



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Починка, Е. А. Таланова, Диффеоморфизмы Морса–Смейла с неблуждающими точками попарно различных индексов Морса на 3-многообразиях, *УМН*, 2024, том 79, выпуск 1, 135–184

DOI: 10.4213/rm10141

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

24 марта 2025 г., 23:33:20



УДК 517.9

Диффеоморфизмы Морса–Смейла с неблуждающими точками попарно различных индексов Морса на 3-многообразиях

О. В. Починка, Е. А. Таланова

В настоящей работе мы рассматриваем класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла f , заданных на замкнутом 3-многообразии M^3 , неблуждающее множество которых состоит из четырех неподвижных точек с попарно различными индексами Морса. Из результатов работ С. Смейла и К. Мейера следует, что все градиентно-подобные потоки с аналогичными свойствами имеют энергетическую функцию Морса с четырьмя критическими точками попарно различных индексов Морса. Это означает, что несущее многообразие M^3 для этих потоков допускает разложение Хегора рода 1, и, следовательно, оно гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$. Несмотря на простую структуру неблуждающего множества диффеоморфизмов в классе G , существуют диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами. Согласно результатам В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки такие диффеоморфизмы не обладают энергетической функцией, и вопрос о топологии их несущего многообразия остается открытым. Согласно результатам В. З. Гринеса, Е. В. Жужомы и В. С. Медведева M^3 гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$ в случае локально плоского вложения замыканий одномерных сепаратрис диффеоморфизма $f \in G$. Более того, блуждающее множество диффеоморфизма f содержит по меньшей мере p некомпактных гетероклинических кривых. В настоящей работе аналогичный результат получен для произвольных диффеоморфизмов класса G . На каждом линзовом пространстве $L_{p,q}$ построены диффеоморфизмы из класса G с диким вложением одномерных сепаратрис. Такие примеры ранее были известны только на 3-сфере. Также установлено, что топологическая сопряженность диффеоморфизмов класса G с единственной некомпактной гетероклинической кривой полностью определяется эквивалентностью узлов Хопфа, являющихся проекциями одномерных седловых сепаратрис в пространство орбит бассейна стока. Более того, любой узел Хопфа L реализуется таким диффеоморфизмом. В этом смысле полученный результат подобен классификации диффеоморфизмов Д. Пикстона, полученной Х. Бонатти и В. З. Гринесом.

Библиография: 65 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизмы Морса–Смейла, гетероклиническая кривая, узел Хопфа, дикое вложение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10141>

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-30008, <https://rscf.ru/project/23-71-30008/>.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	136
1. Необходимые сведения и факты	141
1.1. Сведения из топологии	141
1.2. Диффеоморфизмы Морса–Смейла	144
1.3. Классификация 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла	148
1.4. Топология 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла с заданной структурой неблуждающего множества	149
2. Динамика диффеоморфизмов класса G	150
2.1. Согласованная система окрестностей	152
2.2. Пространства блуждающих орбит	154
3. Тривиализация динамики диффеоморфизмов класса G	157
3.1. Сценарий исчезновения несущественных гетероклинических кривых	159
3.2. Сценарий исчезновения неориентируемых гетероклинических кривых	160
4. Узел Хопфа как полный инвариант диффеоморфизмов класса G_1^+ . Топологическая классификация диффеоморфизмов класса G_1^+	163
4.1. Эквивалентность узлов L_f^1, L_f^2	164
4.2. Класс эквивалентности узла Хопфа как полный инвариант топологической сопряженности в классе G	165
4.3. Реализация диффеоморфизмов класса G_1^+ узлами Хопфа	169
5. Топология многообразий, допускающих диффеоморфизмы класса G ..	172
5.1. Линзовое пространство как несущее многообразие для диффеоморфизмов класса G	172
5.2. Построение диффеоморфизмов с дико вложенными сепаратрисами на каждом линзовом пространстве	176
Список литературы	179

Введение

Важный класс структурно устойчивых динамических систем составляют системы Морса–Смейла, существенной особенностью которых является наличие тесной взаимосвязи между динамическими свойствами систем и топологией несущих многообразий. Системы Морса–Смейла были введены в пионерской работе С. Смейла [64]. Уже в ней были доказаны неравенства Морса, связывающие числа Бетти несущего многообразия с количеством периодических орбит и их индексами Морса. Примечательно, что такие динамические системы проявляют разнообразные топологические эффекты, связанные с теорией узлов и зацеплений. Изучение таких типов динамических систем весьма интересно в свете того, что системы Морса–Смейла моделируют многочисленные регулярные процессы в естествознании, а также когнитивные и эмоциональные функции мозга [1].

Остановимся более подробно на современном состоянии исследований в области, связанной с системами Морса–Смейла, заданными на ориентируемых многообразиях (см. также [22] и [28]). В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [3]

ввели понятие грубой системы в ограниченной части плоскости и установили критерий грубости такой системы. Оказалось, что эти системы имеют гиперболическое неблуждающее множество и не имеют связок (траекторий, идущих из седла в седло), более того, они плотны в пространстве всех потоков на плоскости. Этот результат был обобщен М. Пейшото [47], [48] на произвольные замкнутые поверхности с заменой понятия грубости понятием структурной устойчивости (равносильность этих понятий для потоков на плоскости была им установлена там же). В начале шестидесятых годов прошлого века С. Смейл [64], подобно А. А. Андронову и Л. С. Понтрягину, ввел в рассмотрение класс динамических систем с конечным неблуждающим гиперболическим множеством, чьи инвариантные многообразия пересекаются трансверсально, и доказал, что числа неблуждающих орбит разных индексов удовлетворяют соотношениям, подобным неравенствам Морса, после чего такие системы, так же как и их дискретные аналоги, были названы системами Морса–Смейла. Позже С. Смейлом и Дж. Палисом [45], [46] была доказана структурная устойчивость динамических систем (потоков и каскадов) Морса–Смейла.

Несмотря на тривиальность неблуждающего множества, топологическая классификация таких систем еще очень далека от своего завершения. Потоки Морса–Смейла исчерпывающе классифицированы с точностью до топологической эквивалентности на поверхностях (в работах Е. А. Леонтович, А. Г. Майера [36], [37], М. Пейшото [49], А. А. Ошемкова и В. В. Шарко [44]). Перечислим известные результаты, связанные с топологической классификацией различных классов потоков Морса–Смейла на многообразиях размерности 3 и выше. Дж. Флейтас [16] получена топологическая классификация полярных потоков (потоков Морса–Смейла, неблуждающее множество которых содержит в точности две узловые точки и произвольное число седловых периодических точек) на трехмерных многообразиях. Я. Л. Уманским [65] получена топологическая классификация потоков Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических траекторий на трехмерных многообразиях. А. О. Пришляк [60] получил полную классификацию трехмерных градиентно-подобных потоков (потоков Морса–Смейла без периодических траекторий). С. Ю. Пилугиным [50] получена топологическая классификация потоков Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на сфере размерности, не меньшей 3. Классификационные результаты для некоторых классов многомерных градиентно-подобных потоков получены в работах В. З. Гринеса, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужомы, О. В. Починки [20], [31], [22], [18], [34], [19]. В работах О. В. Починки и Д. Д. Шубина получена классификация трехмерных неособых потоков с малым числом периодических орбит [63], [53], [54].

Диффеоморфизмы Морса–Смейла на поверхностях, в отличие от потоков, допускают траектории, идущие из седла в седло, – гетероклинические траектории. Такие двоякоасимптотические движения сильно усложняют динамику. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях была получена Х. Бонатти и Р. Ланжевром [15] как часть классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с нульмерными базисными множествами. Ими доказано, что каждому диффеоморфизму Смейла соответствует конечный комбинаторный объект, представляющий собой набор геометрических типов марковских разбиений. Однако диффеоморфизмы Морса–Смейла не были

выделены для отдельного рассмотрения, в связи с чем для них такая классификация оказалась неоправданно трудоемкой. При отсутствии гетероклинических точек диффеоморфизм Морса–Смейла называется градиентно-подобным, и для таких диффеоморфизмов различные полные топологические инварианты были найдены в работах А. Н. Безденежных, В. З. Гринеса, С. Х. Капкаевой, О. В. Починки [4]–[6], [24]. В работах В. З. Гринеса, Т. М. Митряковой, А. И. Морозова, О. В. Починки [17], [41], [38] получена полная топологическая классификация поверхностных диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических орбит.

Трудности перехода от двумерных многообразий к многообразиям высшей размерности связаны не только с наличием гетероклинических орбит (открытых еще А. Пуанкаре), но и с возможностью дикого вложения сепаратрис седловых периодических точек (т. е. замыкание сепаратрисы не является подмногообразием объемлющего пространства). Наличие у 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла диких сепаратрис обусловлено в первую очередь тем, что в общем случае они не включаются даже в топологический поток [21]. Первый пример такого диффеоморфизма на трехмерной сфере построил Д. Пикстон [51]. В. З. Гринес и Х. Бонатти доказали, что имеется счетное множество несопряженных диффеоморфизмов Морса–Смейла 3-сферы с четырьмя неподвижными точками с одним и тем же графом Пейшото. Работа Х. Бонатти, В. З. Гринеса, О. В. Починки [14], в которой была получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на произвольных замкнутых 3-многообразиях, завершила большую серию работ Х. Бонатти, В. З. Гринеса, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужомы, Ф. Лауденбаха, В. С. Медведева, Э. Пеку, О. В. Починки, приближающих решение этой проблемы [23], [22], [7]–[14], [27], [52], [25], [30].

В том случае, когда размерность несущего многообразия диффеоморфизма равна 3, гетероклиническое множество может быть непустым дизъюнктным объединением кривых. При изучении детерминированных процессов, описываемых системами Морса–Смейла, особую роль играют некомпактные гетероклинические кривые, которые в случае потока являются траекториями, а в случае диффеоморфизма – кривыми, инвариантными для некоторой его степени. С конца двадцатого века и по настоящее время в серии работ Е. Приста и Т. Форбса [58], [59] уделено большое внимание проблеме описания топологии магнитного поля в короне Солнца, важную роль в котором играют так называемые сепараторы. Математической моделью сепараторов являются как раз гетероклинические траектории и кривые, а вопрос об их существовании является одной из принципиальных проблем магнитной гидродинамики. Х. Бонатти, В. З. Гринес и В. С. Медведев [10] в 2002 г. получили эффективное достаточное условие существования гетероклинических траекторий и кривых, которое им, совместно с Е. В. Жужомой, Т. В. Медведевым и О. В. Починкой [26], удалось применить для выявления сепараторов в магнитном поле короны Солнца.

В частности, из результатов, полученных в [9], следует, что 3-многообразие допускает диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических кривых тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно связной сумме конечного числа копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, явно выражающегося через число седловых и узловых периодических орбит диффеоморфизма. В. З. Гринесом, Е. В. Жужомой и В. С. Медведевым [29] доказано, что в случае локально плоского (не дикого) вложения

одномерных сепаратрис седловых точек несущее многообразие градиентно-подобного 3-дiffeоморфизма допускает разложение Хегора, род которого однозначно выражается через число седловых и узловых периодических орбит диффеоморфизма. Существует ли подобная связь в случае дикого вложения сепаратрис – вопрос, открытый на сегодняшний день.

В настоящей работе рассмотрен класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов f , заданных на ориентируемых замкнутых связных многообразиях M^3 и имеющих неблуждающие точки попарно различных индексов. Из определения класса следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ состоит в точности из четырех точек $\omega_f, \sigma_f^1, \sigma_f^2, \alpha_f$ с индексами Морса 0, 1, 2, 3 соответственно. Первые примеры таких диффеоморфизмов были построены в работе Е. В. Круглова и Е. А. Талановой [35]. Любой диффеоморфизм $f \in G$ имеет в точности две седловые точки σ_f^1 и σ_f^2 индексов Морса 1 и 2 соответственно, пересечение двумерных многообразий которых образует гетероклиническое множество

$$H_f = W_{\sigma_f^1}^s \cap W_{\sigma_f^2}^u.$$

Из результатов, полученных в работе [29], следует, что в случае локально плоского вложения одномерных сепаратрис несущее многообразие диффеоморфизма $f \in G$ гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$. При этом множество H_f содержит не менее p некомпактных гетероклинических кривых. Верно и обратное утверждение о существовании на любом линзовом пространстве диффеоморфизма из класса G с локально плоско вложенными одномерными сепаратрисами. Основной целью настоящей работы является доказательство существования в рассматриваемом классе диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами, описание топологии несущего многообразия для таких диффеоморфизмов, а также нахождение топологических инвариантов и построение квазиэнергетических функций некоторых подклассов диффеоморфизмов множества G .

Для любого диффеоморфизма $f \in G$ введем понятие гетероклинического индекса I_f следующим образом. Если множество H_f не содержит некомпактных кривых, то положим $I_f = 0$. В противном случае обозначим через \tilde{H}_f подмножество, состоящее из некомпактных кривых. Так как любая кривая $\gamma \subset \tilde{H}_f$ содержит вместе с любой точкой $x \in \gamma$ точку $f(x)$, будем считать кривую γ ориентированной в направлении от x к $f(x)$. Также зафиксируем ориентацию на многообразиях $W_{\sigma_1}^s$ и $W_{\sigma_2}^u$. Для некомпактной гетероклинической кривой γ обозначим через

$$v_\gamma = (\vec{v}_\gamma^1, \vec{v}_\gamma^2, \vec{v}_\gamma^3)$$

тройку векторов с началом в точке $x \in \gamma$ таких, что \vec{v}_γ^1 – вектор нормали к $W_{\sigma_1}^s$, \vec{v}_γ^2 – вектор нормали к $W_{\sigma_2}^u$ и \vec{v}_γ^3 – касательный вектор к ориентированной кривой γ . Назовем v_γ репером некомпактной гетероклинической кривой γ . Очевидно, что ориентация (положительная или отрицательная) репера v_γ не зависит от выбора точки x на γ . Положим $I_\gamma = +1$ ($I_\gamma = -1$) в случае положительной (отрицательной) ориентации. Число

$$I_f = \left| \sum_{\gamma \subset \tilde{H}_f} I_\gamma \right|$$

назовем *гетероклиническим индексом диффеоморфизма* f . Для целого числа $p \geq 0$ обозначим через $G_p \subset G$ подмножество диффеоморфизмов $f \in G$ таких, что $I_f = p$.

Аналогичным образом определяется репер компактной гетероклинической кривой γ , ограничивающей диск $d_\gamma \subset W_{\sigma_f^1}^s$, содержащий седло σ_f^1 . При этом кривая γ ориентирована так, что при движении вдоль нее диск d_γ остается слева.

Для диффеоморфизма $f \in G_p$, $p > 0$, множество H_f назовем ориентируемым, если оно состоит только из некомпактных кривых, и реперы всех кривых в H_f имеют одинаковую ориентацию. Для диффеоморфизма $f \in G_0$ множество H_f назовем ориентируемым, если оно либо пусто, либо состоит только из компактных кривых, ограничивающих диски на $W_{\sigma_f^1}^s$, содержащие седло σ_f^1 , и реперы всех кривых в H_f имеют одинаковую ориентацию. Обозначим через $G_p^+ \subset G_p$, $p \geq 0$, подмножество диффеоморфизмов $f \in G_p$ с ориентируемым множеством H_f .

Следующий доказанный в работе факт является ключом к описанию топологии многообразий, допускающих диффеоморфизмы класса G :

- 1) для любого диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ из класса G_p , $p \geq 0$, существует изотопный ему диффеоморфизм $f_+ \in G_p^+$.

Полный топологический инвариант, полученный в [14] для 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла, состоит из замкнутого связного ориентируемого простого 3-многообразия и двух вложенных в него трансверсально пересекающихся ламинаций, состоящих из торов и бутылок Клейна. В работе [13] выделены все допустимые инварианты, и по каждому из них реализован диффеоморфизм Морса–Смейла. Однако отсутствие классификации простых 3-многообразий и вложенных в них ламинаций не всегда позволяет реализовывать диффеоморфизмы с заданными свойствами. В некоторых частных случаях инварианты зачастую находятся более естественным образом. Так, для диффеоморфизмов, имеющих в точности одну седловую точку (диффеоморфизмов Пикстона), в работе [7] установлено, что их топологическая сопряженность полностью определяется эквивалентностью узлов Хопфа (узлов $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, принадлежащих гомотопическому классу стандартного узла $L_0 = \{s\} \times \mathbb{S}^1$), являющихся проекциями одномерных неустойчивых седловых сепаратрис в соответствующее каждому диффеоморфизму пространство орбит бассейна стока. Среди хопфовских узлов различают тривиальные (эквивалентные стандартному узлу) и нетривиальные. Из результатов П. М. Ахметьева и О. В. Починки [2] следует, что существует счетное число попарно не эквивалентных (объемлюще не гомеоморфных) нетривиальных хопфовских узлов. В силу [51], [7] любой узел Хопфа может быть реализован диффеоморфизмом Пикстона на 3-сфере.

В настоящей работе аналогичный результат получен для диффеоморфизмов класса G_1^+ :

- 2) класс топологической сопряженности диффеоморфизма $f \in G_1^+$ полностью определяется классом узла Хопфа, являющегося проекцией одномерной сепаратрисы в пространство орбит бассейна стока; более того, любой узел Хопфа L может быть реализован диффеоморфизмом $f_L \in G_1^+$, для которого класс эквивалентности узла L является полным топологическим инвариантом.

Одним из основных результатов результатов работы является доказательство следующего факта:

- 3) несущее многообразие любого диффеоморфизма $f \in G_p$, $p \geq 0$, гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$.

Также в работе дано конструктивное доказательство следующего утверждения:

- 4) каждое линзовое пространство $L_{p,q}$ допускает диффеоморфизм f из класса G_p с дико вложенными одномерными сепаратрисами.

Заметим, что все ранее известные примеры диффеоморфизмов рассматриваемого класса с дико вложенными одномерными сепаратрисами строились только на трехмерной сфере.

1. Необходимые сведения и факты

1.1. Сведения из топологии. Для любого подмножества X топологического пространства Y будем обозначать через $i_X: X \rightarrow Y$ отображение включения. Для любого непрерывного отображения $\phi: X \rightarrow Y$ из топологического пространства X в топологическое пространство Y будем обозначать через $\phi_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ индуцированный им гомоморфизм.

C^r -вложением ($r \geq 0$) многообразия X в многообразие Y называется отображение $f: X \rightarrow Y$ такое, что $f: X \rightarrow f(X)$ есть C^r -диффеоморфизм. C^0 -вложение называют также *топологическим вложением*.

Топологическое вложение $\lambda: X \rightarrow Y$ m -многообразия X в n -многообразие Y ($m \leq n$) называется *локально плоским в точке* $\lambda(x)$, $x \in X$, если точка $\lambda(x)$ принадлежит такой карте (U, ψ) многообразия Y , что либо $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек, у которых последние $n - m$ координат равны нулю, либо $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}_+^m$, где $\mathbb{R}_+^m \subset \mathbb{R}^m$ – множество точек, у которых последняя координата неотрицательна. Вложение λ называется *локально плоским*, а многообразие X – *локально плоско вложенным*, если λ является локально плоским в каждой точке $\lambda(x)$, $x \in X$. В противном случае вложение λ называется *диким*, а многообразие X – *дико вложенным*. Любая точка $\lambda(x)$, в которой отображение λ не является локально плоским, называется *точкой дикости*.

Пусть

$$\mathbb{D}^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$$

– стандартный n -диск (шар), $\mathbb{D}^0 = \{0\}$ и

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

– стандартная $(n - 1)$ -сфера, $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [10; лемма 2.1]. Пусть $\lambda: \mathbb{S}^2 \rightarrow M^3$ – топологическое вложение, которое является гладким всюду, кроме одной точки $x_0 = \lambda(s_0)$, $s_0 \in \mathbb{S}^2$, и пусть $\Sigma = \lambda(\mathbb{S}^2)$, $y_0 \in \Sigma \setminus \{x_0\}$ – фиксированная точка, а V – фиксированная окрестность сферы Σ . Тогда существует гладкий 3-шар B ,

содержащийся в V и такой, что $x_0 \in B$ и ∂B трансверсально пересекает Σ по единственной кривой, разделяющей в Σ точки x_0 и y_0 .

Топологически вложенная в n -многообразии X $(n-1)$ -сфера S^{n-1} называется *цилиндрической* или *цилиндрически вложенной*, если существует топологическое вложение $e: S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow X$ такое, что $e(S^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

n -многообразии X называется *неприводимым*, если любая $(n-1)$ -сфера, цилиндрически вложенная в X , ограничивает в нем n -шар.

3-многообразии X называется *простым*, если оно либо неприводимо, либо гомеоморфно $S^2 \times S^1$.

Топологически вложенная в 3-многообразии X поверхность F называется *собственно вложенной*, если $\partial X \cap F = \partial F$. Собственно вложенная в X поверхность F называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

1) существуют нестягиваемая простая замкнутая кривая $c \subset \text{int } F$ и вложенный 2-диск $D \subset \text{int } X$ такие, что $D \cap F = \partial D = c$;

2) существует 3-шар $B \subset \text{int } X$ такой, что $F = \partial B$.

Поверхность F называется *несжимаемой* в X , если она не является сжимаемой в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [7; теорема 4]. Пусть T – двумерный тор, гладко вложенный в многообразии $S^2 \times S^1$ так, что $i_{T*}(\pi_1(T)) \neq 0$. Тогда T ограничивает в $S^2 \times S^1$ заполненный тор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [7; лемма 3.1]. Пусть S – двумерная сфера, цилиндрически вложенная в многообразии $S^2 \times S^1$. Тогда S либо ограничивает там 3-шар, либо объемлюще изотопна сфере $S^2 \times \{s_0\}$, $s_0 \in S^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 [43; упражнение 6]. Любой двусторонний сжимаемый тор T в неприводимом 3-многообразии X либо ограничивает там заполненный тор, либо содержится в 3-шаре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 [32; гл. 4, разд. 5, следствие 1]. Никакое n -мерное многообразие не может быть разбито подмножеством размерности $\leq n-2$.

Напомним, что *узлом* на многообразии M^n называется гладкое вложение $\gamma: S^1 \rightarrow M^n$ или образ этого вложения $L = \gamma(S^1)$. Узлы L и L' называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$ такой, что $h(L) = L'$. Через $[L]$ будем обозначать класс эквивалентности узла L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 [42]. Если узлы $L, L' \subset M^n$, $n \leq 3$, эквивалентны, то существует диффеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$ такой, что $h(L) = L'$.

Узлы γ и γ' называются (*гладко*) *гомотопными*, если существует (гладкое) непрерывное отображение $\Gamma: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^n$ такое, что

$$\Gamma(s, 0) = \gamma(s) \quad \text{и} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma'(s) \quad \text{для любого } s \in S^1.$$

Если при этом $\Gamma|_{S^1 \times \{t\}}$ – вложение для любого $t \in [0, 1]$, то узлы называются (*гладко*) *изотопными*.

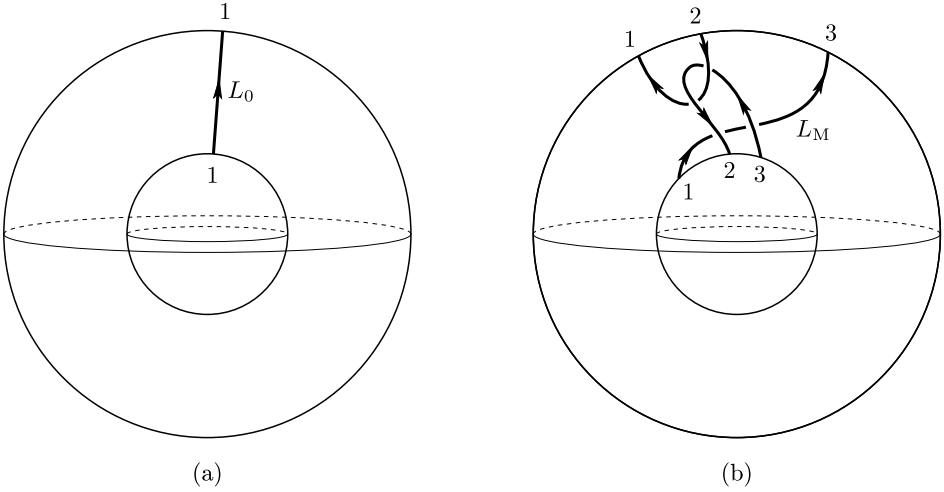


Рис. 1. Неизотопные и неэквивалентные хопфовские узлы L_0 и L_M : (а) стандартный хопфовский узел L_0 ; (б) узел Мазура L_M .

Узел $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ называется *узлом Хопфа*, если гомоморфизм i_{L*} , индуцированный включением $i_L: L \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, является изоморфизмом групп $\pi_1(L) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Любой хопфовский узел гладко гомотопен стандартному хопфовскому узлу $L_0 = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [33]), но не является изотопным или эквивалентным ему в общем случае. Б. Мазур [39] построил хопфовский узел L_M , неэквивалентный и неизотопный узлу L_0 (см. рис. 1).

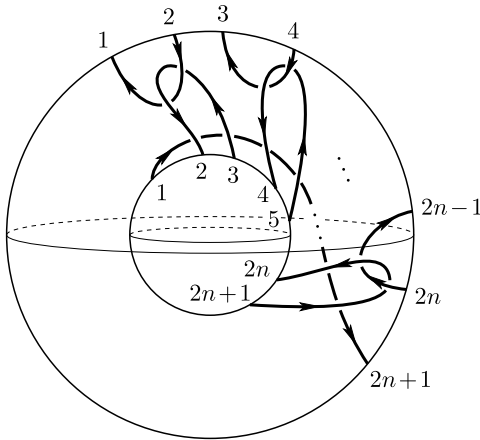


Рис. 2. Обобщенный узел Мазура L_n .

В работе [2] построено счетное семейство хопфовских узлов L_n (см. рис. 2), для которых там же доказано, что они попарно неэквивалентны.

Напомним, что *линзовое пространство* определяется как склейка двух заполненных торов посредством гомеоморфизма их границ и обозначается $L_{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, где $\langle p, q \rangle$ – гомотопический тип образа меридиана относительно склеивающего гомеоморфизма. Некоторые известные 3-многообразия в действительности являются линзовыми пространствами, например трехмерная сфера $S^3 = L_{1,0}$, многообразие $S^2 \times S^1 = L_{0,1}$, проективное пространство $\mathbb{R}P^3 = L_{1,2}$.

1.2. Диффеоморфизмы Морса–Смейла. Пусть M^n – гладкое замкнутое ориентируемое n -многообразие с метрикой d , и пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Для характеристики блуждаемости траекторий диффеоморфизма традиционно используется понятие цепной рекуррентности. Напомним сначала следующее определение: ε -цепью длины $m \in \mathbb{N}$ диффеоморфизма f , соединяющей точку x с точкой y , называется последовательность точек $x = x_0, \dots, x_m = y$ такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq m$.

Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* точкой диффеоморфизма f , если для любого $\varepsilon > 0$ существуют m , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины m , соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек f называется *цепно рекуррентным множеством* f и обозначается \mathcal{R}_f . На цепно рекуррентном множестве можно ввести отношение эквивалентности следующим правилом: $x \sim y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε -цепи, соединяющие x с y и y с x . Тогда цепно рекуррентное множество разбивается на классы эквивалентности, называемые *цепными компонентами*.

Если цепно рекуррентное множество диффеоморфизма f конечно, то оно состоит из периодических точек. Периодическая точка $p \in \mathcal{R}_f$ периода m_p называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x} \right) \Big|_p$ по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (или больше) единицы, то p называют *стоковой* (соответственно *источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой*.

Из гиперболической структуры периодической точки p и конечности цепно рекуррентного множества следует, что ее *устойчивое многообразие*

$$W_p^s = \left\{ x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0 \right\}$$

и *неустойчивое многообразие*

$$W_p^u = \left\{ x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0 \right\}$$

являются гладкими подмногообразиями, диффеоморфными \mathbb{R}^{n-q_p} и \mathbb{R}^{q_p} соответственно, где q_p – число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы (*индекс Морса точки* p). Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ (или $W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой* (соответственно *устойчивой*) *сепаратрисой* точки p .

Диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если выполнены следующие условия:

- 1) цепно рекуррентное множество \mathcal{R}_f состоит из конечного числа гиперболических точек;
- 2) многообразия W_p^s и W_q^u пересекаются трансверсально для любых точек $p, q \in \mathcal{R}_f$.

Обозначим через $MS(M^n)$ множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на ориентируемом n -многообразии M^n . Заметим, что в силу гиперболичности цепно рекуррентное множество любого диффеоморфизма Морса–Смейла совпадает с его неблуждающим множеством Ω_f . Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *блуждающей точкой* диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, если она обладает окрестностью $U_x \subset M^n$ такой, что

$$f^k(U_x) \cap U_x = \emptyset \quad \text{для любого } k \neq 0.$$

Дополнение до множества блуждающих точек называется *неблуждающим множеством* диффеоморфизма f .

Для множества $P \subset \Omega_f$ обозначим

$$W_P^u = \bigcup_{p \in P} W_p^u, \quad W_P^s = \bigcup_{p \in P} W_p^s.$$

Компактное f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что

$$f(U_A) \subset \text{int } U_A \quad \text{и} \quad A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A).$$

Окрестность U_A при этом называется *захватывающей* или *изолирующей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} .

В случае, когда p – гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$, мы будем использовать следующие обозначения:

- m_p – период точки p ;
- ν_p – тип ориентации точки p , т.е. $\nu_p = +1$ (или -1), если отображение $f^{m_p}|_{W_p^u}$ сохраняет (соответственно меняет) ориентацию;
- q_p – индекс Морса;
- \mathcal{O}_p – орбита точки p ;
- ℓ_p^u – неустойчивая сепаратриса точки p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 [25; теорема 2.1.1]. Пусть $f \in MS(M^n)$. Тогда:

- 1) $M^n = \bigcup_{p \in \mathcal{R}_f} W_p^u$;
- 2) W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n , диффеоморфным \mathbb{R}^{q_p} для любой периодической точки $p \in \mathcal{R}_f$;
- 3) $\text{cl}(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}_f: \ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset} W_r^u$ для любой неустойчивой сепаратрисы ℓ_p^u периодической точки $p \in \mathcal{R}_f$.

Переходом к отображению f^{-1} доказывается аналогичное предложение для устойчивых многообразий.

Если σ_1, σ_2 – различные седловые периодические точки диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^n)$, для которых $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ называется *гетероклиническим пересечением*. При этом нульмерные компоненты линейной связности гетероклинического пересечения называются *гетероклиническими точками*, одномерные – *гетероклиническими кривыми*, а компоненты большей размерности называются *гетероклиническими многообразиями*.

Диффеоморфизм $f \in \text{MS}(M^n)$ называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{R}_f$ следует неравенство $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$ (что эквивалентно отсутствию гетероклинических точек у диффеоморфизма f).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8 [25; предложение 2.1.3]. *Если сепаратриса ℓ_p^u седловой точки p диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^n)$ не участвует в гетероклиническом пересечении, то существует единственная стоковая точка ω такая, что*

$$\text{cl}(\ell_p^u) = p \cup \ell_p^u \cup \omega.$$

При этом $\text{cl}(\ell_p^u)$ гомеоморфно отрезку, если $q_p = 1$, и гомеоморфно сфере \mathbb{S}^{q_p} , если $q_p > 1$.

Положим $\widehat{W}_p^u = (W_p^u \setminus p)/f^{m_p}$ и обозначим через $p_{\widehat{W}_p^u}: W_p^u \setminus p \rightarrow \widehat{W}_p^u$ естественную проекцию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9 [25; теорема 2.1.3]. *Проекция $p_{\widehat{W}_p^u}$ является накрытием, которое индуцирует структуру гладкого q_p -многообразия на пространстве орбит \widehat{W}_p^u . При этом:*

- для $q_p = 1, \nu_p = -1$ пространство \widehat{W}_p^u гомеоморфно окружности;
- для $q_p = 1, \nu_p = +1$ пространство \widehat{W}_p^u гомеоморфно паре окружностей;
- для $q_p = 2, \nu_p = -1$ пространство \widehat{W}_p^u гомеоморфно бутылке Клейна;
- для $q_p = 2, \nu_p = +1$ пространство \widehat{W}_p^u гомеоморфно двумерному тору;
- для $q_p \geq 3, \nu_p = -1$ пространство \widehat{W}_p^u гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна $\mathbb{S}^{q_p-1} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$;
- для $q_p \geq 3, \nu_p = +1$ пространство \widehat{W}_p^u гомеоморфно $\mathbb{S}^{q_p-1} \times \mathbb{S}^1$.

Пусть $f \in \text{MS}(M^n)$. Обозначим Ω_f^i периодические точки диффеоморфизма f индекса Морса i . Разобьем множество $\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2 \cup \dots \cup \Omega_f^{n-1}$ на два непересекающиеся подмножества Σ_A и Σ_R такие, что множества

$$A = \Omega_f^0 \cup W_{\Sigma_A}^u, \quad R = \Omega_f^n \cup W_{\Sigma_R}^s$$

замкнуты и инвариантны. По построению множества A, R содержат все периодические точки диффеоморфизма f . Наибольшую размерность неустойчивого (соответственно устойчивого) многообразия периодических точек из A (соответственно R) будем называть *размерностью A* (соответственно R).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10 [30; теорема 1]. *Пусть $f \in \text{MS}(M^n)$. Тогда множество A является аттрактором, а множество R – репеллером диффеоморфизма f . Более того, если размерность аттрактора A (или репеллера R) не*

превосходит $n - 2$, то репеллер R (соответственно аттрактор A) является связным.

Следуя [30], будем называть A и R дуальной парой аттрактор–репеллер диффеоморфизма Морса–Смейла $f \in \text{MS}(M^n)$, а множество $V = M^n \setminus (A \cup R)$ характеристическим множеством. Обозначим через

$$\widehat{V} = V/f$$

множество орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на многообразии V – характеристическое пространство, которое совпадает с множеством орбит диффеоморфизма f на V . Пусть

$$p_{\widehat{V}}: V \rightarrow \widehat{V}$$

– естественная проекция, ставящая в соответствие точке $x \in V$ ее орбиту в силу диффеоморфизма f и наделяющая множество \widehat{V} фактортопологией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11 [30; теорема 2]. Для любой дуальной пары аттрактор–репеллер (A, R) сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса–Смейла $f \in \text{MS}(M^n)$ справедливы следующие утверждения:

1) характеристическое пространство \widehat{V} является замкнутым гладким ориентируемым n -многообразием, каждая компонента связности которого либо неприводима, либо гомеоморфна $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$;

2) проекция $p_{\widehat{V}}: V \rightarrow \widehat{V}$ является накрытием;

3) отображение $\eta_{\widehat{V}}$, ставящее в соответствие каждому гомотопическому классу $[\widehat{c}]$ петль $\widehat{c} \subset \widehat{V}$, замкнутых в точке \widehat{x} , целое число n такое, что поднятие петли \widehat{c} на V соединяет некоторую точку $x \in p_{\widehat{V}}^{-1}(\widehat{x})$ с точкой $f^n(x)$, является гомоморфизмом на фундаментальной группе каждой компоненты связности пространства \widehat{V} ;

4) если размерность аттрактора A и репеллера R не превосходит $n - 2$, то множества V и \widehat{V} связны, и отображение $\eta_{\widehat{V}}: \pi_1(\widehat{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$ – эпиморфизм.

Подмногообразие $\widehat{X} \subset \widehat{V}$ будем называть $\eta_{\widehat{V}}$ -существенным, если

$$\eta_{\widehat{V}}(i_{\widehat{X}*}(\pi_1(\widehat{X}))) \neq \{0\}.$$

Пусть U_A – захватывающая окрестность аттрактора A диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^n \rightarrow M^n$, и R – репеллер, дуальный к аттрактору A . Положим

$$F_A = U_A \setminus f(U_A),$$

тогда $\text{cl}(F_A)$ – фундаментальная область ограничения диффеоморфизма f на V . Положим $\widehat{V}_A = \text{cl}(F_A)/f$, тогда \widehat{V}_A – гладкое замкнутое n -многообразие, полученное из $\text{cl}(F_A)$ отождествлением границ в силу диффеоморфизма f . Обозначим через $p_A: \text{cl}(F_A) \rightarrow \widehat{V}_A$ естественную проекцию.

Рассмотрим семейство $E_f \in \text{Diff}(M^n)$ таких диффеоморфизмов, что $\mathcal{R}_{f'} = \mathcal{R}_f$ для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$, и диффеоморфизм f' совпадает с диффеоморфизмом f на U_A и в некоторой окрестности репеллера R .

Для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$ положим

$$\widehat{l}_{f'}^s = p_A(W_{\Sigma_A}^s \cap F_A) \quad \text{и} \quad \widehat{l}_{f'}^u = p_A(W_{\Sigma_R}^u \cap F_A).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12 [62; лемма 1]. Пусть $\hat{h}: \hat{V}_A \rightarrow \hat{V}_A$ – изотопный тождественному диффеоморфизм. Тогда существует гладкая дуга $\varphi_t \subset E_f$ такая, что

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = f' \quad \text{и} \quad \hat{l}_{f'}^u = \hat{h}(\hat{l}_f^u), \quad \hat{l}_{f'}^s = \hat{l}_f^s.$$

1.3. Классификация 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла. Пусть $f \in \text{MS}(M^3)$. Положим

$$A_f = W_{\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1}^u, \quad R_f = W_{\Omega_f^2 \cup \Omega_f^3}^s, \quad V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f).$$

В силу предложения 1.11 множество A_f (или R_f) является связным аттрактором (соответственно репеллером), топологическая размерность которого не превосходит 1, множество V_f есть связное 3-многообразие и

$$V_f = W_{A_f \cap \Omega_f}^s \setminus A_f = W_{R_f \cap \Omega_f}^u \setminus R_f.$$

Более того, характеристическое пространство $\hat{V}_f = V_f/f$ есть связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие, и естественная проекция $p_f: V_f \rightarrow \hat{V}_f$ индуцирует эпиморфизм $\eta_f: \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$, приписывающий каждому гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\hat{V}_f)$ замкнутой кривой $c \subset \hat{V}_f$ целое число n такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет некоторую точку $x \in V_f$ с точкой $f^n(x)$. Положим

$$\hat{L}_f^s = p_f(W_{\Omega_f^1}^s \setminus A_f), \quad \hat{L}_f^u = p_f(W_{\Omega_f^2}^u \setminus R_f).$$

Набор $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u)$ называют *схемой* диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13 [14; теорема 1]. Диффеоморфизмы $f, f' \in \text{MS}(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ такой, что

- (а) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;
- (б) $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s, \hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$.

Для решения проблемы реализации необходимо выделить множество всех абстрактных схем, допускающих реализацию (т. е. построение диффеоморфизма Морса–Смейла, схема которого эквивалентна выбранной абстрактной схеме).

Пусть \hat{V} – простое гладкое 3-многообразие, чья фундаментальная группа допускает эпиморфизм $\eta: \pi_1(\hat{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$, и пусть $\hat{\ell} \subset \hat{V}$ есть η -существенный гладкий тор, а $N_{\hat{\ell}} \subset \hat{V}$ – его трубчатая окрестность. Пусть $\hat{Y} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $\hat{\mu}$ – меридиан заполненного тора \hat{Y} (замкнутая кривая, стягиваемая на \hat{Y} и не стягиваемая на $\partial\hat{Y}$), а $\zeta_{\hat{\ell}}: \partial\hat{Y} \times \mathbb{S}^0 \rightarrow \partial N_{\hat{\ell}}$ – диффеоморфизм такой, что $\eta(\zeta_{\hat{\ell}}(\hat{\mu} \times \mathbb{S}^0)) = 0$. Говорят, что пространство

$$\hat{V}_{\hat{\ell}} = (\hat{V} \setminus \text{int } N_{\hat{\ell}}) \cup_{\zeta_{\hat{\ell}}} (\hat{Y} \times \mathbb{S}^0)$$

получено из многообразия \hat{V} перестройкой вдоль тора $\hat{\ell}$.

Структура гладкого замкнутого 3-многообразия на множестве $\hat{V}_{\hat{\ell}}$ индуцируется естественной проекцией $p_{\hat{\ell}}: (\hat{V} \setminus \text{int } N_{\hat{\ell}}) \sqcup (\hat{Y} \times \mathbb{S}^0) \rightarrow \hat{V}_{\hat{\ell}}$. Поскольку любой

гомеоморфизм границы заполненного тора, переводящий меридиан в меридиан, продолжается на заполненный тор [61], то описанная перестройка корректно определена, т. е. не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора трубчатой окрестности $N_{\hat{\ell}}$ и гомеоморфизма ζ_{ℓ} .

Аналогично определяется перестройка многообразия \hat{V} вдоль η -существенной гладкой бутылки Клейна $\hat{\ell} \subset \hat{V}$, состоящая в приклейке заполненного тора \hat{Y} к краю многообразия $\hat{V} \setminus \text{int } N_{\hat{\ell}}$. Также операция перестройки обобщается на множество $\hat{L} \subset \hat{V}$, являющееся дизъюнктным объединением гладких η -существенных торов и бутылок Клейна; многообразие, полученное в результате такой перестройки, будем обозначать через $V_{\hat{L}}$.

В силу предложений 1.9 и 1.11 для градиентно-подобного диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$ каждая компонента связности $\hat{\ell}^s$ (или $\hat{\ell}^u$) множества \hat{L}_f^s (соответственно \hat{L}_f^u) является либо тором, либо бутылкой Клейна, η_f -существенно вложенными в многообразии \hat{V}_f .

Схема любого градиентно-подобного диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$ является абстрактной схемой в смысле следующего определения.

Набор $S = (\hat{V}, \eta, \hat{L}^s, \hat{L}^u)$ называется абстрактной схемой, если:

- (а) \hat{V} есть простое многообразие, чья фундаментальная группа допускает эпиморфизм $\eta: \pi_1(\hat{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$;
- (б) множества $\hat{L}^s, \hat{L}^u \subset \hat{V}$ являются трансверсально пересекающимися дизъюнктивными объединениями гладких η -существенных торов и бутылок Клейна;
- (с) каждая компонента связности многообразий $\hat{V}_{\hat{L}^s}, \hat{V}_{\hat{L}^u}$ гомеоморфна многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14 [13; теорема 1]. *Для любой абстрактной схемы $S = (\hat{V}, \eta, \hat{L}^s, \hat{L}^u)$ существует градиентно-подобный диффеоморфизм $f \in \text{MS}(M^3)$, схема S_f которого эквивалентна схеме S .*

1.4. Топология 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла с заданной структурой неблуждающего множества. Пусть $f \in \text{MS}(M^3)$. Положим

$$g_f = \frac{r_f - l_f + 2}{2},$$

где r_f – число седловых и l_f – число узловых периодических точек диффеоморфизма f . Согласно [25] число g_f является целым неотрицательным для любого диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$.

Пусть $f \in \text{MS}(M^3)$ – градиентно-подобный диффеоморфизм. Согласно предложению 1.8 замыкание $\text{cl}(\ell_{\sigma}^u)$ любой одномерной неустойчивой сепаратрисы ℓ_{σ}^u седловой точки σ диффеоморфизма f гомеоморфно отрезку, который состоит из этой сепаратрисы и двух точек: σ и некоторого стока ω . Пусть L_{ω} – объединение неустойчивых одномерных сепаратрис седловых точек, которые содержат ω в своих замыканиях. Поскольку по предложению 1.9 многообразие W_{ω}^s гомеоморфно \mathbb{R}^3 и множество $L_{\omega} \cup \omega$ является объединением простых дуг с единственной общей точкой ω , то (по аналогии с пучком дуг в \mathbb{R}^3) множество $L_{\omega} \cup \omega$ называется пучком одномерных неустойчивых сепаратрис.

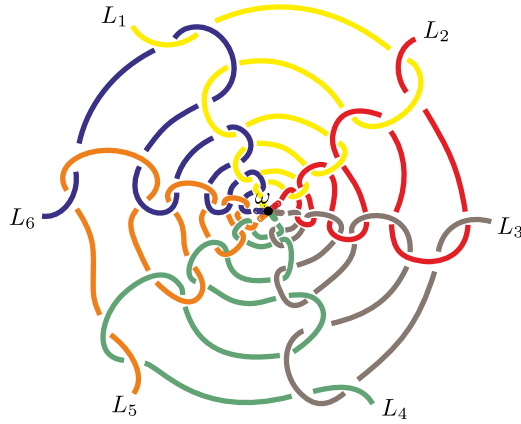


Рис. 3. Дикий пучок сепаратрис, в котором каждая сепаратриса ручная.

Согласно [29] пучок сепаратрис $L_\omega \cup \omega$ называется *ручным*, если существует гомеоморфизм $\psi_\omega: W_\omega^s \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что $\psi_\omega(L_\omega \cup \omega)$ – пучок лучей в \mathbb{R}^3 с началом в точке $O(0, 0, 0)$. В противном случае пучок сепаратрис называется *диким* (см. рис. 3).

Если α – источник диффеоморфизма f , то аналогично определяется ручной (дикий) пучок L_α одномерных устойчивых сепаратрис.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15 [10; теорема 1]. Пусть $f \in \text{MS}(M^3)$ – диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических кривых. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $g_f = 0$, то M^3 есть 3-сфера;
- 2) если $g_f > 0$, то M^3 есть связная сумма g_f копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Обратно, для любых неотрицательных целых чисел g и l таких, что число $g = (r-l+2)/2$ является целым и неотрицательным, существует диффеоморфизм $f \in \text{MS}(M^3)$ без гетероклинических кривых, обладающий следующими свойствами:

(а) M^3 – это 3-сфера, если $g = 0$, и M^3 – это связная сумма g копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, если $g > 0$;

(б) неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из r седловых и l узловых точек.

2. Динамика диффеоморфизмов класса G

В настоящем разделе мы устанавливаем некоторые динамические свойства диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ из класса G .

Напомним, что класс G состоит из диффеоморфизмов $f \in \text{MS}(M^3)$, имеющих в точности четыре неблуждающие точки $\omega_f, \sigma_f^1, \sigma_f^2, \alpha_f$ с индексами Морса 0, 1, 2, 3 соответственно.

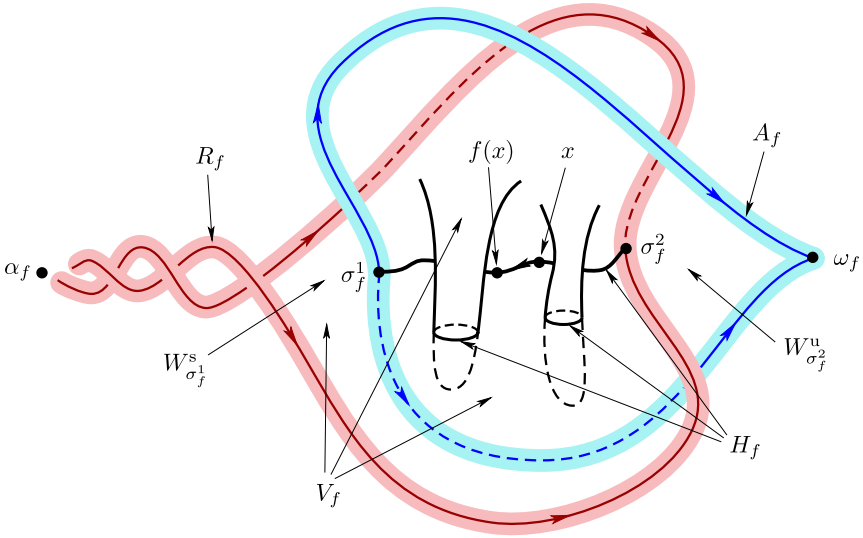


Рис. 4. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$ с множеством H_f , состоящим из компактных и некомпактных гетероклинических кривых.

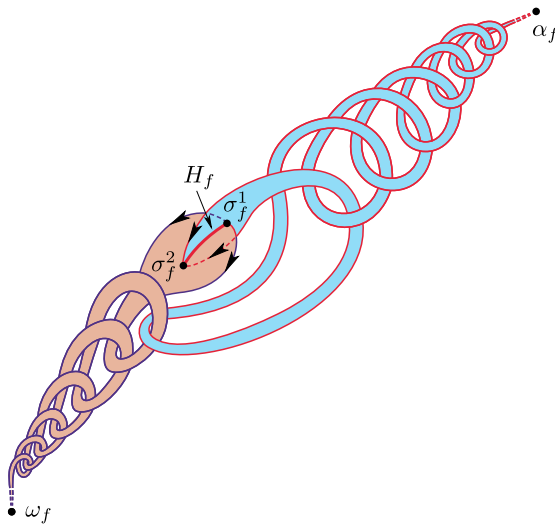


Рис. 5. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$ с множеством H_f , состоящим из некомпактных гетероклинических кривых.

В силу отсутствия гетероклинических точек у диффеоморфизма f одномерные седловые многообразия содержат в своих замыканиях единственную узловую точку (см. предложение 1.8). А именно,

$$\text{cl}(W_{\sigma_f^1}^u) = W_{\sigma_f^1}^u \cup \omega_f, \quad \text{cl}(W_{\sigma_f^2}^s) = W_{\sigma_f^2}^s \cup \alpha_f.$$

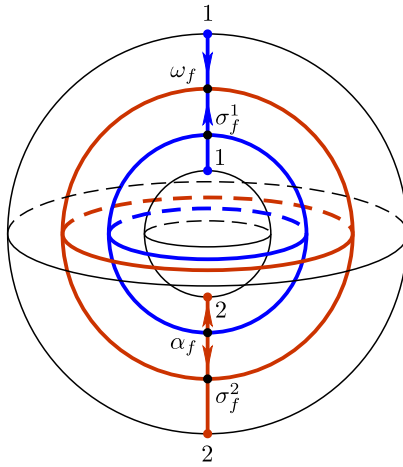


Рис. 6. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$ с пустым множеством H_f .

При этом в силу предложения 1.9 множества $A_f = \text{cl}(W_{\sigma_f^1}^u)$ и $R_f = \text{cl}(W_{\sigma_f^2}^s)$ являются попарно непересекающимися топологически вложенными окружностями (см. рис. 4), возможно дикими в узловых точках (см. рис. 5).

Положим

$$H_f = W_{\sigma_f^1}^s \cap W_{\sigma_f^2}^u.$$

Если множество H_f непусто, то в силу предложения 1.7 справедливы равенства

$$\text{cl}(W_{\sigma_f^1}^s) = W_{\sigma_f^1}^s \cup R_f, \quad \text{cl}(W_{\sigma_f^2}^u) = W_{\sigma_f^2}^u \cup A_f.$$

В противном случае согласно предложению 1.8 множества

$$\text{cl}(W_{\sigma_f^1}^s) = W_{\sigma_f^1}^s \cup \alpha_f, \quad \text{cl}(W_{\sigma_f^2}^u) = W_{\sigma_f^2}^u \cup \omega_f$$

являются топологически вложенными непересекающимися двумерными сферами (см. рис. 6).

2.1. Согласованная система окрестностей. Для $t \in (0, 1]$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1^t &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2(x_2^2 + x_3^2) \leq t\}, \\ \mathcal{N}_2^t &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 \leq t\} \end{aligned}$$

и для $i \in \{1, 2\}$ положим $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i^1$.

Определим в окрестности \mathcal{N}_1 пару трансверсальных слоений $\mathcal{F}_1^u, \mathcal{F}_1^s$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^u &= \bigcup_{(c_2, c_3) \in O_{x_2 x_3}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_1 : (x_2, x_3) = (c_2, c_3)\}, \\ \mathcal{F}_1^s &= \bigcup_{c_1 \in O_{x_1}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_1 : x_1 = c_1\}. \end{aligned}$$

Определим в окрестности \mathcal{N}_2 пару трансверсальных слоений $\mathcal{F}_2^u, \mathcal{F}_2^s$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^u &= \bigcup_{c_3 \in O_{x_3}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_2 : x_3 = c_3\}, \\ \mathcal{F}_2^s &= \bigcup_{(c_1, c_2) \in O_{x_1 x_2}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_2 : (x_1, x_2) = (c_1, c_2)\}.\end{aligned}$$

Определим диффеоморфизмы $\nu_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, 2\}$, формулами

$$\nu_1(x_1, x_2, x_3) = \left(2x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}\right), \quad \nu_2 = \nu_1^{-1}.$$

Заметим, что для $i \in \{1, 2\}$ множество \mathcal{N}_i^t является инвариантным относительно диффеоморфизма ν_i , который переводит слои слоения \mathcal{F}_i^u (или \mathcal{F}_i^s) в слои этого же слоения.

В силу [14] седловая точка σ_f^i диффеоморфизма $f \in G$ обладает *линеаризующей окрестностью* N_f^i , оснащенной гомеоморфизмом $\mu_i: N_f^i \rightarrow \mathcal{N}_i$, который сопрягает диффеоморфизм $f|_{N_f^i}$ с диффеоморфизмом $\nu_i|_{\mathcal{N}_i}$ и является диффеоморфизмом на $N_f^i \setminus (W_{\sigma_f^i}^s \cup W_{\sigma_f^i}^u)$. Слоения $\mathcal{F}_i^u, \mathcal{F}_i^s$ индуцируют (посредством гомеоморфизма μ_i^{-1}) f -инвариантные слоения F_i^u, F_i^s на линеаризующей окрестности N_f^i . Для любой точки $x \in N_f^i$ будем обозначать через $F_{i,x}^u$ (или $F_{i,x}^s$) единственный слой слоения F_i^u (соответственно F_i^s), проходящий через точку x .

Если множество H_f пусто, то набор N_f непересекающихся линеаризующих окрестностей N_f^1, N_f^2 седловых точек диффеоморфизма f назовем *согласованной системой окрестностей*, а слоения F_i^s, F_i^u ($i = 1, 2$) назовем *согласованными*.

Если $H_f \neq \emptyset$, то выберем f -инвариантную трубчатую окрестность $N_{H_f} \subset M^3$ кривых множества H_f , оснащенную f -инвариантным $C^{1,1}$ -слоением F , состоящим из двумерных дисков, трансверсальных к H_f . Для любой точки $x \in N_{H_f}$ будем обозначать через F_x единственный слой слоения F , проходящий через эту точку.

Назовем объединение N_f линеаризующих окрестностей N_f^1 и N_f^2 седловых точек диффеоморфизма f *согласованной системой окрестностей*, а слоения F_i^s, F_i^u ($i = 1, 2$) *согласованными*, если для любой точки $x \in (N_f^1 \cap N_f^2 \cap N_{H_f})$ и слоя F_x слоения F , проходящего через точку x , выполняются следующие условия (см. рис. 7):

$$F_{1,x}^s \cap F_x = F_{2,x}^s \cap (N_f^1 \cap N_{H_f}), \quad F_{2,x}^u \cap F_x = F_{1,x}^u \cap (N_f^2 \cap N_{H_f}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [14; теорема 1]. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует согласованная система окрестностей.*

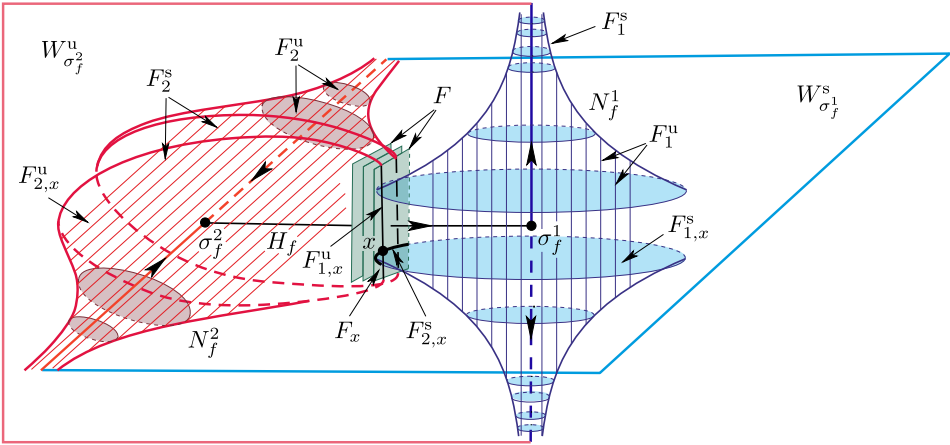


Рис. 7. Согласованная система окрестностей.

2.2. Пространства блуждающих орбит. Рассмотрим пространства

$$V_{\omega_f} = W_{\omega_f}^s \setminus \omega_f \quad \text{и} \quad \widehat{V}_{\omega_f} = V_{\omega_f}/f.$$

Обозначим через $p_{\omega_f} : V_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_f}$ естественную проекцию. Положим (см. рис. 8)

$$\widehat{A}_f = p_{\omega_f}(A_f \setminus \sigma_f^1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [25; теорема 2.1.3]. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ справедливо следующее:*

- 1) пространство \widehat{V}_{ω_f} диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$;
- 2) проекция p_{ω_f} является накрытием;

3) множество \widehat{A}_f состоит из пары непересекающихся узлов $L_f^1 \sqcup L_f^2$ в \widehat{V}_{ω_f} таких, что отображение

$$i_{L_f^{i,*}} : \pi_1(L_f^i) \rightarrow \pi_1(\widehat{V}_{\omega_f}), \quad i \in \{1, 2\},$$

является изоморфизмом.

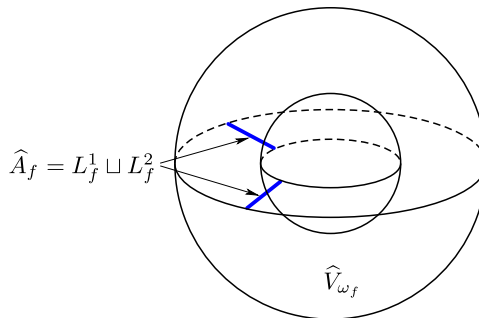


Рис. 8. Факторпространство \widehat{V}_{ω_f} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 [25; лемма 4.4]. Множество $p_{\omega_f}(N_f^1)$ является дизъюнктным объединением двух заполненных торов $N_{L_f^1}, N_{L_f^2}$, являющихся трубчатymi окрестностями узлов L_f^1, L_f^2 соответственно. Если хотя бы одно из множеств $\widehat{V}_{\omega_f} \setminus \text{int } N_{L_f^1}$ и $\widehat{V}_{\omega_f} \setminus \text{int } N_{L_f^2}$ не гомеоморфно заполненному тору, то многообразие $W_{\sigma_f^1}^u$ дико вложено в несущее многообразие M^3 .

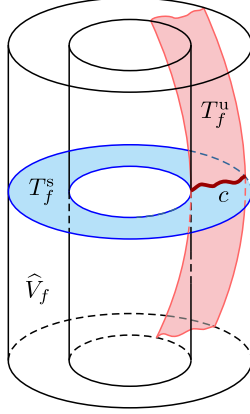


Рис. 9. Факторпространство \widehat{V}_f .

В силу предложения 1.10 множества A_f и R_f являются дуальными аттрактором и репеллером соответственно для диффеоморфизма f . Положим

$$V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f).$$

В силу предложения 1.11 пространство орбит $\widehat{V}_f = V_f/f$ является гладким замкнутым ориентируемым 3-многообразием, а естественная проекция $p_f: V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм

$$\eta_f: \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z},$$

ставящий в соответствие элементу $[\widehat{c}] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что любое поднятие элемента \widehat{c} соединяет точку $x \in V_f$ с точкой $f^n(x)$. Положим (см. рис. 9)

$$T_f^s = p_f(W_{\sigma_f^1}^s \setminus \sigma_f^1), \quad T_f^u = p_f(W_{\sigma_f^2}^u \setminus \sigma_f^2), \quad C_f = p_f(H_f).$$

В силу предложений 1.9 и 1.11 множества T_f^s и T_f^u являются гладко вложенными в \widehat{V}_f двумерными торами такими, что

$$\eta_f(i_{T_f^s*}(\pi_1(T_f^s))) = \eta_f(i_{T_f^u*}(\pi_1(T_f^u))) \cong \mathbb{Z}.$$

Основным результатом раздела является следующая лемма.

ЛЕММА 2.1 [62; лемма 2]. Для любого диффеоморфизма $f \in G$ справедливо следующее:

- 1) множество \widehat{V}_f является связным неприводимым замкнутым 3-многообразием, и торы T_f^s, T_f^u являются несжимаемыми в нем;
- 2) множество C_f состоит из конечного числа узлов c , при этом $\eta_f([c]) = 0$ тогда и только тогда, когда узел $c \subset C_f$ является проекцией компактной гетероклинической кривой;
- 3) любой узел $c \subset C_f$ такой, что $\eta_f([c]) = 0$, является стягиваемым (либо не стягиваемым) одновременно на обоих торах T_f^s и T_f^u (см. рис. 10).

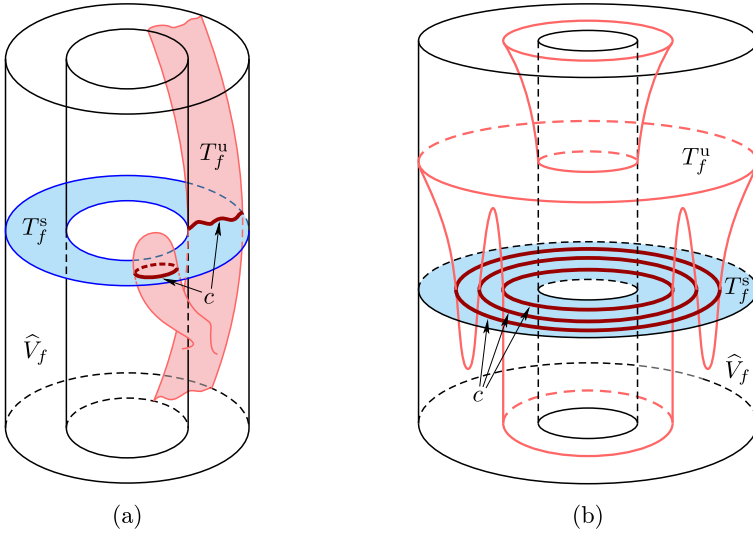


Рис. 10. Варианты расположения узлов в \widehat{V}_f : (а) узлы, стягиваемые на обоих торах; (б) нестягиваемые узлы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем последовательно все утверждения леммы.

1) В силу предложений 1.10 и 1.11 многообразие \widehat{V}_f является связным, замкнутым, простым 3-многообразием. Так как тор T_f^s является η_f -существенным в \widehat{V}_f , то он не лежит в 3-шаре. Покажем от противного, что тор T_f^s не ограничивает заполненный тор в \widehat{V}_f . Отсюда в силу предложения 1.2 будет следовать, что многообразие \widehat{V}_f не гомеоморфно $S^2 \times S^1$ и, значит, является неприводимым, а в силу предложения 1.4 тор T_f^s является несжимаемым в \widehat{V}_f .

Если предположить, что тор T_f^s ограничивает в \widehat{V}_f заполненный тор, то $\widehat{V}_f \setminus T_f^s$ состоит из двух компонент связности. С другой стороны, в силу предложения 1.7

$$M^3 = W_{\omega_f}^s \cup W_{\alpha_f^1}^s \cup W_{\alpha_f^2}^s \cup W_{\alpha_f}^s.$$

Тогда $V_f \setminus W_{\alpha_f^1}^s = W_{\omega_f}^s \setminus A_f$, и, следовательно, многообразия $\widehat{V}_f \setminus T_f^s$ и $\widehat{W}_{\omega_f} \setminus \widehat{A}_f$ гомеоморфны. Поскольку одномерное подмногообразие не делит многообразие

размерности 3 (см. предложение 1.5), то множество $\widehat{V}_{\omega_f} \setminus \widehat{A}_f$ является связным (см. рис. 8). Получили противоречие с тем, что связное многообразие гомеоморфно не связному.

2) Непосредственно из определения эпиморфизма η_f следует, что равенство $\eta_f([c]) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $c \subset C_f$ – проекция компактной гетероклинической кривой.

3) Предположим, что некоторый узел $c \subset C_f$ стягиваем на торе T_f^u и является существенным на торе T_f^s . Тогда по определению тор T_f^s является сжимаемым в \widehat{V}_f , что противоречит доказанному пункту 1).

Лемма доказана.

Обозначим через C_f^0 подмножество C_f , состоящее из стягиваемых на торах T_f^u и T_f^s кривых. Назовем кривые множества $H_f^0 = p_f^{-1}(C_f^0)$ *несущественными*; оставшиеся гетероклинические кривые будем называть *существенными*.

3. Тривиализация динамики диффеоморфизмов класса G

Напомним, что для любого диффеоморфизма $f \in G$ мы ввели понятие гетероклинического индекса I_f следующим образом. Если множество H_f не содержит некомпактных кривых, то полагаем $I_f = 0$. В противном случае обозначим через \tilde{H}_f подмножество, состоящее из некомпактных кривых. Так как любая кривая $\gamma \subset \tilde{H}_f$ содержит вместе с любой точкой $x \in \gamma$ точку $f(x)$, будем считать кривую γ ориентированной в направлении от x к $f(x)$. Также зафиксируем ориентацию на многообразиях $W_{\sigma_1}^s$ и $W_{\sigma_2}^u$. Для некомпактной гетероклинической кривой γ обозначим через

$$v_\gamma = (\vec{v}_\gamma^1, \vec{v}_\gamma^2, \vec{v}_\gamma^3)$$

тройку векторов с началом в точке $x \in \gamma$ таких, что

- \vec{v}_γ^1 – вектор нормали к $W_{\sigma_1}^s$,
- \vec{v}_γ^2 – вектор нормали к $W_{\sigma_2}^u$,
- \vec{v}_γ^3 – касательный вектор к ориентированной кривой γ .

Назовем v_γ *репером некомпактной гетероклинической кривой γ* (см. рис. 11).

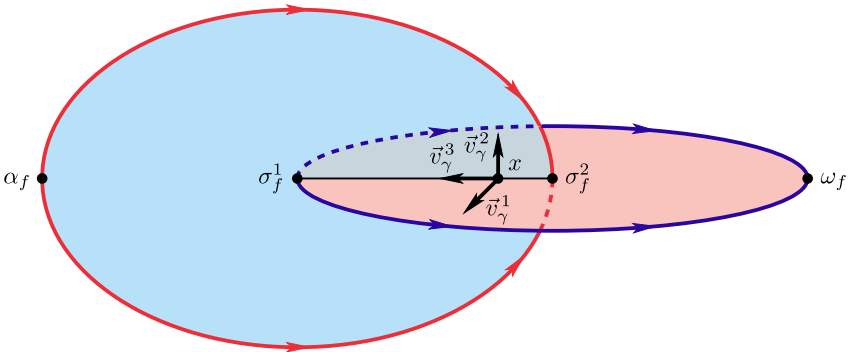


Рис. 11. Репер некомпактной гетероклинической кривой.

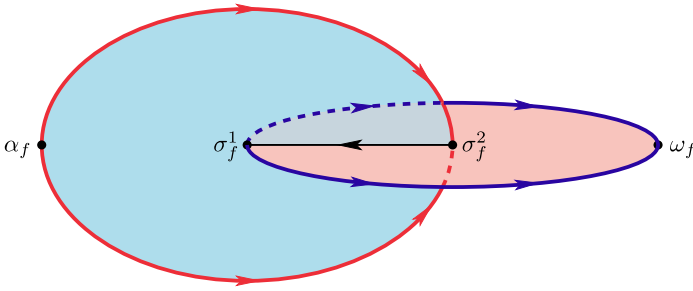


Рис. 12. Диффеоморфизм $f \in G_1^+$.

Очевидно, что ориентация (правая или левая) репера v_γ не зависит от выбора точки x на γ . Положим $I_\gamma = +1$ ($I_\gamma = -1$) в случае положительной (отрицательной) ориентации. Число $I_f = \left| \sum_{\gamma \subset \bar{H}_f} I_\gamma \right|$ назовем *гетероклиническим индексом* диффеоморфизма f .

Для целого числа $p \geq 0$ обозначим через $G_p \subset G$ подмножество диффеоморфизмов $f \in G$ таких, что $I_f = p$. Например, на рис. 6 изображен фазовый портрет диффеоморфизма из класса G_0 , а на рис. 12 – фазовый портрет диффеоморфизма из класса G_1 .

Заметим, что любая существенная компактная гетероклиническая кривая $\gamma \subset H_f$ ограничивает диск $d_\gamma \subset W_{\sigma_f^1}^s$, содержащий седло σ_f^1 . Будем считать любую такую кривую ориентированной так, что при движении вдоль нее диск d_γ остается слева. Тогда для кривой γ , аналогично случаю некомпактной кривой, определяется ее *репер* v_γ .

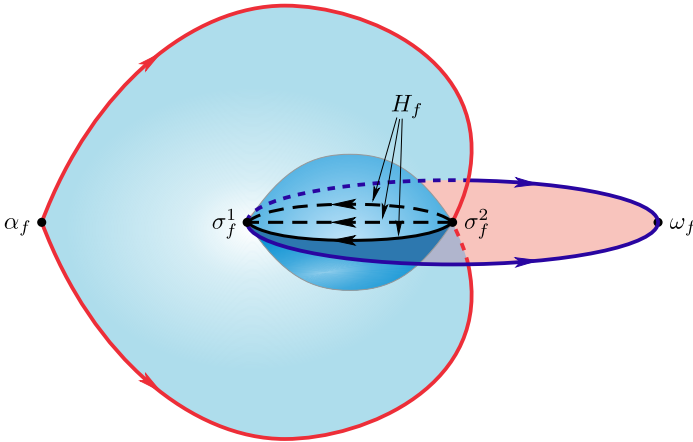


Рис. 13. Диффеоморфизм $f \in G_1$ с неориентируемым множеством H_f , состоящим из трех некомпактных кривых.

Множество H_f назовем *ориентируемым*, если оно состоит только из существенных гетероклинических кривых, все реперы которых имеют одинаковую ориентацию. В противном случае множество H_f назовем *неориентируемым*.

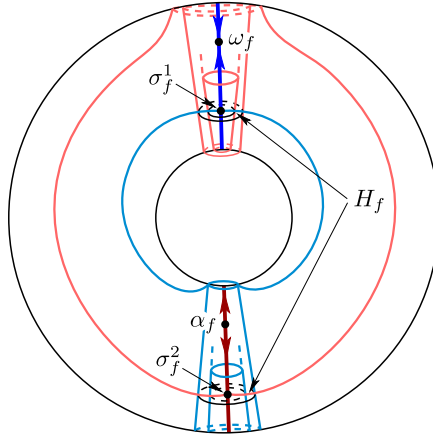


Рис. 14. Диффеоморфизм $f \in G_0^+$ с ориентируемым множеством H_f , состоящим из бесконечного множества компактных кривых.

(см. рис. 13). Обозначим через $G_p^+ \subset G_p$, $p \geq 0$, подмножество диффеоморфизмов $f \in G_p$ с ориентируемым множеством H_f (см. рис. 12).

Таким образом, у любого диффеоморфизма $f \in G_p^+$ множество H_f или пусто, или состоит либо только из некомпактных, либо только из компактных гетероклинических кривых (см. рис. 14).

Основным результатом настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1 [55; теорема 1]. *Для любого диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ из класса G_p , $p \geq 0$, существует изотопный ему диффеоморфизм $f_+ \in G_p^+$.*

Доказательство теоремы будет следовать непосредственно из лемм 3.1, 3.2, доказываемых ниже.

3.1. Сценарий исчезновения несущественных гетероклинических кривых. Обозначим через $\tilde{G}_p \subset G_p$ подкласс диффеоморфизмов f , для которых множество H_f^0 пусто.

Основным результатом настоящего пункта является доказательство следующего факта.

ЛЕММА 3.1 [62; теорема 1]. *Для любого диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ из класса G_p существует дуга в множестве $\text{Diff}(M^3)$, соединяющая диффеоморфизм f с некоторым диффеоморфизмом $\tilde{f} \in \tilde{G}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in G_p$. Если $H_f^0 = \emptyset$, то лемма доказана. В противном случае в силу леммы 2.1 для любого узла $c \in C_f^0$ существует единственный диск d_c^s такой, что $d_c^s \subset T_f^s$, $c = \partial d_c^s$; аналогичный диск $d_c^u \subset T_f^u$ узел $c = \partial d_c^u$ ограничивает на торе T_f^u (см. рис. 15, (а)).

Среди кривых множества C_f^0 выберем *крайнюю кривую* c , т. е. такую, что

$$\text{int } d_c^s \cap C_f^0 = \emptyset.$$

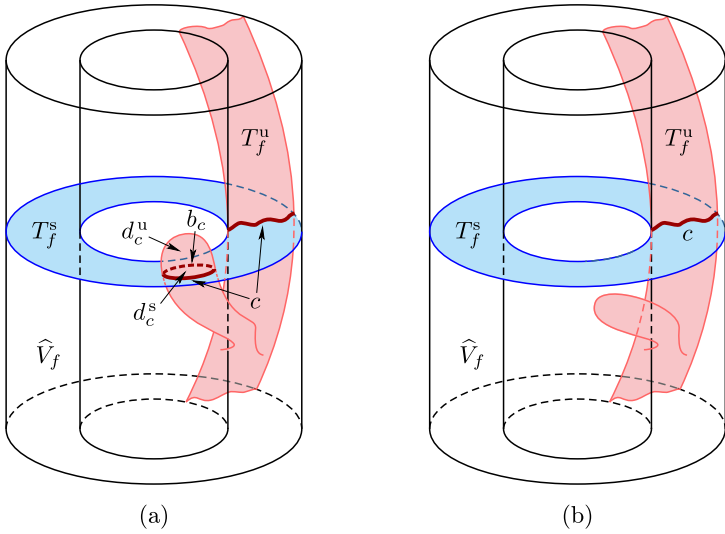


Рис. 15. Построение 3-шара b_c .

Поскольку $d_c^s \cap d_c^u = c$, то множество $d_c^s \cup d_c^u$ является цилиндрически вложенной в многообразии \widehat{V}_f двумерной сферой. В силу леммы 2.1 многообразие \widehat{V}_f неприводимо, и, следовательно, эта сфера ограничивает в нем единственный трехмерный шар b_c . Обозначим через $T_{f,c}^u$ двумерный тор, полученный сглаживанием тора $(T_f^u \setminus d_c^u) \cup d_c^s$ (см. рис. 15, (b)). Тогда существует изотопный тождественному диффеоморфизм $\widehat{h}: \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_f$ такой, что $\widehat{h}(T_f^u) = T_{f,c}^u$. По предложению 1.12 существует дуга $\zeta_t \subset E_f$ такая, что

$$\zeta_0 = f \quad \text{и} \quad T_{\zeta_1}^u = T_{f,c}^u, \quad T_{\zeta_1}^s = T_f^s.$$

Повторяя этот процесс для каждой крайней кривой, мы получаем требуемый диффеоморфизм $\tilde{f} \in \widetilde{G}_p$. Лемма доказана.

3.2. Сценарий исчезновения неориентируемых гетероклинических кривых. Основным результатом настоящего пункта является доказательство следующего факта.

ЛЕММА 3.2 [55; теорема 1]. *Для любого диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ из класса \widetilde{G}_p существует дуга в множестве $\text{Diff}(M^3)$, соединяющая диффеоморфизм f с некоторым диффеоморфизмом $f_+ \in G_p^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \widetilde{G}_p$.

Если множество H_f пусто или ориентируемо, то лемма доказана. В противном случае C_f состоит из нестягиваемых попарно гомотопных друг другу на каждом из торов T_f^s, T_f^u узлов (см., например, [61]), и среди них есть узлы c_+ и c_- с репером, ориентированным положительно и отрицательно соответственно (см. рис. 16, 17).

Покажем, что число кривых в множестве H_f можно уменьшить как минимум на два.

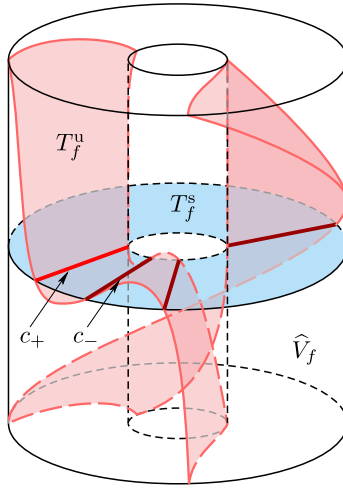


Рис. 16. Проекция некомпактных гетероклинических кривых с реперами разной ориентации в пространство \widehat{V}_f .

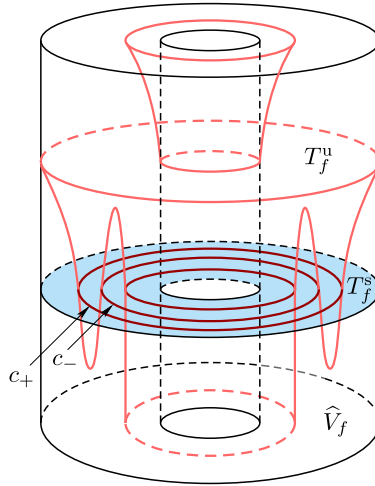


Рис. 17. Проекция компактных гетероклинических кривых с реперами разной ориентации в пространство \widehat{V}_f .

Для этого положим

$$Y_f = p_{\omega_f}(W_{\sigma_f^2}^u \cap V_{\omega_f}) \quad \text{и} \quad \widehat{N}_f^1 = p_{\omega_f}(N_f^1 \cap V_{\omega_f}).$$

Тогда множество \widehat{N}_f^1 является дизъюнктивным объединением двух заполненных торов $N_{L_f^1}$, $N_{L_f^2}$, являющихся трубчатыми окрестностями узлов Хопфа L_f^1 , L_f^2 соответственно. При этом множество $Y_f \setminus \text{int} \widehat{N}_f^1$ состоит из конечного числа колец, границы которых лежат на торах $T_f^1 = \partial N_{L_f^1}$, $T_f^2 = \partial N_{L_f^2}$. В силу неориентируемости множества H_f существует компонента связности K^u

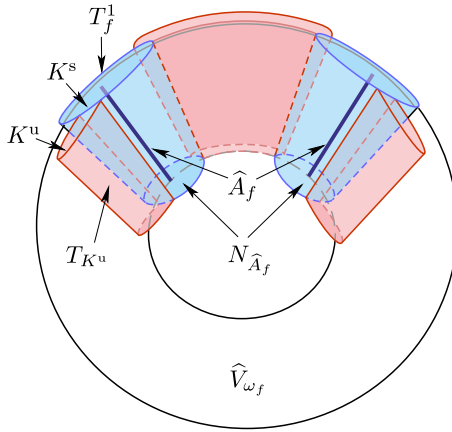


Рис. 18. Проекция инвариантных седловых многообразий в пространство \widehat{V}_{ω_f} , соответствующие рис. 16.

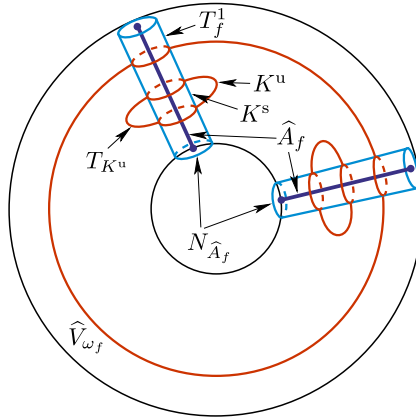


Рис. 19. Проекция инвариантных седловых многообразий в пространство \widehat{V}_{ω_f} , соответствующие рис. 17.

множества $Y_f \setminus \text{int } \widehat{N}_f^1$, имеющая граничные окружности на одной и той же компоненте связности множества $\partial \widehat{N}_f^1$ (для определенности будем считать, что на T_f^1). Тогда окружности ∂K^u делят тор T_f^1 на два кольца, каждое из которых K^s образует в объединении с кольцом K^u двумерный тор T_{K^u} . Покажем, что K^s можно выбрать так, что тор T_{K^u} ограничивает заполненный тор Q_{K^u} , внутренность которого не пересекает \widehat{N}_f^1 в \widehat{V}_{ω_f} (см. рис. 18, 19).

Поскольку тор T_f^1 гомотопически нетривиален в \widehat{V}_{ω_f} , то кольцо K^u можно выбрать так, что тор T_{K^u} также гомотопически нетривиален. В силу предложения 1.2 тор T_{K^u} ограничивает заполненный тор Q_{K^u} в \widehat{V}_{ω_f} . Если $N_{L_f^1} \subset Q_{K^u}$, то по построению $\text{cl}(Q_{K^u}) \setminus N_{L_f^1}$ – также заполненный тор, ограниченный то-

ром, построенным по второму кольцу K^s . Поэтому везде далее мы полагаем, что $Q_{K^u} \cap \widehat{N}_{L_f^1} = K^s$.

Таким образом, с каждым кольцом K^u связан тор T_{K^u} , ограничивающий заполненный тор Q_{K^u} в \widehat{V}_f . Поскольку в силу предложения 1.4 любой тор, гомотопически нетривиально вложенный в заполненный тор, ограничивает там единственный заполненный тор, то среди всех таких заполненных торов Q_{K^u} существует такой $Q_{K_0^u}$, чья внутренность не пересекается с кольцами K^u . Тогда внутренность тора $Q_{K_0^u}$ не пересекается с торами \widehat{N}_f^1 и $Q_{K_0^u} \cap Y_f = K_0^u$. Обозначим через K_0^s вторую половину тора $T_{K_0^u}$.

Положим

$$N_{T_f^s} = p_f(N_f^1 \cap V_f), \quad N_{T_f^u} = p_f(N_f^2 \cap V_f).$$

Обозначим через \mathcal{K}_0^u компоненту связности множества $T_f^u \setminus C_f$ такую, что $p_f(p_{\omega_f}^{-1}(K_0^u)) \subset \mathcal{K}_0^u$, и через \mathcal{K}_0^s компоненту связности множества $T_f^s \setminus C_f$ такую, что кольца $p_f(p_{\omega_f}^{-1}(K_0^s))$, \mathcal{K}_0^s лежат в одной и той же компоненте связности N_0^s множества $N_{T_f^s} \setminus T_f^u$. Обозначим через $\mathcal{K}_0^{s'}$ компоненту связности множества $\partial N_{T_f^s} \cap N_0^s$, отличную от $p_f(p_{\omega_f}^{-1}(K_0^s))$. Положим

$$\mathcal{K}_0^{u'} = \mathcal{K}_0^u \cup (\text{cl}(N_0^s) \cap T_f^u).$$

По построению $\partial \mathcal{K}_0^s = \partial \mathcal{K}_0^u = c_+ \sqcup c_-$, где $c_+ \subset C_f$ и $c_- \subset C_f$ – нестягиваемые кривые с положительно и отрицательно ориентированным репером соответственно. Кроме того, тор $\mathcal{T}_0 = \mathcal{K}_0^u \cup \mathcal{K}_0^s$ ограничивает заполненный тор \mathcal{Q}_0 в \widehat{V}_f , внутренность которого не пересекается с множеством $T_f^u \cup T_f^s$. Обозначим через $T_f^{u'}$ двумерный тор, полученный сглаживанием тора $(T_f^u \setminus \mathcal{K}_0^{u'}) \cup \mathcal{K}_0^{s'}$. Поскольку тор $\mathcal{T}_0' = \mathcal{K}_0^{u'} \cup \mathcal{K}_0^{s'}$ ограничивает заполненный тор \mathcal{Q}_0' в \widehat{V}_f , внутренность которого не пересекается с тором T_f^u , то существует изотопный тождественному диффеоморфизм $\widehat{h}: \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_f$ такой, что $\widehat{h}(T_f^u) = T_f^{u'}$. Тогда в силу предложения 1.12 существует дуга $\zeta_t \subset E_f$ такая, что

$$\zeta_0 = f, \quad \zeta_1 = f' \quad \text{и} \quad T_{f'}^u = T_f^{u'}, \quad T_{f'}^s = T_f^s.$$

Таким образом, диффеоморфизм $f' \in G$ задан на том же многообразии M^3 , что и диффеоморфизм f , но имеет на две гетероклинические кривые меньше. Продолжая этот процесс, мы построим дугу, соединяющую диффеоморфизм f с некоторым диффеоморфизмом $f_+ \in G_p^+$. Лемма доказана.

4. Узел Хопфа как полный инвариант диффеоморфизмов класса G_1^+ . Топологическая классификация диффеоморфизмов класса G_1^+

В настоящем разделе приводится полная топологическая классификация диффеоморфизмов класса G_1^+ , включая реализацию.

Пусть $f \in G_1^+$. Обозначим через ℓ_f^1, ℓ_f^2 неустойчивые сепаратрисы точки σ_f^1 . В силу предложения 1.8 замыкание $\text{cl}(\ell_f^i)$ ($i = 1, 2$) одномерной неустойчивой сепаратрисы точки σ_f^1 гомеоморфно простой компактной дуге и состоит из этой сепаратрисы и двух точек: точки σ_f^1 и стока ω_f (см. рис. 12). Согласно

предложению 1.7 пространство орбит бассейна стока \widehat{V}_{ω_f} диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (везде далее мы будем отождествлять эти многообразия), и подмножество $L_f^i = p_{\omega_f}(\ell_f^i)$, $i = 1, 2$, является узлом Хопфа в нем.

4.1. Эквивалентность узлов L_f^1, L_f^2 .

ЛЕММА 4.1 [57; лемма 1.1]. *Для любого диффеоморфизма $f \in G_1^+$ узлы L_f^1, L_f^2 являются изотопными.*

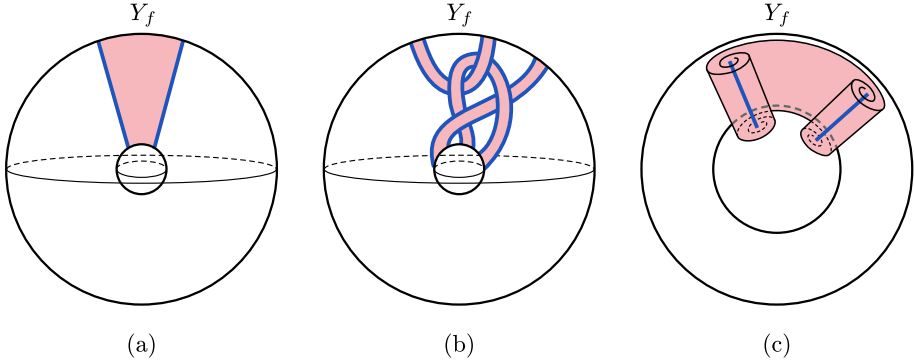


Рис. 20. Возможные варианты проекции Y_f двумерного неустойчивого седлового многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим (см. рис. 20)

$$Y_f = p_{\omega_f}(W_{\sigma_f^2}^u \cap V_{\omega_f}).$$

Согласно предложению 1.9 пространство орбит $(W_{\sigma_f^2}^u \setminus \sigma_f^2)/f$ гомеоморфно двумерному тору, и пространство орбит H_f/f гомеоморфно окружности, являющейся нетривиальным узлом на торе $(W_{\sigma_f^2}^u \setminus \sigma_f^2)/f$. Так как

$$W_{\sigma_f^2}^u \cap V_{\omega_f} = W_{\sigma_f^2}^u \setminus (H_f \cup \sigma_f^2),$$

то множество Y_f гомеоморфно двумерному кольцу; при этом гомоморфизм $i_{Y_f^*}$, индуцированный включением $i_{Y_f}: Y_f \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, является изоморфизмом групп

$$\pi_1(Y_f) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Поскольку $N_f^1 \cap V_{\omega_f} = N_f^1 \setminus W_{\sigma_f^1}^s$, то множество

$$\widehat{N}_f^1 = p_{\omega_f}(N_f^1)$$

является дизъюнктным объединением двух заполненных торов, являющихся трубчатыми окрестностями узлов L_f^1, L_f^2 : $\widehat{N}_f^1 = N_{L_f^1} \sqcup N_{L_f^2}$. Положим (см. рис. 21)

$$T_f^i = \partial N_{L_f^i}, \quad S_f^i = T_f^i \cap Y_f.$$

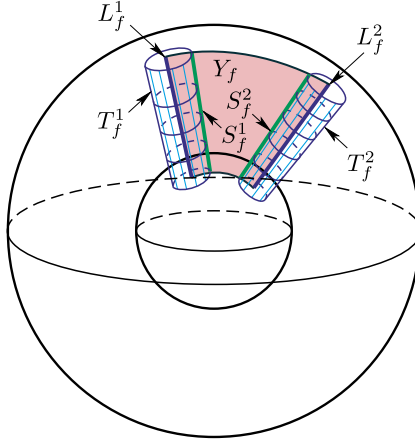


Рис. 21. Трубочатые окрестности узлов L_f^1, L_f^2 .

Поскольку множество $H_f = W_{\sigma_f^1}^s \cap W_{\sigma_f^2}^u$ состоит из единственной некомпактной f -инвариантной кривой, то множество $\partial N_f^1 \cap W_{\sigma_f^2}^u$ состоит из двух некомпактных f -инвариантных кривых, проекцией которых в многообразии $\widehat{V}_{\omega_f} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ являются узлы $S_f^1 \sqcup S_f^2$. Отсюда следует, что S_f^1, S_f^2 – изотопные хопфовские узлы.

Таким образом, узлы S_f^i, L_f^i являются образующими заполненного тора $N_{L_f^i}$. Тогда они ограничивают в нем двумерное кольцо и, следовательно, являются изотопными. Лемма доказана.

4.2. Класс эквивалентности узла Хопфа как полный инвариант топологической сопряженности в классе G . Из леммы 4.1 и теоремы Тома о продолжении изотопии (см., например, [40]) следует, что хопфовские узлы L_f^1, L_f^2 эквивалентны. Обозначим через $\mathcal{L}_f = [L_f^1] = [L_f^2]$ класс эквивалентности этих узлов.

ТЕОРЕМА 2 [57; теорема 1.1]. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G_1^+$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (\Rightarrow) Пусть диффеоморфизмы

$$f: M^3 \rightarrow M^3, \quad f': M'^3 \rightarrow M'^3, \quad f, f' \in G_1^+,$$

топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма $h: M^3 \rightarrow M'^3$. Поскольку h переводит инвариантные многообразия неподвижных точек диффеоморфизма f в инвариантные многообразия диффеоморфизма f' с сохранением устойчивости, то

$$h(W_{\omega_f}^s) = W_{\omega_{f'}}^s, \quad h(\ell_f^i) = \ell_{f'}^i.$$

Так как $hf = f'h$, то гомеоморфизм h определяет гомеоморфизм $\widehat{h}: \widehat{V}_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_{f'}}$ формулой

$$\widehat{h} = p_{\omega_{f'}} h p_{\omega_f}^{-1}.$$

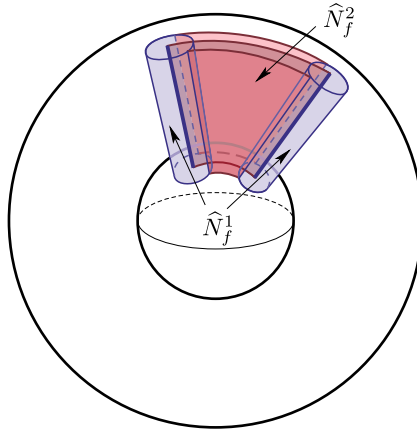


Рис. 22. Проекция согласованных окрестностей.

Откуда вытекает, что $\widehat{h}(L_f^i) = L_{f'}^i$ и, следовательно, хопфовские узлы $L_f^i, L_{f'}^i$ эквивалентны.

(\Leftarrow) Пусть $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$. По шагам построим гомеоморфизм $h: M^3 \rightarrow M^3$, сопрягающий диффеоморфизмы f и f' . Для этого мы будем использовать обозначения леммы 4.1 и п. 2.1, которые будем снабжать штрихом в случае диффеоморфизма f' . Положим (см. рис. 22)

$$\widehat{N}_f^2 = p_{\omega_f}(N_f^2 \cap V_{\omega_f}), \quad \widehat{N}_f = \widehat{N}_f^1 \cup \widehat{N}_f^2.$$

Шаг 1: построим гомеоморфизм $\widehat{h}_1: \widehat{V}_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_{f'}}$ такой, что $\widehat{h}_1(\widehat{N}_f) = \widehat{N}_{f'}$. Выберем нестягиваемый узел L_f на кольце $Y_f \setminus \widehat{N}_f^1$ и нестягиваемый узел $L_{f'}$ на кольце $Y_{f'} \setminus \widehat{N}_{f'}^1$. Из леммы 4.1 следует, что $[L_f] = \mathcal{L}_f$ и $[L_{f'}] = \mathcal{L}_{f'}$. Поскольку $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$, то по теореме Тома существует гомеоморфизм $\widehat{h}_0: \widehat{V}_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_{f'}}$ такой, что $\widehat{h}_0(L_f) = L_{f'}$. В силу предложения 1.6 этот гомеоморфизм можно считать диффеоморфизмом. Поскольку кольца $Y_f, Y_{f'}$ являются гладкими, то также, не уменьшая общности, можно считать, что $\widehat{h}_0(Y_f) \subset Y_{f'}$ в некоторой окрестности узла $L_{f'}$.

Пусть

$$\widetilde{N}_f = \widehat{h}_0^{-1}(\widehat{N}_{f'}), \quad \widetilde{N}_f^1 = \widehat{h}_0^{-1}(\widehat{N}_{f'}^1), \quad \widetilde{Y}_f = \widehat{h}_0^{-1}(Y_{f'}),$$

и $J_f \subset \widehat{V}_f$ – гладкое двумерное кольцо, трансверсальное \widehat{N}_f и \widetilde{N}_f и такое, что $\widehat{J}_f = J_f \cap \widehat{N}_f, \widetilde{J}_f = J_f \cap \widetilde{N}_f$ – двумерные кольца, принадлежащие $\widehat{N}_f \setminus \widehat{N}_f^1, \widetilde{N}_f \setminus \widetilde{N}_f^1$ и содержащие узел L_f в своей внутренней (см. рис. 23). Из леммы 4.1 следует, что $\widehat{N}_f, \widetilde{N}_f$ – трубчатые окрестности узла L_f . Выберем трубчатые окрестности W, U, \widetilde{U} узла L_f так, что

$$W \subset \text{int}(\widehat{N}_f \cap \widetilde{N}_f), \quad \widehat{N}_f \subset \text{int } U, \quad \widetilde{N}_f \subset \text{int } \widetilde{U}$$

и каждая из них пересекает J_f по двумерному кольцу. Поскольку множества

$$\widehat{N}_f \setminus \text{int } W, \quad U \setminus \text{int } \widehat{N}_f, \quad \widetilde{N}_f \setminus \text{int } W, \quad \widetilde{U} \setminus \text{int } \widetilde{N}_f$$

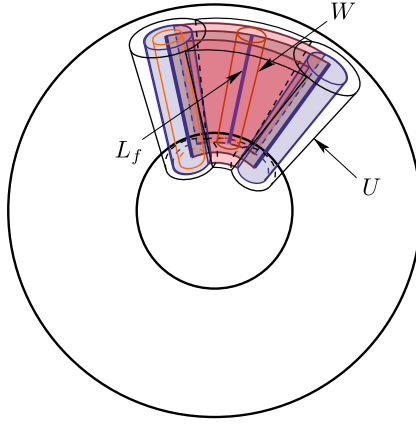


Рис. 23. Трубочатые окрестности узла L_f .

гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, то существуют гомеоморфизм

$$\widehat{\psi}: \widehat{V}_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_f},$$

тождественный на W и вне U и такой, что

$$\widehat{\psi}(\widehat{N}_f) = W, \quad \widehat{\psi}(\widehat{J}_f) = \widehat{J}_f,$$

и гомеоморфизм

$$\widetilde{\psi}: \widehat{V}_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_f},$$

тождественный на W и вне \widetilde{U} и такой, что

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{N}_f) = W, \quad \widetilde{\psi}(\widetilde{J}_f) = \widetilde{J}_f.$$

Тогда искомый гомеоморфизм \widehat{h}_1 имеет вид

$$\widehat{h}_1 = \widehat{h}_0 \widetilde{\psi}^{-1} \widehat{\psi}.$$

Шаг 2: построим гомеоморфизм $\widehat{h}_2: \widehat{V}_{\omega_f} \rightarrow \widehat{V}_{\omega_{f'}}$, совпадающий с \widehat{h}_1 вне \widehat{N}_f и такой, что $\widehat{h}(Y_f) = Y_{f'}$. Для этого напомним, что линейризирующая окрестность N_f^1 оснащена гомеоморфизмом

$$\mu_1: N_f^1 \rightarrow \mathcal{N}_1,$$

где

$$\mathcal{N}_1^t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1^2(x_2^2 + x_3^2) < t\}, \quad t \in (0, 1],$$

и

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1^1,$$

причем гомеоморфизм μ_1 сопрягает диффеоморфизм $f|_{N_f^1}$ с диффеоморфизмом $\nu_1|_{\mathcal{N}_1}$, заданным формулой $\nu_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2/2, x_3/2)$. Аналогичные обозначения со штрихом введем для диффеоморфизма f' .

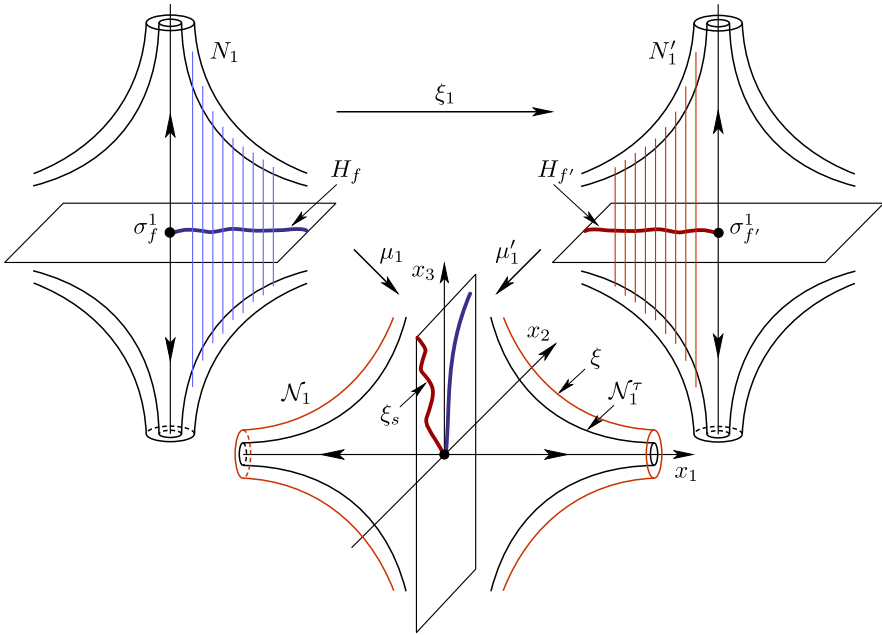


Рис. 24. Построение гомеоморфизма ξ .

Положим $H = \mu_1(H_f)$ и $H' = \mu'_1(H_{f'})$. Тогда H, H' являются ν_1 -инвариантными кривыми на плоскости Ox_2x_3 . Поэтому существует гомеоморфизм $\xi_s: Ox_2x_3 \rightarrow Ox_2x_3$, коммутирующий с $\nu_1|_{Ox_2x_3}$ и такой, что $\xi_s(H) = H'$ (см., например, [25]). Определим гомеоморфизм $\xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулой (см. рис. 24)

$$\xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \xi_s(x_2, x_3)).$$

Выберем $\tau \in (0, 1)$ так, что $\xi(N_1^\tau) \subset \text{int } N_1$. Положим

$$N_1^\tau = \mu_1(N_1^\tau) \quad \text{и} \quad \xi_1 = (\mu'_1)^{-1} \xi \mu_1|_{N_1^\tau}.$$

Из определения согласованной системы окрестностей следует, что

$$\xi_1(N_1^\tau \cap W_{\sigma_f^u}^u) \subset W_{\sigma_{f'}^u}^u.$$

Положим

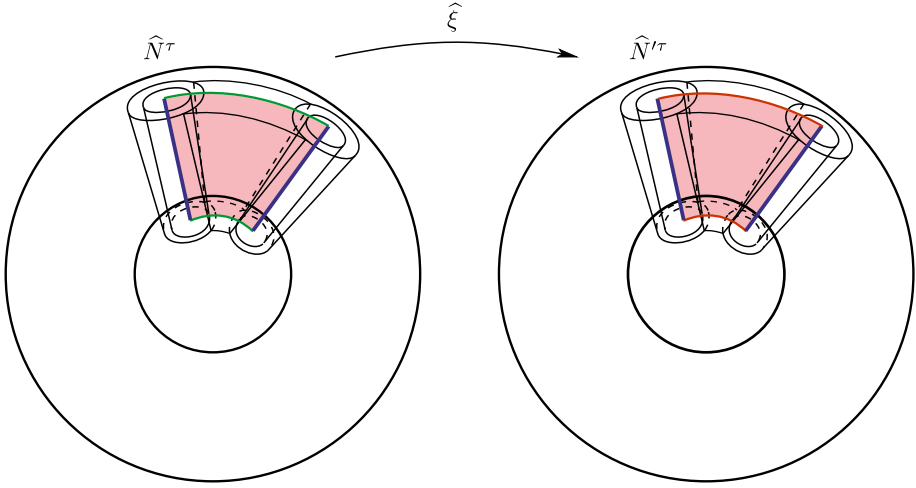
$$\widehat{N}_1^\tau = p_{\omega_f}(N_1^\tau), \quad \widehat{\xi}_1 = p_{\omega_{f'}} \xi_1 p_{\omega_f}^{-1}|_{\widehat{N}_1^\tau} \quad \text{и} \quad \widehat{N}_1^{\prime\tau} = \widehat{\xi}_1(\widehat{N}_1^\tau).$$

Тогда множества $K = Y_f \setminus \text{int } \widehat{N}_1^\tau$, $K' = Y_{f'} \setminus \text{int } \widehat{N}_1^{\prime\tau}$ гомеоморфны двумерным кольцам. Выберем трубчатые окрестности

$$N_K \subset (\text{int } \widehat{N}_f^2 \setminus \text{int } \widehat{N}_1^\tau), \quad N_{K'} \subset (\text{int } \widehat{N}_{f'}^2 \setminus \text{int } \widehat{N}_1^{\prime\tau})$$

колец K, K' так, что пересечение N_K с каждой компонентой связности множества $\partial \widehat{N}_1^\tau$ является двумерным кольцом и

$$\widehat{\xi}_1(N_K \cap \partial \widehat{N}_1^\tau) = N_{K'} \cap \partial \widehat{N}_1^{\prime\tau}.$$

Рис. 25. Построение гомеоморфизма $\hat{\xi}$.

Положим $\hat{N}^\tau = \hat{N}_1^\tau \cup N_K$ и $\hat{N}'^\tau = \hat{N}'_1^\tau \cup N_{K'}$ (см. рис. 25). Тогда гомеоморфизм $\hat{\xi}_1$ продолжается до гомеоморфизма $\hat{\xi}: \hat{N}^\tau \rightarrow \hat{N}'^\tau$ такого, что $\hat{\xi}(Y_f) = Y_{f'}$.

По построению гомеоморфизм $\hat{\psi}_1 = \hat{h}_1^{-1} \hat{\xi}$ обладает свойством $\hat{\psi}_1(\hat{N}^\tau) \subset \text{int } \hat{N}_f$ и гомеоморфизм $\hat{\psi}_1|_{\partial \hat{N}^\tau}$ гомотопен тождественному отображению. Поскольку множества $\hat{N}_f \setminus \text{int } \hat{N}^\tau$ и $\hat{N}_f \setminus \text{int } \hat{\psi}_1(\hat{N}^\tau)$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, то гомеоморфизм $\hat{\psi}_1$ продолжается до гомеоморфизма $\hat{\psi}_1: \hat{V}_{\omega_f} \rightarrow \hat{V}_{\omega_{f'}}$, тождественного вне \hat{N}_f . Тогда искомым гомеоморфизм \hat{h}_2 имеет вид

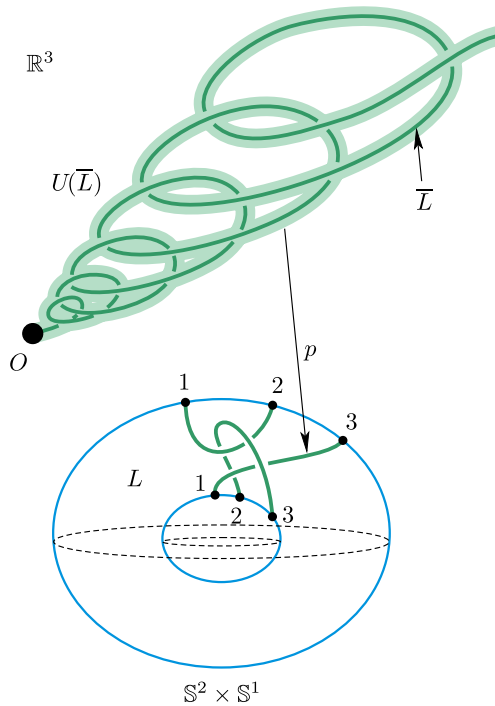
$$\hat{h}_2 = \hat{h}_1 \hat{\psi}_1.$$

Шаг 3: построим искомым гомеоморфизм h . Из построения гомеоморфизма \hat{h}_2 следует, что существует его поднятие $h_2: V_{\omega_f} \rightarrow V_{\omega_{f'}}$, сопрягающее диффеоморфизмы $f|_{V_{\omega_f}}, f'|_{V_{\omega_{f'}}}$ и продолжающееся гомеоморфизмом ξ_1 на $W_{\sigma_f}^s$. Таким образом, мы построили сопрягающий гомеоморфизм всюду, кроме замыканий одномерных многообразий седловых точек. В силу предложения 1.13 такой гомеоморфизм продолжается до искомого гомеоморфизма h . Теорема 2 доказана.

Таким образом, класс эквивалентности \mathcal{L}_f хопфовского узла является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизма $f \in G_1^+$. Более того, имеет место следующая теорема реализации.

4.3. Реализация диффеоморфизмов класса G_1^+ узлами Хопфа.

ТЕОРЕМА 3 [57; теорема 1.2]. *Для любого класса эквивалентности \mathcal{L} хопфовских узлов в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ существует диффеоморфизм $f \in G_1^+$ такой, что $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}$.*

Рис. 26. Поднятие узла Хопфа L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

и $\nu: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – диффеоморфизм, заданный формулой $\nu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/2$. Проекцию $p: \mathbb{R}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ мы определили формулой

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2 \|\mathbf{x}\| \pmod{1} \right).$$

Реализуем любой узел Хопфа диффеоморфизмом $f \in G_1^+$.

Пусть $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – хопфовский узел и $U(L)$ – его трубчатая окрестность. Тогда множество $\bar{L} = p^{-1}(L)$ является ν -инвариантной дугой в $\mathbb{R}^3 \setminus O$, и $U(\bar{L}) = p^{-1}(U(L))$ – ее ν -инвариантная окрестность, диффеоморфная $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^1$ (см. рис. 26). Положим

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$$

и определим поток $g^t: C \rightarrow C$ формулой

$$g^t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3).$$

Тогда существует диффеоморфизм $\zeta: U(L) \rightarrow C$, который сопрягает диффеоморфизмы $\nu|_{U(L)}$ и $g = g^1|_C$. Определим поток ϕ^t на C следующими формулами:

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4)^2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4, \\ 1, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4; \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \frac{x_2}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)\right) - 1 \right), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4, \\ -x_2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4; \end{cases}$$

$$\dot{x}_3 = \begin{cases} -\frac{x_3}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)\right) - 1 \right), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4, \\ x_3, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4. \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $\phi = \phi^1$ имеет два неподвижных гиперболических седла: седло $P_1(-1, 0, 0)$ с индексом Морса 1 и седло $P_2(1, 0, 0)$ с индексом Морса 2 (см. рис. 27). Некомпактная гетероклиническая кривая $W_{P_1}^s \cap W_{P_2}^u$ совпадает с открытым интервалом $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: |x_1| < 1, x_2 = x_3 = 0\}$. Заметим, что ϕ совпадает с диффеоморфизмом $g = g^1$ вне шара $\{\mathbf{x} \in C: \|\mathbf{x}\| \leq 4\}$.

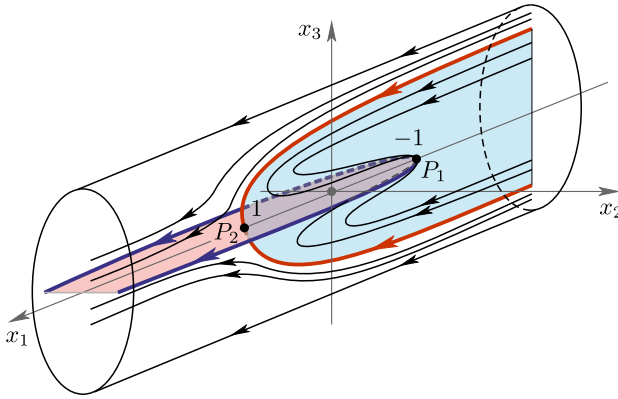


Рис. 27. Траектории потока ϕ^t .

Определим диффеоморфизм $\bar{f}_L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким образом, что \bar{f}_L совпадает с ν вне $U(L)$ и совпадает с $\zeta^{-1}\phi\zeta$ на $U(L)$. Тогда \bar{f}_L имеет в $U(L)$ две неподвижные точки: седло $\zeta^{-1}(P_1)$ и седло $\zeta^{-1}(P_2)$.

Пусть $N(0, 0, 0, 1)$ – это северный полюс сферы $\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4): \|\mathbf{x}\| = 1\}$ и $\vartheta: \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{S}^3 \setminus \{N\})$ – стандартная стереографическая проекция. По построению диффеоморфизм \bar{f}_L совпадает с ν в некоторой окрестности точки O и в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, следовательно,

он индуцирует на \mathbb{S}^3 диффеоморфизм Морса–Смейла

$$f_L(\mathbf{s}) = \begin{cases} \vartheta(\bar{f}_L(\vartheta(\mathbf{s}))), & \mathbf{s} \neq N; \\ N, & \mathbf{s} = N. \end{cases}$$

Непосредственно из построения следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма f_L состоит из четырех неподвижных гиперболических точек: стока $\omega = S$, двух седел $\sigma^1 = \vartheta(\zeta^{-1}(P_1))$, $\sigma^2 = \vartheta(\zeta^{-1}(P_2))$ и одного источника $\alpha = N$. Построенный диффеоморфизм принадлежит классу G_1^+ ; назовем такие диффеоморфизмы *модельными* (см. рис. 28). Теорема доказана.

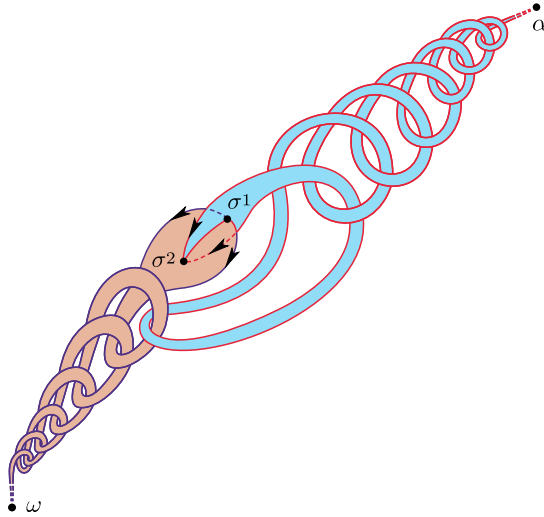


Рис. 28. Диффеоморфизм f_L .

Непосредственно из теорем 2 и 3 следует, что объемлющим многообразием для диффеоморфизмов класса G_1^+ является 3-сфера \mathbb{S}^3 .

5. Топология многообразий, допускающих диффеоморфизмы класса G

5.1. Линзовое пространство как несущее многообразие для диффеоморфизмов класса G . В настоящем пункте мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4 [56; теорема 1]. *Несущее многообразие любого диффеоморфизма $f \in G_p$, $p \geq 0$, гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.2, не уменьшая общности, будем предполагать, что $f \in G_p^+$, т. е. множество H_f гетероклинических кривых диффеоморфизма f ориентируемо, и гетероклинический индекс равен $p \geq 0$. Рассмотрим отдельно следующие случаи: 1) $p = 0$; 2) $p > 0$.

1) В случае $p = 0$ множество H_f либо пусто, либо состоит только из компактных кривых, ограничивающих диски на $W_{\sigma_f^s}^s$, содержащие седло σ_f^1 , и реперы всех кривых в H_f имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 14). Если множество H_f пусто, то в силу предложения 1.15 несущее многообразие гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 = L_{0,1}$ (см. рис. 6).

Везде далее будем использовать обозначения, введенные при доказательстве леммы 3.1. Если множество H_f не пусто, то каждая компонента связности K^u множества $Y_f \setminus \text{int } \widehat{N}_f^1$ является гладким двумерным кольцом, имеющим одну граничную компоненту на торе T_f^1 , а другую – на торе T_f^2 , и эти окружности являются меридианами заполненных торов $N_{L_f^1}$ и $N_{L_f^2}$ соответственно. Обозначим через $d_1 \subset N_{L_f^1}$ и $d_2 \subset N_{L_f^2}$ двумерные диски, ограниченные этими меридианами и имеющие в точности по одной точке пересечения с узлами L_f^1 и L_f^2 соответственно (см. рис. 29). Тогда множество $S = K^u \cup d_1 \cup d_2$ является двумерной сферой, цилиндрически вложенной в многообразии \widehat{V}_{ω_f} . Поскольку сфера S имеет единственную точку пересечения с каждым из узлов L_f^1, L_f^2 , то в силу предложения 1.3 она объемлюще изотопна сфере $\mathbb{S}^2 \times \{s_0\}$, $s_0 \in \mathbb{S}^1$. Выберем сферу \widetilde{S} , близкую к сфере S , объемлюще изотопную сфере $\mathbb{S}^2 \times \{s_0\}$, $s_0 \in \mathbb{S}^1$, так, что пересечение $\widetilde{S} \cap N_{L_f^i}$, $i = 1, 2$, является двумерным диском \widetilde{d}_i , имеющим единственную точку пересечения с узлом L_f^i , и $(\widetilde{S} \cap Y_f) \subset \text{int}(\widetilde{d}_1 \sqcup \widetilde{d}_2)$.

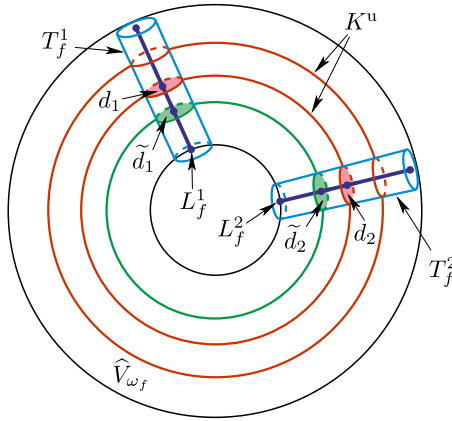


Рис. 29. Сфера S .

Тогда сфера \widetilde{S} , являющаяся компонентой связности множества $p_{\omega_f}^{-1}(\widetilde{S})$, ограничивает 3-шар $B \subset W_{\omega_f}^s$, содержащий ω_f в своей внутренности. При этом пересечение $\widetilde{S} \cap W_{\sigma_f^u}^u$ принадлежит дизъюнктивному объединению двух дисков $\Delta_1 \subset p_{\omega_f}^{-1}(\widetilde{d}_1)$ и $\Delta_2 \subset p_{\omega_f}^{-1}(\widetilde{d}_2)$ (см. рис. 30). Положим $I = W_{\sigma_f^u}^u \setminus \text{int } B$. Из свойств согласованной системы окрестностей и ориентируемости гетероклинических кривых следует, что существует трубчатая окрестность N_I дуги I такая, что пересечение $\partial N_I \cap W_{\sigma_f^u}^u$ состоит из единственной замкнутой кривой μ_2 . Тогда множество $Q_1 = B \cup N_I$ гомеоморфно заполненному тору, и кривая μ_2 является его меридианом.

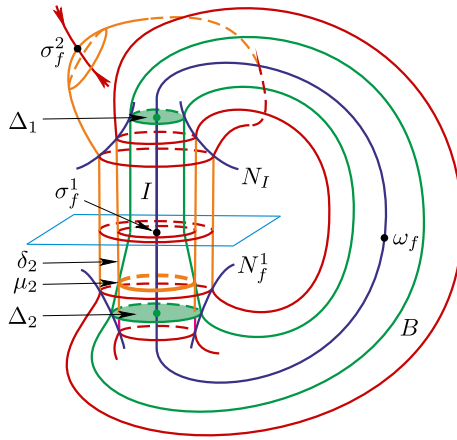


Рис. 30. Построение шара B .

Поскольку кривая μ_2 гомотопна на $W_{\sigma_f^2}^u \setminus \sigma_f^2$ гетероклиническим кривым диффеоморфизма f , то она ограничивает диск δ_2 , содержащий седло σ_f^2 . Выберем трубчатую окрестность $N_{\delta_2} \subset M^3 \setminus \text{int } Q_1$ диска δ_2 так, что $N_{\delta_2} \cap W_{\sigma_f^2}^u = \delta_2$, и $N_{\delta_2} \cap \partial Q_1$ – кольцо на торе ∂Q_1 , являющееся трубчатой окрестностью кривой μ_2 . Поскольку кривая μ_2 существенна на торе ∂Q_1 , то множество $S_\alpha = \partial(Q_1 \cup N_{\delta_2})$ гомеоморфно 2-сфере. По построению сфера S_α не пересекается с неустойчивыми многообразиями седловых точек и, следовательно, в силу предложения 1.7 лежит в W_α^u , где ограничивает 3-шар B_α .

Таким образом, множество $Q_2 = M^3 \setminus \text{int } Q_1$ устроено так, что, разрезая его по диску δ_2 , получаем 3-шар. Это означает, что Q_2 – заполненный тор, кривая μ_2 является его меридианом, а $M^3 = Q_1 \cup Q_2$ – линзовое пространство $L_{0,1} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см. рис. 14).

2) В случае $p > 0$ в силу ориентируемости множества H_f каждая компонента K^u связности множества $Y_f \setminus \text{int } \widehat{N}_f^1$ является двумерным кольцом, имеющим граничные окружности на разных торах множества $\partial \widehat{N}_f^1$, причем эти окружности являются узлами Хопфа. Тогда каждая компонента связности границы множества \widehat{N}_f^1 является двумерным тором, гомотопически нетривиально вложенным в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см. рис. 31). Согласно предложению 1.2 каждый такой тор ограничивает в \widehat{V}_{ω_f} заполненный тор, откуда следует, что \widehat{N}_f^1 принадлежит внутренности заполненного тора $\widehat{J} \subset \widehat{V}_{\omega_f}$. Положим $J = p_{\omega_f^{-1}}(\widehat{J})$.

Поскольку J является f -инвариантным заполненным цилиндром, граница которого не пересекается с инвариантными многообразиями седловых точек, то в силу предложения 1.7 имеем $\partial J \subset W_{\alpha_f}^u$. Выберем 2-диск $d \subset W_{\alpha_f}^u \setminus \alpha_f$ так, что $\partial d \subset \partial J$ и ∂d делит ∂J на две компоненты связности. Выберем точку $y_0 \in \text{int } d$. Обозначим через S_{ω_f} замыкание компоненты связности множества $\partial J \setminus \partial d$, содержащее ω_f . По построению S_{ω_f} является 2-сферой, гладкой всюду, кроме, возможно, точки ω_f . Согласно предложению 1.1 существует гладкий 3-шар $B \subset M^3$ такой, что $\omega_f \in \text{int } B$ и ∂B трансверсально пересекает S_{ω_f} по един-

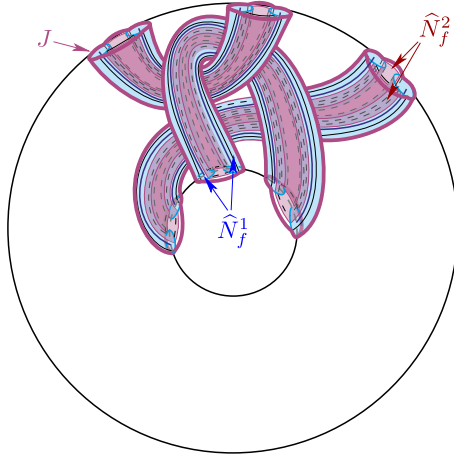


Рис. 31. Множество \widehat{N}_f .

ственной кривой, разделяющей в S_{ω_f} точки ω_f и y_0 . Не уменьшая общности, будем считать, что ∂B пересекает цилиндр J по диску Δ , трансверсально пересекающему N_f^1 по двум дискам и $N_f^2 \setminus \text{int } N_f^1$ по p дискам (см. рис. 32).

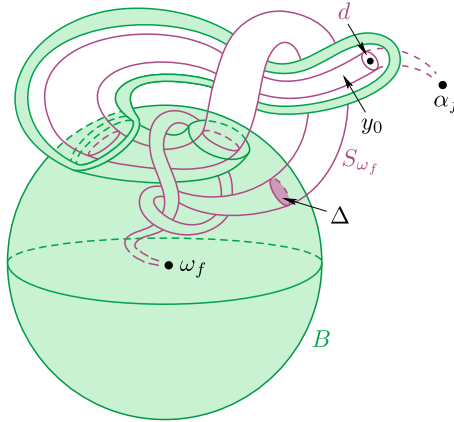


Рис. 32. Построение шара B .

Положим $I = W_{\sigma_f^1}^u \setminus \text{int } B$. Из свойств согласованной системы окрестностей и ориентируемости гетероклинических кривых следует, что существует трубчатая окрестность N_I дуги I такая, что $N_I \cap \Delta \subset N_f^1 \cap \Delta$, $W_{\sigma_f^1}^s$ пересекается с $Q_1 = B \cup N_I$ по одному 2-диску, граница μ_1 которого пересекается с $W_{\sigma_f^2}^u$ в точности в p точках, и пересечение $\partial N_I \cap W_{\sigma_f^2}^u$ состоит в точности из p кривых. По построению множество Q_1 гомеоморфно заполненному тору, и

$$W_{\sigma_f^2}^u \cap \partial Q_1 = W_{\sigma_f^2}^u \cap (\Delta \cup \partial N_I).$$

Поскольку

$$\text{cl}(W_{\sigma_f^2}^u) \setminus W_{\sigma_f^2}^u = \text{cl}(W_{\sigma_f^1}^u) \subset \text{int } Q_1,$$

то $W_{\sigma_f^2}^u \cap \partial Q_1$ состоит из замкнутых кривых. Так как пересечение диска $W_{\sigma_f^2}^u$ с тором ∂Q_1 ориентировано, то оно состоит из единственной кривой μ_2 (см. рис. 33).

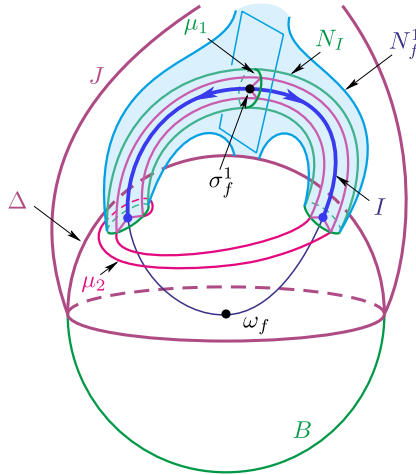


Рис. 33. Кривые μ_1 и μ_2 .

Поскольку кривая μ_2 пересекает все гетероклинические кривые диффеоморфизма f ориентируемым образом, то она ограничивает диск δ_2 , содержащий седло σ_f^2 . Рассуждая аналогично случаю $p = 0$, получим, что $M^3 = Q_1 \cup Q_2$ – линзовое пространство $L_{p,q}$, где $\langle p, q \rangle$ – гомотопический тип кривой μ_2 на торе ∂Q_1 . Теорема доказана.

5.2. Построение диффеоморфизмов с дико вложенными сепаратрисами на каждом линзовом пространстве. В настоящем пункте мы конструктивно докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5 [56; теорема 2]. *На любом линзовом пространстве $L_{p,q}$ существует диффеоморфизм $f \in G$ с дико вложенными одномерными седловыми сепаратрисами.*

5.2.1. *Построение на линзе $L_{0,1} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.* Пусть $L^1, L^2 \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – два непересекающихся узла Хопфа: стандартный узел и узел Мазура соответственно. Пусть N_{L^1}, N_{L^2} – их попарно непересекающиеся трубчатые окрестности. Выберем на торе $T_i = \partial N_{L^i}$, $i = 1, 2$, образующие λ_i, μ_i так, что параллель λ_i – это узел Хопфа, а μ_i – это меридиан заполненного тора N_{L^i} . Пусть $\tilde{N}_{L^1} \supset N_{L^1}$ – также трубчатая окрестность узла L^1 , не пересекающаяся с N_{L^2} , и $\tilde{T} = \partial \tilde{N}_{L^1}$ (см. рис. 34).

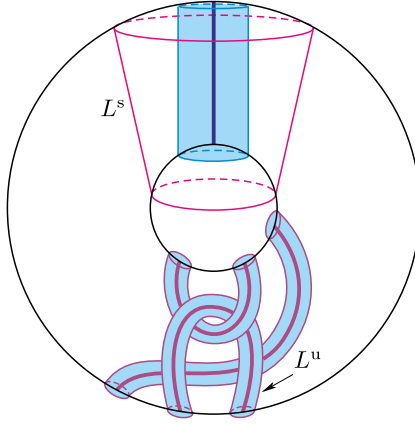


Рис. 34. Построение диффеоморфизма $f \in G_0$ с дико вложенными сепаратрисами.

Обозначим через \widehat{V} многообразие, полученное из $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int}(N_{L^1} \cup N_{L^2})$ отождествлением граничных торов посредством диффеоморфизма, переводящего меридиан μ_1 в меридиан μ_2 . Пусть

$$q: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int}(N_{L^1} \cup N_{L^2}) \rightarrow \widehat{V}$$

– естественная проекция. Положим $\widehat{L}^s = q(\widetilde{T})$ и $\widehat{L}^u = q(T_2)$. Заметим, что фундаментальная группа $\pi_1(\widehat{V})$ допускает эпиморфизм $\eta: \pi_1(\widehat{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу замкнутой кривой в \widehat{V} число ее оборотов вокруг образующей $q(\lambda_1)$. При этом торы \widehat{L}^s и \widehat{L}^u являются η -существенными. Положим

$$S = (\widehat{V}, \eta, \widehat{L}^s, \widehat{L}^u).$$

По построению многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ гомеоморфно исходному многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Поскольку тор \widetilde{T} ограничивает в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ два заполненных тора, то многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^u}$ также гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Таким образом, схема S является абстрактной схемой. В силу предложения 1.14 схема S реализуется некоторым градиентно-подобным диффеоморфизмом $f \in \text{MS}(M^3)$ таким, что схемы S_f и S эквивалентны. Поскольку множества \widehat{L}^s , \widehat{L}^u , $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$, $\widehat{V}_{\widehat{L}^u}$ связны, то диффеоморфизм f имеет в точности четыре неблуждающие точки попарно различных индексов Морса, т. е. $f \in G$. Так как торы \widehat{L}^s и \widehat{L}^u не пересекаются, то множество H_f пусто. Согласно теореме 4 несущее многообразие диффеоморфизма f гомеоморфно линзовому пространству $L_{0,1} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Согласно предложению 2.3 многообразие $W_{\sigma_f}^u$ дико вложено в несущее многообразие.

5.2.2. *Построение на линзе $L_{p,q}$, $p \neq 0$.* Пусть $p \neq 0$, и пусть $q \neq 0$ взаимно просто с p . На трехмерном торе

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, e^{i2\pi z}) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

зададим образующие

$$a = \mathbb{S}^1 \times \{e^{i2\pi^0}\} \times \{e^{i2\pi^0}\}, \quad b = \{e^{i2\pi^0}\} \times \mathbb{S}^1 \times \{e^{i2\pi^0}\}, \\ c = \{e^{i2\pi^0}\} \times \{e^{i2\pi^0}\} \times \mathbb{S}^1.$$

Зададим двумерные торы $\tilde{T}^s, \tilde{T}^u \subset \mathbb{T}^3$ следующим образом:

$$\tilde{T}^s = \{(e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, e^{i2\pi z}) : z = 0\}, \quad \tilde{T}^u = \left\{ (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, e^{i2\pi z}) : z = \frac{p}{q} y \right\}.$$

Выберем трубчатые окрестности $N_{\tilde{T}^s}, N_{\tilde{T}^u}$ этих торов. По построению замыкание каждой компоненты связности множества $\mathbb{T}^3 \setminus (N_{\tilde{T}^s} \cup N_{\tilde{T}^u})$ является заполненным тором с образующей, гомотопной узлу a . Выберем одну такую компоненту W и обозначим через μ_W меридиан заполненного тора W (см. рис. 35).

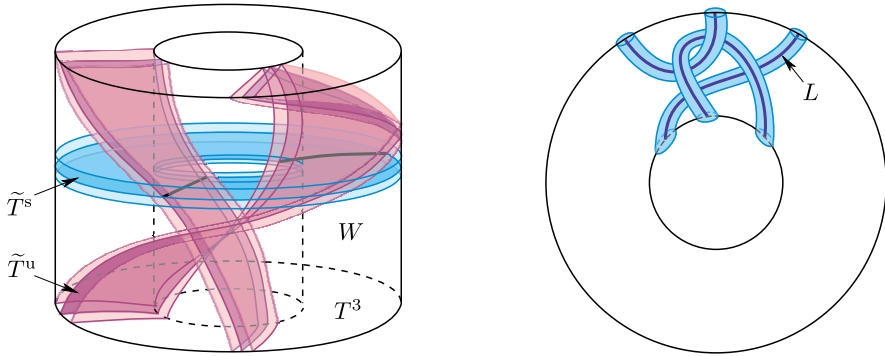


Рис. 35. Построение диффеоморфизма $f \in G_2$ с дико вложенными сепаратрисами.

Пусть $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – узел Мазура, N_L – его трубчатая окрестность с меридианом μ_{N_L} и $\zeta : \partial N_L \rightarrow \partial W$ – диффеоморфизм, переводящий меридиан μ_{N_L} в меридиан μ_W . Положим

$$\widehat{V} = (\mathbb{T}^3 \setminus \text{int } W) \cup_{\zeta} (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } N_L).$$

Обозначим через

$$q : (\mathbb{T}^3 \setminus \text{int } W) \sqcup (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } N_L) \rightarrow \widehat{V}$$

естественную проекцию. Положим $\widehat{L}^s = q(\tilde{T}^s)$ и $\widehat{L}^u = q(\tilde{T}^u)$. Заметим, что фундаментальная группа $\pi_1(\widehat{V})$ допускает эпиморфизм $\eta : \pi_1(\widehat{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу замкнутой кривой в \widehat{V} число ее оборотов вокруг образующей $q(a)$. При этом торы $\widehat{L}^s, \widehat{L}^u$ являются η -нетривиальными. Положим

$$S = (\widehat{V}, \eta, \widehat{L}^s, \widehat{L}^u).$$

Проверим допустимость абстрактной схемы, показав, что многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (для многообразия $\widehat{V}_{\widehat{L}^u}$ доказательство аналогичное).

По построению многообразие $\mathbb{T}^3 \setminus \text{int } N_{\widehat{T}^s}$ гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$. Приклеив заполненный тор к каждой компоненте связности этого многообразия так, что меридиан заполненного тора склеивается с кривой, гомотопной образующей b , получим многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. При этом полученное многообразие является склейкой по границе двух заполненных торов W и $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } W$. Тогда многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ получается склейкой многообразий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } W$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } N_L$ по границе в силу диффеоморфизма, переводящего меридиан μ_{N_L} в меридиан μ_W . Поскольку $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } W$ – заполненный тор, то $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Таким образом, схема S является абстрактной схемой. В силу предложения 1.14 схема S реализуется некоторым градиентно-подобным диффеоморфизмом $f \in \text{MS}(M^3)$ таким, что схемы S_f и S эквивалентны. Поскольку множества \widehat{L}^s , \widehat{L}^u , $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$, $\widehat{V}_{\widehat{L}^u}$ связны, то диффеоморфизм f имеет в точности четыре неблуждающие точки попарно различных индексов Морса, т. е. $f \in G$. Так как торы \widehat{L}^s , \widehat{L}^u пересекаются ориентируемым образом вдоль p η -существенных кривых, то множество H_f ориентируемо и состоит из p некомпактных гетероклинических кривых. Согласно теореме 4 несущее многообразие диффеоморфизма f гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$. Согласно предложению 2.3 многообразие $W_{\sigma_f^u}$ дико вложено в несущее многообразие.

Список литературы

- [1] V. S. Afraimovich, M. I. Rabinovich, P. Varona, “Heteroclinic contours in neural ensembles and the winnerless competition principle”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **14**:4 (2004), 1195–1208.
- [2] P. M. Akhmet’ev, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, “On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms”, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **20**:3 (2021), 76, 15 pp.
- [3] А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.
- [4] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Межвуз. темат. сб. науч. тр., Горьк. гос. ун-т, Горький, 1984, 22–38; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. I”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 1–11.
- [5] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий”, *Дифференциальные и интегральные уравнения*, Сб. науч. тр., Изд-во Горьковск. ун-та, Горький, 1985, 33–37; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 19–23.

- [6] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. II”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Межвуз. темат. сб. науч. тр., Изд-во Горьковск. ун-та, Горький, 1987, 24–31; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. II”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 13–17.
- [7] C. Bonatti, V. Z. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [8] Ch. Bonatti, V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **39**:9 (2019), 2403–2432.
- [9] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Труды МИАН, **236**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2002, 66–78; англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pécou, “On Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections on three-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 58–69.
- [10] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.
- [11] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.
- [12] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Докл. РАН*, **396**:4 (2004), 439–442; англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochina, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite sets of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 385–387.
- [13] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Реализация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Порядок и хаос в динамических системах*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Труды МИАН, **297**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2017, 46–61; англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Realization of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **297** (2017), 35–49.
- [14] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Math. J.*, **168**:13 (2019), 2507–2558.
- [15] C. Bonatti, R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des surfaces*, With the collaboration of E. Jeandenans, Astérisque, **250**, Soc. Math. France, Paris, 1998, viii+235 pp.
- [16] G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows on dimensions two and three”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**:2 (1975), 155–183.
- [17] В. З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Матем. заметки*, **54**:3 (1993), 3–17; англ. пер.: V. Z. Grines, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Math. Notes*, **54**:3 (1993), 881–889.
- [18] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, “Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связанной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ”, *Матем. сб.*, **214**:5 (2023), 97–127; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, “A combinatorial invariant of gradient-like flows on a connected sum of $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ”, *Sb. Math.*, **214**:5 (2023), 703–731.

- [19] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, “Топологическая классификация потоков без гетероклинических траекторий на связной сумме многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ”, *УМН*, **77:4**(466) (2022), 201–202; *Russian Math. Surveys*, **77:4** (2022), 759–761.
- [20] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, “Энергетическая функция градиентно-подобных потоков и проблема топологической классификации”, *Матем. заметки*, **96:6** (2014), 856–863; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka, “The energy function of gradient-like flows and the topological classification problem”, *Math. Notes*, **96:6** (2014), 921–927.
- [21] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, “О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере в топологический поток”, *УМН*, **71:6**(432) (2016), 163–164; *Russian Math. Surveys*, **71:6** (2016), 1146–1148.
- [22] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий”, *УМН*, **74:1**(445) (2019), 41–116; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **74:1** (2019), 37–110.
- [23] В. З. Гринес, Х. Х. Калай, “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов на неприводимых трехмерных многообразиях”, *УМН*, **49:2**(296) (1994), 149–150; *Russian Math. Surveys*, **49:2** (1994), 157–158.
- [24] В. З. Гринес, С. Х. Капкаева, О. В. Починка, “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **205:10** (2014), 19–46; англ. пер.: V. Z. Grines, S. Kh. Kapkaeva, O. V. Pochinka, “A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces”, *Sb. Math.*, **205:10** (2014), 1387–1412.
- [25] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.
- [26] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Phys. D*, **294** (2015), 1–5.
- [27] V. Grines, O. Pochinka, “On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms”, *Dynamics, games and science. II* (Univ. of Minho, Braga, 2008), Springer Proc. Math., **2**, Springer, Heidelberg, 2011, 403–427.
- [28] В. З. Гринес, О. В. Починка, “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *УМН*, **68:1**(409) (2013), 129–188; *Russian Math. Surveys*, **68:1** (2013), 117–173.
- [29] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194:7** (2003), 25–56; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sb. Math.*, **194:7** (2003), 979–1007.
- [30] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **271**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 111–133; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 103–124.
- [31] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде”, *Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения*, СМФН, **63**, № 3, РУДН, М., 2017, 455–474; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Dynamical systems and topology of magnetic fields in conducting medium”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **253:5** (2021), 676–691.

- [32] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948, 232 с.; пер. с англ.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1948, vii+165 pp.
- [33] P. Kirk, C. Livingston, “Knot invariants in 3-manifolds and essential tori”, *Pacific J. Math.*, **197**:1 (2001), 73–96.
- [34] V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “On topological classification of gradient-like flows on an n -sphere in the sense of topological conjugacy”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **25**:6 (2020), 716–728.
- [35] Е. В. Круглов, Е. А. Таланова, “О реализации диффеоморфизмов Морса–Смейла с гетероклиническими кривыми на трехмерной сфере”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Труды МИАН, **236**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2002, 212–217; англ. пер.: E. V. Kruglov, E. A. Talanova, “On the realization of Morse–Smale diffeomorphisms with heteroclinic curves on a 3-sphere”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 201–205.
- [36] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251–257.
- [37] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.
- [38] D. Malyshev, A. Morozov, O. Pochinka, “Combinatorial invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic”, *Chaos*, **31**:2 (2021), 023119, 17 pp.
- [39] В. Mazur, “A note on some contractible 4-manifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **73**:1 (1961), 221–228.
- [40] Дж. Милнор, *Теорема об h -кобордизме*, Мир, М., 1969, 115 с.; пер. с англ.: J. Milnor, *Lectures on the h -cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965, v+116 pp.
- [41] Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **270**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 198–219; англ. пер.: Т. М. Mitryakova, O. V. Pochinka, “Necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of surface diffeomorphisms with a finite number of orbits of heteroclinic tangency”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 194–215.
- [42] J. Munkres, “Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms”, *Ann. of Math. (2)*, **72**:3 (1960), 521–554.
- [43] W. D. Neumann, “Notes on geometry and 3-manifolds”, *Low dimensional topology* (Eger, 1996/Budapest, 1998), Bolyai Soc. Math. Stud., **8**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999, 191–267.
- [44] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.
- [45] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.
- [46] Дж. Пали, С. Смейл, “Теоремы структурной устойчивости”, *Математика*, **13**:2 (1969), 145–155; пер. с англ.: J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global analysis* (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223–231.

- [47] M. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1**:2 (1962), 101–120.
- [48] M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds: a further remark”, *Topology*, **2**:1-2 (1963), 179–180.
- [49] M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems* (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, Inc., New York–London, 1973, 389–419.
- [50] С. Ю. Пилогин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254; англ. пер.: S. Ju. Piljugin, “Phase diagrams determining Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres”, *Differ. Equ.*, **14**:2 (1978), 170–177.
- [51] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [52] O. Pochinka, “Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices”, *Univ. Iagel. Acta Math.*, **47** (2009), 149–154.
- [53] О. В. Починка, Д. Д. Шубин, “Неособые потоки Морса–Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях”, *Матем. заметки*, **112**:3 (2022), 426–443; англ. пер.: O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “Nonsingular Morse–Smale flows with three periodic orbits on orientable 3-manifolds”, *Math. Notes*, **112**:3 (2022), 436–450.
- [54] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “Non-singular Morse–Smale flows on n -manifolds with attractor-repeller dynamics”, *Nonlinearity*, **35**:3 (2022), 1485–1499.
- [55] О. В. Починка, Е. А. Таланова, “Минимизация числа гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма с неподвижными точками, имеющими попарно различные индексы Морса”, *ТМФ*, **215**:2 (2023), 311–317; англ. пер.: O. V. Pochinka, E. A. Talanova, “Minimizing the number of heteroclinic curves of a 3-diffeomorphism with fixed points with pairwise different Morse indices”, *Theoret. and Math. Phys.*, **215**:2 (2023), 729–734.
- [56] O. Pochinka, E. Talanova, *On the topology of 3-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms with four fixed points of pairwise different Morse indices*, Cornell Univ., Working paper, 2023, 30 pp., arXiv: 2306.02814.
- [57] О. В. Починка, Е. А. Таланова, Д. Д. Шубин, “Узел как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками”, *Матем. сб.*, **214**:8 (2023), 94–107; англ. пер.: O. Pochinka, E. Talanova, D. Shubin, *Knot as a complete invariant of a Morse–Smale 3-diffeomorphism with four fixed points*, 2022, 13 pp., arXiv: 2209.04815.
- [58] E. R. Priest, *Solar magneto-hydrodynamics*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1982, xix+469 pp.
- [59] E. Priest, T. Forbes, *Magnetic reconnection. MHD theory and applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xii+600 pp.
- [60] А. О. Пришляк, “Полный топологический инвариант потоков Морса–Смейла и разложений на ручки трехмерных многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:4 (2005), 185–196; англ. пер.: A. Prishlyak, “Complete topological invariants of Morse–Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **144**:5 (2007), 4492–4499.
- [61] D. Rolfsen, *Knots and links*, Corr. reprint of the 1976 original, Math. Lecture Ser., **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990, xiv+439 pp.
- [62] В. И. Шмуклер, О. В. Починка, “Бифуркации, меняющие тип гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма Морса–Смейла”, *ТВИМ*, 2021, № 1, 101–114.
- [63] Д. Д. Шубин, “Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами”, *Изв. вузов. ПНД*, **29**:6 (2021), 863–868.

- [64] С. Смейл, “Неравенства Морса для динамических систем”, *Математика*, **11**:4 (1967), 79–87; пер. с англ.: S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.
- [65] Я. Л. Уманский, “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239; англ. пер.: Ya. L. Umanskiĭ, “Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories”, *Math. USSR-Sb.*, **69**:1 (1991), 227–253.

Ольга Витальевна Починка
(**Olga V. Pochinka**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru,
opochinka@hse.ru

Поступила в редакцию
06.06.2023

Елена Анатольевна Таланова
(**Elena A. Talanova**)

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: eltalanova72@gmail.com