Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, О мере “больших дуг” в разбиении Фарея, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 4, 39–42

https://www.mathnet.ru/cheb108

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК: 511.37 + 511.36

О МЕРЕ "БОЛЬШИХ ДУГ" В РАЗБИЕНИИ ФАРЕЯ

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков (г. Москва)

В настоящей работе нами доказан новый вариант теоремы о верхней границе меры больших дуг в разбиении Фарея. Это утверждение сформулировано нами ранее [2] при оценке мощности особого множества в бинарной аддитивной задаче с целыми частями линейных функций от простых чисел (см. также [1], [5]). Подобное утверждение о мере было доказано Й. Брюдерном, Р. Д. Куком и А. Перелли [4]. Они указывают на то, что в близких ситуациях данный подход применялся Г. Л. Ватсоном [6] и другими авторами.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq Q \leq X^{1/2}, a$ *— целое число,* q *— натуральное число такое, что* $(a,q)=1, q \in [1,Q]$*, и пусть символ* $I_{a,q}$ *обозначает интервал* $I_{a,q} = \left(\frac{a}{q} - \frac{Q}{qX}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{qX}\right)$. *Далее, пусть* β *— иррациональное алгебраическое число,* t *— вещественное число такое, что* $1/2 \geq |t| \geq X^{-1/3}, \beta \in (1,2)$ *и* $|k| \ll \ln X$ *— целое число.*

Пусть μ *обозначает меру множества* T *точек* $\{t\}$ *таких, что обе точки* $\nu_1 = t\beta$ *и* $\nu_2 = t + k$ *лежат в некоторых интервалах ранее заданного семейства интервалов* $\{I_{a,q}\}$*, т.е.* $\nu_1 \in I_{a,q}$ *при некоторых значениях* $a = a_1, q = q_1$ *и с параметром* $Q = Q_1$ *(т.е.* $q_1 \leq Q_1$*);* $\nu_2 \in I_{a,q}$ *при некоторых значениях* $a = a_2, q = q_2$ *с параметром* $Q = Q_2$ *(т.е.* $q_2 \leq Q_2$*).*

Тогда для величины μ *справедлива верхняя оценка*

$$\mu \ll_\varepsilon X^{-2+\varepsilon} Q_1^2 Q_2^2,$$

где $\varepsilon > 0$ *— сколь угодно малая постоянная.*

Доказательство. Условие принадлежности точек ν_1 и ν_2 некоторым интервалам I_{a_1,q_1} и I_{a_2,q_2} соответственно означает, что

$$\nu_1 = t\beta = \frac{a_1}{q_1} + z_1, \quad \nu_2 = t + k = \frac{a_2}{q_2} + z_2,$$

причем $|z_1| \leq (q_1 X)^{-1} Q_1, |z_2| \leq (q_2 X)^{-1} Q_2$.

Пересечение этих интервалов I_{a_1,q_1} и I_{a_2,q_2} является промежутком, длина которого не превышает величины δ, где

$$\delta = 2\min\left\{\frac{Q_1}{q_1X}, \frac{Q_2}{q_2X}\right\} \ll X^{-1}\left(\frac{Q_1Q_2}{q_1q_2}\right)^{1/2}$$

Далее, из предыдущих соотношений имеем, что точка t должна принадлежать одновременно двум интервалам, определяемым равенствами

$$t = \frac{a_1}{q_1\beta} + \frac{z_1}{\beta} = \frac{a_2}{q_2} - k + z_2.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{a_1}{q_1\beta} - \frac{a_2}{q_2} + k\right| = \left|z_2 - \frac{z_1}{\beta}\right| \le \left(\frac{Q_1}{q_1} + \frac{Q_2}{q_2}\right)\frac{1}{X}.$$

Положим $b = a_2 - kq_2$. Получим

$$\left|\frac{a_1}{q_1\beta} - \frac{b}{q_2}\right| \le \left(\frac{Q_1}{q_1} + \frac{Q_2}{q_2}\right)\frac{1}{X}.$$

Отсюда имеем

$$|a_1q_2\beta^{-1} - bq_1| \le (Q_1q_2 + q_1Q_2)X^{-1} \le 2Q_1Q_2X^{-1}.$$

Далее, число $\beta^{-1} = \lambda$ является алгебраическим, поэтому по известной теореме Рота (см., например, [3]) для знаменателей $r_s, s \ge 1$, его последовательных подходящих дробей выполняется неравенство $r_{s+1} \ll_\varepsilon r_s^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Пусть s_0 обозначает наименьшее значение номера подходящей дроби к числу λ, для которого выполняется неравенство $2Q_1Q_2x^{-1} < 0,25r_{s_0}^{-1}$. Тогда, используя теорему Рота, найдем

$$\frac{X^{1-\varepsilon}}{Q_1Q_2} \ll r_{s_0} \le \frac{X}{8Q_1Q_2}.$$

Воспользуемся экстремальным свойством подходящих дробей. Получим $|a_1q_2| \ge r_{s_0} = r$.

Пусть, теперь, $t, t' \in T$, и им соответствуют четверки чисел: (a_1, q_1, a_2, q_2) и (a_1', q_1', a_2', q_2').

Так как имеем

$$|a_1q_2\lambda - bq_1| < \frac{1}{4r}, \quad |a_1'q_2'\lambda - b'q_1'| < \frac{1}{4r},$$

то

$$|(a_1q_2 - a_1'q_2')\lambda - (bq_1 - b'q_1'| < \frac{1}{2r}.$$

Тогда находим, что либо $a_1q_2 = a'_1q'_2$, либо по экстремальному свойству подходящих дробей $|a_1q_2 - a'_1q'_2| \geq r$.

По условию леммы имеем $|a_1q_2| \leq q_1q_2 \leq Q_1Q_2$. Далее, в силу неравенств $|a_1q_2| \geq r, |a_1q_2 - a'_1q'_2| \geq r$ находим, что при натуральном числе n на каждом промежутке E_n вида $(r(n-1/2), r(n+1/2)]$ содержится не более одного числа $|a_1q_2|$, причем количество промежутков E_n не превосходит величины $H = Q_1Q_2r^{-1}$.

Заметим, что условие нахождения на любом фиксированном промежутке E_n не более одной точки вида $|a_1q_2|$ влечет за собой, что и величина $|bq_1|$ определяется однозначно следующим образом $|bq_1| = [|a_1q_2|\lambda]$. Таким образом количество наборов (a_1, q_1, b, q_2) по известной оценке количества делителей растущего натурального параметра оценивается сверху как $c(\varepsilon)X^\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — как угодно малая постоянная, а $c(\varepsilon) > 0$ — некоторая функция от параметра ε. Так как $b = a_2 - kq_2$, то данная оценка справедлива и для количества наборов (a_1, q_1, a_2, q_2).

Отсюда находим, что при заданном n имеется не более $c(\varepsilon)X^\varepsilon$ промежутков длины, не превосходящей δ, на которых могут располагаться точки t из множества T. При этом величина δ оценивается следующим образом

$$\delta \leq X^{-1}\left(\frac{Q_1Q_2}{q_1q_2}\right)^{1/2} \leq X^{-1}\left(\frac{Q_1Q_2}{a_1q_2}\right)^{1/2} \leq \frac{(2Q_1Q_2)^{1/2}}{X(rn)^{-1/2}}.$$

Далее, для оценки меры μ множества T просуммируем по всем возможным наборам (a_1, q_1, a_2, q_2), отвечающим данному значению параметра n, а затем просуммируем по всем $n \leq H$, найденную выше оценку величины δ. Получим

$$\mu \ll_\varepsilon \sum_{n=1}^{H} X^\varepsilon \frac{(2Q_1Q_2)^{1/2}}{X(rn)^{-1/2}} \ll_\varepsilon X^{\varepsilon-1}(Q_1Q_2)^{1/2}r^{-1/2}H^{1/2} \ll_\varepsilon$$

$$\ll_\varepsilon X^{\varepsilon-1}Q_1Q_2r^{-1} \ll_\varepsilon X^{2\varepsilon-2}Q_1^2Q_2^2.$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. О мощности исключительного множества в бинарной аддитивной проблеме гольдбахова типа // Тр. МИАН, 1997, **218**, С. 28 – 57.

[2] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. РАН, 2002, **387**, №3, С. 295 – 296.

[3] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[4] Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // In book: Sieve Methods, Exponential Sums, and their Applications in Number Theory. Greaves G. R. H., Harman G., Huxley M. N., Eds. Cambridge University Press, 1996, p. 87 – 100.

[5] Brüdern J. Some additive problems of Goldbach's type // Functiones et Approximatio. 2000, **XXVIII**, p. 45 – 73.

[6] Watson G. L. On indefinite quadratic forms in five variables // Proc. London Math.Soc. 1953, **(3)3**, p. 170 – 181.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: arch@mi.ras.ru

Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: chubarik1@mech.math.msu.su
Получено 20.07.2011