиция отображения $H_p(X; \mathrm{Hom}_F(V^q, F)) \to H_p(X; \mathrm{Hom}_F(V'^q, F))$, которое индуцировано коэффициентным гомоморфизмом $\mathrm{Hom}_F(k_h^q, F)$, и отображения $h_{1*}\colon H_p(X; \mathrm{Hom}_F(V'^q, F)) \to H_p(X'; \mathrm{Hom}_F(V'^q, F))$.

При этом первое отображение индуцировано отображением коэффициентов

$$\mathrm{Hom}_F(V^q, F) = H_q(f^{-1}(x)) \to H_q(f'^{-1}(h_1(x))) = \mathrm{Hom}_F(V'^q, F),$$

индуцированным в свою очередь посредством h.

Таким образом, в представлениях $E^2_{p,q} = H_p(X) \otimes H_q(f^{-1}(x))$, $E'^2_{p,q} = H_p(X') \otimes H_q(f'^{-1}(h_1(x)))$ отображение $h_*\colon E^2_{p,q} \to E^2_{p,q}$ есть тензорное произведение отображения h_{1*} и $(h|_{f^{-1}(x)})_*$.

Теперь подробнее рассмотрим двойственность Пуанкаре между гомологиями и когомологиями пространства E и ее связь с этими двумя спектральными последовательностями.

Заметим, что группы $E^2_{p,q}$ нулевые при $p > n$ или $q > m$ (и, разумеется, для отрицательных индексов), поэтому и для всех r группы $E^r_{p,q}$ нулевые при $p > n$, $q > m$, и $E^2_{n,m} = E^r_{n,m} = \dots = E^\infty_{n,m}$. При этом в размерности $n+m$ имеется единственное ненулевое слагаемое – $E^\infty_{n,m}$. Значит, $H_n(X; H_m(f^{-1}(x))) = E^2_{n,m} = E^\infty_{n,m} = H_{n+m}(E)$. Следовательно, в каждой размерности $r > 1$ имеется фундаментальный класс $\mu_r \in E^r_{n,m}$, при этом $\mu_\infty = \mu_E$.

Построим умножение: $E^{t,s}_r \frown E^r_{p,q} \to E^r_{p-t,q-s}$, которое обладает следующими свойствами:

1) умножение во втором члене совпадает с умножением когомологий и гомологий базы X:

$$H^t(X; H^s(f^{-1}(x))) \frown H_p(X; H_q(f^{-1}(x))) \to H_{p-t}(X; H^s(f^{-1}(x)) \frown H_q(f^{-1}(x))) \\ \to H_{p-t}(X; H_{q-s}(f^{-1}(x)));$$

2) умножение в E_∞ согласовано с умножением когомологий и гомологий E с коэффициентами в F.

Для построения умножения используем умножение в когомологической спектральной последовательности, построенное в пункте 6.5 главы 4 в [6]. Пусть даны элементы $a \in E^{t,s}_r, b \in E^r_{p,q} = \mathrm{Hom}(E^{p,q}_r, F)$; нам нужно сопоставить им элемент $a \frown b \in E^r_{p-t,q-s} = \mathrm{Hom}(E^{p-t,q-s}_r, F)$. Для этого нам нужно определить для каждого элемента $c \in E^{p-t,q-s}_r$ элемент поля F, равный $(a \frown b)(c)$. Определим его формулой $(a \frown b)(c) = b(a \smile c)$.

Докажем теперь свойства 1), 2). Рассмотрим первое. Для ясности мы будем обозначать как “$\frown$, $\smile$” – умножения в спектральных последовательностях, а как “$\frown_1$, $\smile_1$” – в когомологиях и гомологиях пространства X. В этих терминах нам нужно доказать, что $a \frown b = a \frown_1 b$, где $a \in E^{t,s}_2 = H^t(X; H^s(f^{-1}(x)))$, $b \in E^2_{p,q} = H_p(X; H_q(f^{-1}(x)))$, а $a \frown b, a \frown_1 b \in E^2_{p-t,q-s} = H_{p-t}(X; H_{q-s}(f^{-1}(x)))$.

Свойства, аналогичные свойствам 1), 2), имеют место для умножения в упомянутой выше когомологической спектральной последовательности, поэтому $a \smile_1 c = a \smile c$, где

$$a \in E^{t,s}_2 = H^t(X; H^s(f^{-1}(x))), \qquad c \in E^{p-t,q-s}_2 = H^{p-t}(X; H^{q-s}(f^{-1}(x))).$$

Теперь учтем, что

$$E^2_{p-t,q-s} = \mathrm{Hom}_F(E^{p-t,q-s}_2, F) = H_{p-t}(X; H_{q-s}(f^{-1}(x))) \\ = \mathrm{Hom}_F(H^{p-t}(X; H^{q-s}(f^{-1}(x))), F).$$

Для умножения в когомологиях и гомологиях имеет место равенство $(a \frown_1 b)(c) = b(a \smile_1 c)$. По определению имеем $(a \frown b)(c) = b(a \smile c)$. Значит, $(a \frown_1 b)(c) = (a \frown b)(c)$. В силу произвольности c получаем, что $a \frown b = a \frown_1 b$. Первое свойство проверено.

Второе свойство доказывается так же. В членах E_∞, E^∞ имеются умножения $\frown$, $\smile$, как операция в спектральных последовательностях и умножения $\frown_1$, $\smile_1$, индуцированные из когомологий и гомологий пространства E. При этом в силу известных свойств упоминавшейся выше когомологической спектральной последовательности $\smile = \smile_1$, и нам остается убедиться, что $\frown = \frown_1$. Однако процедуры получения умножения "$\frown$" из "$\smile$" и "$\frown_1$" из "$\smile_1$" идентичны, откуда делаем вывод, что $\frown = \frown_1$.

Перепишем свойство 1) по-другому. Имеются равенства $E_2^{t,s}=H^t(X)\otimes H^s(f^{-1}(x))$, $E^2_{p,q} = H_p(X) \otimes H_q(f^{-1}(x))$. Возьмем в первой группе элемент $a \otimes a'$, а во второй – элемент $b \otimes b'$. Тогда свойство 1) дает, что

$$(a \otimes a') \frown (b \otimes b') = (a \frown a') \otimes (b \frown b') \in H_{p-t}(X) \otimes H_{q-s}(f^{-1}(x)) = E^2_{p-t,q-s}.$$

Отображение изоморфизма Пуанкаре в многообразии E записывается как $H^t(E)\frown \mu_E \to H_{n+m-t}(E)$. Тогда имеется отображение спектральных последовательностей $E_r^{p,q} \frown \mu_r \to E^r_{n-p,m-q}$, дающее в пределе (по свойству 2) умножения) это отображение.

В члене E_2 действие отображения $\frown \mu_2$ следующее. В силу равенства

$$H_n(X; H_m(f^{-1}(x))) = H_n(X) \otimes H_m(f^{-1}(x))$$

имеем фундаментальные классы

$$\mu_X \in H_n(X), \qquad \mu_f \in H_m(f^{-1}(x)), \qquad \mu_2 \in H_n(X; H_m(f^{-1}(x))) = H_{n+m}(E).$$

Вследствие равенства $H_n(X; H_m(f^{-1}(x))) = H_n(X)\otimes H_m(f^{-1}(x))$ их можно выбрать таким образом, что $\mu_X \otimes \mu_f = \mu_2$.

Отображение $\frown \mu_2$ будет совпадать при такой записи вследствие свойства 1) умножения с отображением $(\frown \mu_X) \otimes (\frown \mu_f)$, т.е. с изоморфизмом $H^p(X; \mathscr{H}^q(f)) = H_{n-p}(X; H_{m-q}(f^{-1}(x)))$, являющимся тензорным произведением изоморфизмов Пуанкаре.

Таким образом, имеются отображения $\frown \mu_r$, отображающие $E_r^{*,*} \to E^r_{n-*,m-*}$, дающие в пределе изоморфизм Пуанкаре для E, начинающиеся в члене E_2 с изоморфизмов $H^p(X; \mathscr{H}^q(f)) = H_{n-p}(X; H_{m-q}(f^{-1}(x)))$.

Как и в п. 0, в силу теоремы Лефшеца число Лефщеца отображения

$$H^*(E') \to_{g^*} H^*(E) =_{D_E} H_{n+m-*}(E) \to_{h_*} H_{n+m-*}(E') =_{D^{-1}_{E'}} H^*(E')$$

совпадает с числом Лефшеца отображения

$$E'^{*,*}_2 \to_{g^*} E_2^{*,*} =_{\frown\mu_2} E^2_{n-*,m-*} \to_{h_*} E'^2_{n-*,m-*} =_{(\frown\mu_2)^{-1}} E'^{*,*}_2.$$

Действительно, все отображения в первой последовательности согласованы с предельными отображениями построенных отображений спектральных последовательностей.

Таким образом, число Лефшеца $\Lambda(g,h)$ совпадений отображений $g, f\colon E \to E'$ совпадает с числом Лефшеца Λ_2 построенного отображения $E'^{p,q}_2$ в себя. Проверим, что $\Lambda_2 = \Lambda \cdot \Lambda(g_1, h_1)$.

Для этого вспомним следующее. Имеют место представления

$$E^2_{p,q} = H_p(X; H_q(f^{-1}(x))) = H_p(X) \otimes H_q(f^{-1}(x)),$$
$$E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(f^{-1}(x))) = H^p(X) \otimes H^q(f^{-1}(x));$$

аналогично для ${E'}^2_{p,q}$ и ${E'}^{p,q}_2$. Как было установлено, все отображения в последовательности

$$ {E'}^{*,*}_2 \to E^{*,*}_2 = E^2_{n-*,m-*} \to {E'}^2_{n-*,m-*} = {E'}^{*,*}_2 $$

разлагаются в тензорные произведения отображений. Поэтому число Λ_2 разлагается в произведение чисел Лефшеца следующих двух отображений: композиции

$$ H^*(X') \to_{g_1^*} H^*(X) =_{\frown \mu_X} H_{n-*}(X) \to_{h_{1*}} H_{n-*}(X') =_{(\frown \mu'_X)^{-1}} H^*(X') $$

и композиции

$$ \begin{aligned} H^*({f'}^{-1}(g_1(x))) \to_{g^*} H^*(f^{-1}(x)) =_{\frown \mu_F} H_{m-*}(f^{-1}(x)) \to_{h_*} H_{m-*}(f^{-1}(h_1(x))) \\ =_{(\frown \mu_{F'})^{-1}} H^*({f'}^{-1}(h_1(x))). \end{aligned} $$

Но первое число есть $\Lambda(g_1, h_1)$, второе – Λ. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. Г. Скляренко за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Leray, “L’homologie d’un espace fibré dont la fibre est connexe”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **29** (1950), 169–213.

[2] J. P. Serre, “Homologie singulière des espace fibrés. Applications”, *Ann. of Math.* (2), **54** (1951), 425–505.

[3] A. Douady, “Application de la suite spectrale des espace fibrés”, *Séminaire Henri Cartan*, **11**:1 (1958/59), 11 p., Exp. 3; http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959_11_1_A3_0.

[4] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1988.

[5] D. F. Snyder, “Lefshetz number for sheaf-trivial proper surjections”, *Topology Appl.*, **128**:2–3 (2003), 239–246.

[6] Г. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988.

[7] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961.

[8] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.

Д. В. Артамонов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.07.2007