R. V. Brizitskii, Control problems for the MGD model of viscous heat-conducting fluid under mixed boundary conditions, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2004, Volume 5, Number 2, 226–238

*ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ.* 2004. Том 5. № 2. С. 226–238

УДК 517.95
MSC2000 76W05

© Р.В. Бризицкий*

# Задачи управления для модели МГД вязкой теплопроводной жидкости со смешанными граничными условиями

Исследуются задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики (МГД) вязкой теплопроводной жидкости при смешанных краевых условиях для скорости, электромагнитного поля и температуры. Доказывается разрешимость исходной краевой задачи и общей задачи управления. Выводится система оптимальности для произвольного функционала качества. Для конкретных функционалов качества выводятся условия локальной единственности решения задач управления.

## 1. Введение. Постановка краевой задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma$, состоящей из трех частей $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$, рассматривается краевая задача МГД

$$\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{u} + \nabla r - \mu\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f} - \mathbf{b}T,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{b} = \beta\mathbf{G}, \tag{1.1}$$

$$\nu_m \operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_m\mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega,\ \nu_m = \frac{1}{\sigma}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0, \mathbf{u}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0, r|_{\Gamma_2} = g, \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_3} = 0, \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_3} = \mathbf{h}, \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \tag{1.3}$$

$$-\lambda\Delta T + \mathbf{u}\cdot\nabla T = f \text{ в } \Omega,\ T = 0 \text{ на } \Gamma_D,\ \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\right) = \chi \text{ на } \Gamma_N, \tag{1.4}$$

описывающая течение в $\Omega$ вязкой несжимаемой электрически и теплопроводящей жидкости [1]. Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — векторы скорости и напряженностей магнитного и электрического полей, $p$ — давление, $T$ — температура, $r = p + (1/2)|\mathbf{u}|^2$ — полный напор, $\nu$, $\sigma$ и $\lambda$ — постоянные коэффициенты вязкости, проводимости и теплопроводности, $\mu$ — магнитная проницаемость, $\mathbf{G}$ — вектор ускорения свободного падения, $\mathbf{j}$ — вектор плотности сторонних токов, $\beta$ — коэффициент теплового расширения, $g$, $\mathbf{h}$, $\alpha$ и $\chi$ — определенные на границе $\Gamma$ либо на некоторой ее части функции. Ниже на задачу (1.1)–(1.4) будем ссылаться как на задачу 1.

О применениях модели (1.1)–(1.4) и ее нестационарного аналога см. [2, 3]. При $\beta = 0$ разрешимость задачи (1.1)–(1.3) и соответствующих задач управления исследована в [4]. В статье [5] доказана локальная разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений МГД при другом типе (неоднородных) краевых условий для скорости. В [6] исследованы задачи управления для стационарной модели МГД вязкой (нетеплопроводной) жидкости при неоднородном условии Дирихле для скорости на $\Gamma$. В случае $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = 0$ задача

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения Российской Академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `alekseev@iam.dvo.ru`

(1.1)–(1.4) переходит в краевую задачу для уравнений тепловой конвекции, исследованную вместе с задачами управления [7, 8].

При изучении задачи 1 и задач управления будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$ и $L^r(D)$, $1 \le r \le \infty$, где $D$ — либо область $\Omega$, либо граница $\Gamma$, либо ее некоторая часть $\Gamma_0$ с положительной мерой. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$ и $\mathbf{L}^r(\Omega)$. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_1$, скалярные произведения в $L^2(\Gamma)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ — через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ либо $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$, норму в $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ — через $\|\cdot\|$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, норму в $H^s(\Gamma)$, $\mathbf{H}^s(\Gamma)$ либо $H^s(\Gamma_0)$, $\mathbf{H}^s(\Gamma_0)$ — через $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ либо $\|\cdot\|_{s,\Gamma_0}$, отношение двойственности для пары $X$ и $X^*$ — через $<\cdot,\cdot>_{X^*\times X}$ или просто $<\cdot,\cdot>$.

Будем предполагать, что $\Omega$ и участки $\Gamma_i, \Gamma_D$ и $\Gamma_N$ границы $\Gamma$ удовлетворяют условиям

(i) $\Omega$ — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{1,1}$, причем открытые участки $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$ границы $\Gamma$ удовлетворяют условиям: $\Gamma_1 \ne \emptyset$, $\Gamma_2 \ne \emptyset$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \ne j$, $\Gamma_j \in C^{1,1}$, $i,j = 1,2,3$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$;

(ii) $\Omega$ — конечносвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma$, состоящей из $p_0+1$ связных компонент $\Gamma^0, \Gamma^1, \dots, \Gamma^{p_0}$, и существуют непересекающиеся многообразия (“разрезы”) $\Sigma_i \in C^2$, $i = 1,2,\dots,q_0$ такие, что область $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{q_0} \Sigma_i$ односвязна и липшицева;

(iii) открытые участки $\Gamma_D$ и $\Gamma_N$ границы $\Gamma$ удовлетворяют условиям $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \ne \emptyset$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_N \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$.

Пусть $H_0^1(\Omega)$ = пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^3$. Положим $\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$, $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{rot}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $L_+^\infty(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^\infty(\Gamma_N) : \alpha \ge 0\}$. Через $\mathbf{H}_T^1(\Omega)$, $\mathbf{L}_T^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ обозначим подпространства пространств $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, состоящие из тангенциальных на $\Gamma$ векторов с нормами, индуцируемыми соответственно из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Через $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$ обозначим подпространство в $H^{1/2}(\Gamma_0)$, состоящее из функций, продолжения нулем которых на $\Gamma\setminus\Gamma_0$ принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$, через $\mathbf{H}_{T,0}^{1/2}(\Gamma_3)$ обозначим подпространство в $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma_3)$, состоящее из тангенциальных на $\Gamma_3$ векторов, продолжения нулем которых на $\Gamma\setminus\Gamma_3$ принадлежат $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$. Наряду со стандартными двойственными пространствами $H^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ будем использовать пространства $\mathcal{T}^*$, $\mathbf{H}_T^{-1}(\Omega)$, $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ и $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma_3)$, двойственные к $\mathcal{T}$, $\mathbf{H}_T^1(\Omega)$, $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$ и $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma_3)$ относительно пространств $L^2(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $L^2(\Gamma_0)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma_3)$.

Обозначим через $\mathcal{H}(m) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ (либо $\mathcal{H}(e) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$) пространство, состоящее из всех решений однородной задачи магнитного (либо электрического) типа $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ в $\Omega$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$ (либо $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ в $\Omega$, $\mathbf{v}\times\mathbf{n}|_\Gamma = 0$). Согласно [11], $\dim\mathcal{H}(m) = q_0$, $\dim\mathcal{H}(e) = p_0$, где числа $p_0$ и $q_0$ введены в (ii). Через $\mathbf{S}^\perp$ обозначим ортогональное дополнение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ любого множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$. Положим $\mathbf{X}_T = \mathbf{H}_T^1(\Omega) \cap \mathcal{H}(m)^\perp$, $\mathbf{V}_T = \{\mathbf{h} \in X_T : \operatorname{div}\mathbf{h} = 0\}$. $\mathbf{X}_T$ и $\mathbf{V}_T$ — гильбертовы пространства по норме $\|\cdot\|_1$, и справедливо ортогональное разложение [11]

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \operatorname{rot}\mathbf{V}_T \oplus \nabla H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}(e). \tag{1.5}$$

Главную роль ниже будут играть пространства $\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = 0, \mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_3} = 0\}$, $\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$ с нормами, индуцированными из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, пространства $\mathbf{X}_T$, $\mathbf{V}_T$ и $\mathcal{T}$, двойственное к $\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$ относительно $\mathbf{L}^2(\Omega)$ пространство $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) = (\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega))^*$, а также произведения $H_{0T} = \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T$, $V_{0T} = \mathbf{W} \times \mathbf{V}_T \subset H_{0T}$ и двойственные к ним пространства $H_{0T}^*$ и $V_{0T}^*$. Пространства $H_{0T}$ и $V_{0T}$ гильбертовы по норме $\|(\mathbf{u},\mathbf{H})\|_1 \equiv (\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2)^{1/2}$. Элементами пространства $H_{0T}^*$ (либо $V_{0T}^*$) являются пары $(\mathbf{f},\mathbf{q}) \in \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{V}_T^*$, (либо $(\mathbf{f},\mathbf{q}) \in \mathbf{W}^* \times \mathbf{V}_T^*$), причем действие элемента

$\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{q}) \in H_{0T}^*$ на элементе $(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in H_{0T}$ определяется соотношением

$$< \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) >_{H_{0T}^* \times H_{0T}} = < \mathbf{f}, \mathbf{v} >_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)} + < \mathbf{q}, \mathbf{\Psi} >_{\mathbf{V}_T^* \times \mathbf{V}_T} .$$

Ясно, что $\|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*} \equiv \|(\mathbf{f}, \mathbf{q})\|_{H_{0T}^*} \le \|\mathbf{f}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{V}_T^*}$.

Введем билинейные и трилинейные формы $a_1 : \mathbf{H}(\mathrm{rot}; \Omega)^2 \to \mathbb{R}$, $a_2 : H^1(\Omega)^2 \to \mathbb{R}$, $b : \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $b_1 : H^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $c_1 : \mathbf{H}^1(\Omega)^3 \to \mathbb{R}$ и $c_2 : \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)^2 \to \mathbb{R}$ с помощью соотношений

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v} d\Omega,\ a_2(T, S) = \int_\Omega \nabla T \cdot \nabla S d\Omega,\ b(\mathbf{v}, r) = -\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{v} r d\Omega,$$
$$b_1(S, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} S d\Omega,\ c_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\Omega,\ c_2(\mathbf{u}, T, S) = \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla T) S d\Omega. \quad (1.6)$$

Из результатов [10, 11] вытекает следующая лемма

**Лемма 1.** *При выполнении условий* (i)–(iii) *существуют константы* $C_1$, $\alpha_0$, $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1', \gamma_2'$ *и* $\gamma_1, \gamma_2$, *зависящие от* $\Omega$, *с которыми выполняются неравенства*

$$|a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \le C_1^2 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \ \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2, \quad (1.7)$$
$$a_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \alpha_0 \|\mathbf{v}\|_1^2 \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},\ a_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \alpha_1 \|\mathbf{v}\|_1^2 \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_T, \quad (1.8)$$
$$|a_2(T, S)| \le \|T\|_1 \|S\|_1 \ \forall (T, S) \in H^1(\Omega)^2,\ a_2(S, S) \ge \alpha_2 \|S\|_1^2 \ \forall S \in \mathcal{T}, \quad (1.9)$$
$$|c_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \le \gamma_1' \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad (1.10)$$
$$|c_2(\mathbf{u}, T, S)| \le \gamma_2' \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_{L^4(\Omega)} \|S\|_1 \le \gamma_2 \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 \|S\|_1. \quad (1.11)$$

Положим $a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) \equiv \nu a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu_m a_1(\mathbf{H}, \mathbf{\Psi})$, $\tilde{a}_2(T, S) = a_2(T, S) + (\alpha T, S)_{\Gamma_N}$ при $\alpha \in L_+^\infty(\Gamma_N)$. В силу леммы 1 форма $a$ (либо $\tilde{a}_2$) непрерывна на $\mathbf{H}^1(\Omega)^2$ (либо $H^1(\Omega)$) и коэрцитивна на $H_{0T}$ (либо $\mathcal{T}$). С учетом (1.8), непрерывности оператора следа и (1.9) имеем

$$a((\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) \ge \nu_* (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\mathbf{\Psi}\|_1^2) \ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in H_{0T},\ \ \nu_* = \min(\alpha_0 \nu, \alpha_1 \nu_m), \quad (1.12)$$
$$|\tilde{a}_2(T, S)| \le (1 + C_\Gamma^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_N)}) \|T\|_1 \|S\|_1,\ \tilde{a}_2(S, S) \ge \alpha_2 \|S\|_1^2 \ \forall S \in \mathcal{T}. \quad (1.13)$$

## 2. Разрешимость задачи 1

Пусть в дополнение к (i)–(iii) выполняются условия:

(iv) $\mathbf{f} \in \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma_3)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$;

(v) $\mathbf{j} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\alpha \in L_+^\infty(\Gamma_N)$, $f \in L^{6/5}(\Omega)$, $\chi \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$.

Из условия $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ в (iv) вытекает, что $\beta_1 = \|b_1\| \equiv \|b_1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega), \mathbb{R})} < \infty$, причем

$$|b_1(T, \mathbf{v})| \le \beta_1 \|T\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \ \forall T \in H^1(\Omega),\ \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega). \quad (2.1)$$

Положим

$$< \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v} > = < \mathbf{f}, \mathbf{v} >_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)} - < g, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} >_{\Gamma_2} + < \mathbf{h}, \mathbf{v}_T >_{\Gamma_3},$$
$$< \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) > = < \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v} > + (\nu_m \mathbf{j}, \mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}),\ < l, S > = (f, S) + < \chi, S >_{\Gamma_N},$$

где $\mathbf{v}_T = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ — тангенциальная компонента вектора $\mathbf{v}$. В силу (iv), (v)

$$l \in \mathcal{T}^*,\ \mathbf{F} \in H_{0T}^*,\ \|l\|_{\mathcal{T}^*} \le C_2 \|f\|_{L^{6/5}(\Omega)} + C_\Gamma \|\chi\|_{-1/2, \Gamma_N}$$

и с учетом (1.7)

$$\|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*} \leq M_1 = \|\mathbf{f}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + C'_\Gamma \|g\|_{-1/2,\Gamma_2} + C''_\Gamma \|\mathbf{h}\|_{-1/2,\Gamma_3} + C_1 \nu_m \|\mathbf{j}\|, \tag{2.2}$$

где $C_2, C'_\Gamma, C''_\Gamma$ — константы, зависящие от $\Omega$ и $\Gamma$.

Предположим, что пятерка $(\mathbf{u},\mathbf{H},r,T,\mathbf{E}) \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega}) \times (\mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)) \times C^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega}) \times \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ является классическим решением задачи 1. Умножим первое уравнение в (1.1) на функцию $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$, а первое уравнение в (1.2) на $\operatorname{rot} \mathbf{\Psi}$, где $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T$, и проинтегрируем по $\Omega$. Учитывая формулы Грина, используя обозначения § 1 и складывая, получим

$$\nu a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) + c_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mu c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},r) + b_1(T,\mathbf{v}) = <\tilde{\mathbf{f}},\mathbf{v}> \ \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega),\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{2.3}$$

$$\nu_m a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi}) + \mu c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}) = (\nu_m \mathbf{j}, \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}) \ \forall \mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T, \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} \nu a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu_m a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi}) + c_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},r) + \mu[c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v})] + \\ + b_1(T,\mathbf{v}) = < \mathbf{F}, (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) > \ \forall (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) \in H_{0T},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Умножим далее уравнение в (1.4) на $S \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по $\Omega$. Получим

$$\lambda \tilde{a}_2(T,S) + c_2(\mathbf{u},T,S) \equiv \lambda a_2(T,S) + \lambda(\alpha T,S)_{\Gamma_N} + c_2(\mathbf{u},T,S) = < l, S > \quad \forall S \in \mathcal{T}. \tag{2.6}$$

В результате пришли к слабой формулировке задачи 1. Она заключается в нахождении четверки $(\mathbf{u},\mathbf{H},r,T) \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T \times L^2(\Omega) \times \mathcal{T}$ из (2.5), (2.6).

Пусть четверка $(\mathbf{u},\mathbf{H},r,T)$ является решением задачи (2.5), (2.6). Рассматривая сужение (2.5) на $V_{0T} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{V}_T$, заключаем, что тройка $(\mathbf{u},\mathbf{H},T)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) + c_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mu[c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v})] + b_1(T,\mathbf{v}) = \\ = < \mathbf{F}, (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) > \forall (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) \in V_{0T}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отметим, что хотя (2.7) не содержит пары $(r,\mathbf{E})$, ее можно однозначно восстановить по тройке $(\mathbf{u},\mathbf{H},T) \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T \times H^1(\Omega)$, удовлетворяющей (2.7), так что выполняются (2.5) и (1.2). Действительно пусть $(\mathbf{u},\mathbf{H},T) \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T \times \mathcal{T}$ — решение задачи (2.6), (2.7). Введем функционал $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{H},T,\mathbf{f})$ в $\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$ по формуле

$$< \mathbf{L}, \mathbf{v} > = \nu a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) + c_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mu c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v}) + b_1(T,\mathbf{v}) - < \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v} > .$$

Из свойств $(\mathbf{u},\mathbf{H},T)$ и форм $a_1$, $c_1$ вытекает, с учетом условия $\tilde{\mathbf{f}} \in \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, что $\mathbf{L} \in \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, причем $< \mathbf{L}, \mathbf{v} > = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}$. Поскольку форма $b$, введенная в (1.6), удовлетворяет inf-sup условию на $\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ [4], имеющему вид

$$\inf_{s \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v},s)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|s\|} \geq \beta = \text{const} > 0, \tag{2.8}$$

то из [10] следует существование единственной функции $r \in L^2(\Omega)$ такой, что выполняется тождество $< \mathbf{L}, \mathbf{v} > = - < \operatorname{grad} r, \mathbf{v} > = -b(\mathbf{v},r) \ \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$, совпадающее с (2.3). Полагая в (2.7) $\mathbf{v} = 0$, получаем (2.4). Складывая (2.3) с (2.4), приходим к (2.5).

Запишем (2.4) в виде $(\nu_m \operatorname{rot}\mathbf{H} + \mu\mathbf{H} \times \mathbf{u} - \nu_m \mathbf{j}, \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}) = 0 \ \forall \mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T$. В силу (1.5) это возможно тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \equiv \nu_m \operatorname{rot}\mathbf{H} + \mu\mathbf{H} \times \mathbf{u} - \nu_m \mathbf{j} = \operatorname{grad}\varphi + \mathbf{e}$. Здесь скалярный потенциал $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и вектор $\mathbf{e} \in \mathcal{H}(e)$ однозначно определяются по $\mathbf{A}$. Полагая $\mathbf{E} = \nabla\varphi + \mathbf{e}$, замечаем, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0$ и что тройка $(\mathbf{u},\mathbf{H},\mathbf{E})$ удовлетворяет (1.2).

Выбирая далее в (2.3) и (2.6) $\mathbf{v} \subset \mathcal{D}(\Omega)^3$, $S \in \mathcal{D}(\Omega)$, будем иметь

$$\nu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{b}T - \mu \operatorname{rot}\mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} r \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Omega)^3, \tag{2.9}$$

$$-\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.10}$$

Поскольку $f \in L^{6/5}(\Omega)$, $\mathbf{u} \cdot \nabla T \in L^{3/2}(\Omega)$, то из (2.10) следует, что $\Delta T \in L^{6/5}(\Omega)$. Отсюда и леммы 1.1 из [8] вытекает, что $\partial T/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Умножим (2.10) на $S \subset H^1(\Omega)$, проинтегрируем по $\Omega$, применим формулы Грина и вычтем из (2.6). Получим $< \lambda(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T) - \chi, S >_{\Gamma_N} = 0 \ \forall S \in \mathcal{T}$. Когда $S$ пробегает $\mathcal{T}$, ее сужение $S|_{\Gamma_N}$ пробегает $H_0^{1/2}(\Gamma_N)$ [12]. Отсюда следует, что

$$\lambda\Big(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\Big) = \chi \ \text{ в } \ H^{-1/2}(\Gamma_N). \tag{2.11}$$

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$, $\nabla r \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$, то из (2.9) следует, что $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$. Тогда $r|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_\Gamma \in \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$ [8]. Умножим далее (2.9) на функцию $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$, проинтегрируем по $\Omega$, используя формулы Грина, и вычтем полученный результат из (2.3). Получим $< g - r|_{\Gamma_2}, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} >_{\Gamma_2} + \nu < \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_3} - \mathbf{h}, \mathbf{v} \times \mathbf{n} >_{\Gamma_3} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$. Когда вектор $\mathbf{v}$ пробегает пространство $\tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$, функция $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_2}$ пробегает пространство $H_0^{1/2}(\Gamma_2)/\mathbb{R}$, тогда как $\mathbf{v}_T|_{\Gamma_3}$ пробегает $\mathbf{H}_{T,0}^{1/2}(\Gamma_3)$ (см. [7]). Отсюда выводим, что

$$r|_{\Gamma_2} = g \ \text{ в } \ H^{-1/2}(\Gamma_2), \ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_3} = \mathbf{h} \ \text{ в } \ \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma_3). \tag{2.12}$$

Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

**Лемма 2.** *Пусть выполняются условия* (i)–(v) *и пусть* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, T) \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *— решение задачи* (2.6), (2.7). *Тогда существуют такие функции* $r \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$, *что* $\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0$ *и выполняются уравнения* (2.9), (2.10), *а также уравнения в* (1.2) *почти всюду в* $\Omega$. *Кроме того,* $T$ *удовлетворяет граничному условию* (2.11). *Если к тому же* $\mathbf{f} \in L^{6/5}(\Omega)$, $\nabla r \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$, *то функции* $r$ *и* $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ *удовлетворяют* (2.12).

**Определение 1.** Слабым решением задачи 1 назовем любую четверку $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T) \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям (2.5), (2.6).

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия* (i)–(v). *Тогда возможно существование не более одного слабого решения задачи 1, удовлетворяющего условиям*

$$\gamma_1\|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\gamma_1\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}\|_1 + \frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\lambda}\|T\|_1 < \alpha_0\nu, \ \gamma_1\mu\|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\gamma_1\mu\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}\|_1 < \alpha_1\nu_m. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у задачи 1 два решения $(\mathbf{u}_1, \mathbf{H}_1, r_1, T_1)$ и $(\mathbf{u}_2, \mathbf{H}_2, r_2, T_2)$. Тогда для разности $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \in \mathbf{V}_T$, $T = T_1 - T_2 \in \mathcal{T}$ имеем

$$\nu a_1(\mathbf{u},\mathbf{u}) + \nu_m a_1(\mathbf{H},\mathbf{H}) + c_1(\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}) + \mu c_1(\mathbf{H}_1,\mathbf{H},\mathbf{u}) - \mu c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{u}_1) + b_1(T,\mathbf{u}) = 0, \tag{2.14}$$

$$\lambda\tilde{a}_2(T,T) + c_2(\mathbf{u},T_1,T) = -c_2(\mathbf{u}_2,T,T) = 0. \tag{2.15}$$

В силу (1.10) и (1.11) справедливы следующие оценки:

$$|c_1(\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\mathbf{u})| \le \gamma_1\|\mathbf{u}_1\|_1\|\mathbf{u}\|_1^2, \ \mu|c_1(\mathbf{H}_1,\mathbf{H},\mathbf{u})| \le \frac{\gamma_1\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_1\|_1\left(\mu\|\mathbf{H}\|_1^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2\right),$$
$$\mu|c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{u}_1)| \le \gamma_1\mu\|\mathbf{u}_1\|_1\|\mathbf{H}\|_1^2, \ \ |c_2(\mathbf{u},T_1,T)| \le \gamma_2\|\mathbf{u}\|_1\|T_1\|_1\|T\|_1. \tag{2.16}$$

Из (2.15) выводим с учетом (1.9) и последней оценки в (2.16), что $\|T\|_1 \le (\gamma_2/\alpha_2\lambda)\|\mathbf{u}\|_1\|T_1\|_1$. Используя эту оценку, (2.1), (1.8) и другие неравенства в (2.16), из (2.14) получаем, что

$$\Big(\alpha_0\nu - \gamma_1\|\mathbf{u}_1\|_1 - \frac{\gamma_1\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_1\|_1 - \frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\lambda}\|T_1\|_1\Big)\|\mathbf{u}\|_1^2 + \Big(\alpha_1\nu_m - \gamma_1\mu\|\mathbf{u}_1\|_1 - \frac{\gamma_1\mu\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_1\|_1\Big)\|\mathbf{H}\|_1^2 \le 0. \tag{2.17}$$

Предполагая, что $(\mathbf{u}_1, \mathbf{H}_1, r_1, T_1)$ удовлетворяет (2.13), из (2.17) и (2.15) выводим, что $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{H} = 0$, $T = 0$. Отсюда и леммы 2 следует, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$, $T_1 = T_2$ и $r_1 = r_2$.

Для доказательства существования решения $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, T)$ задачи (2.6), (2.7) применим теорему Шаудера. Введем отображение $G : V_{0T} \to V_{0T}$, действующее по формуле $G(\mathbf{w}, \mathbf{h}) = (\mathbf{u}, \mathbf{H})$, где $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ — решение линейной задачи

$$a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) + a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) = < \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) > -b_1(\tau, \mathbf{v}) \ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in V_{0T}. \tag{2.18}$$

Здесь $a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) = c_1(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu[c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{h}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \mathbf{h}, \mathbf{v})]$, а $T \in \mathcal{T}$ — решение линейной задачи

$$\lambda \tilde{a}_2(T, S) + c_2(\mathbf{w}, T, S) = < l, S > \ \forall S \in \mathcal{T}. \tag{2.19}$$

Отображение $G$ определено корректно. Действительно, $c_2(\mathbf{w}, \tau, \tau) = 0$ и в силу (1.11) форма $\lambda \tilde{a}_2 + c_2(\mathbf{w}, \cdot, \cdot)$ в левой части (2.19) непрерывна и коэрцитивна на $\mathcal{T}$ с константой $\alpha_2 \lambda > 0$, а правая часть в (2.19) непрерывна на $\mathcal{T}$. Тогда по теореме Лакса-Мильграма для любой пары $(\mathbf{w}, \mathbf{h}) \in V_{0T}$ решение $T \in \mathcal{T}$ задачи (2.19) существует, единственно и выполняется оценка

$$\|T\|_1 \le M_T = (1/\alpha_2 \lambda)(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + C_\Gamma \|\chi\|_{\Gamma_N}). \tag{2.20}$$

Для любой фиксированной пары $(\mathbf{w}, \mathbf{h}) \in V_{0T}$ форма $a + a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}$ в левой части (2.18) непрерывна и коэрцитивна на $V_{0T}$ с константой $\nu_*$ из (1.12). Тогда из теоремы Лакса-Мильграма вытекает, что для каждой пары $(\mathbf{w}, \mathbf{h}) \in V_{0T}$ решение $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}}) \in V_{0T}$ задачи (2.18) существует, единственно и выполняется в силу (2.2) оценка

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_1 \equiv \left(\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2\right)^{1/2} \le M \equiv \frac{1}{\nu_*} M_1, \tag{2.21}$$

где $M_1$ определена в (2.2). Введем в $V_{0T}$ шар $B_\rho = \{(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in V_{0T} : \|(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\|_1 \le \rho\}$, где $\rho = M$. Оператор $G$ отображает шар $B_\rho$ в себя. Рассуждая, как в [8, 4], показываем, что $G$ компактен и непрерывен на $B_\rho$. Из теоремы Шаудера тогда вытекает, что оператор $G$ имеет неподвижную точку $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) = G(\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in B_\rho$, которая и является решением задачи 1.

Сформулируем полученный результат

**Теорема 2.** *При выполнении условий* (i) – (v) *существует слабое решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T) \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* (2.20), (2.21). *Если к тому же функции* $\mathbf{f}, \mathbf{h}, g, \mathbf{j}, f$ *и* $\chi$ *"малы" в том смысле, что*

$$[\gamma_1 + (\gamma_1 \sqrt{\mu}/2)]M + (\beta_1 \gamma_2 / \alpha_2 \lambda) M_T < \alpha_0 \nu, \ [\gamma_1 \mu + (\gamma_1 \mu \sqrt{\mu}/2)]M < \alpha_1 \nu_m,$$

*то слабое решение единственно.*

## 3. Постановка и разрешимость задач управления

Сформулируем задачу управления для модели (1.1)–(1.4). Для этого разобьем множество данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда внесем функции $\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{h}, g$, и группу управлений, куда внесем функции $\mathbf{j}, \alpha, f, \chi$, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$. Группу управлений будем обозначать через $v$, группу фиксированных данных — через $v_0$. Полагая

$$X = \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega), \qquad Y = H_{0T}^* \times L^2(\Omega) \times L^{6/5}(\Omega),$$

обозначим через $\tilde{J} : X \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывный снизу функционал и предположим, что

(j) $K_1 \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, $K_2 \subset L^\infty_+(\Gamma_N)$, $K_3 \in L^{6/5}(\Omega)$, $K_4 \subset H^{-1/2}(\Gamma_N)$ — непустые замкнутые выпуклые множества;

(jj) $\mu_l = \mathrm{const} \geq 0$ и $K_l$ — ограниченное множество либо $\mu_l > 0$, $l = \overline{1,4}$ и $\tilde{J}$ ограничен снизу.

Полагая $K \equiv K_1 \times K_2 \times K_3 \times K_4$, $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T)$ $v_0 = (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{h}, g)$, $v = (\mathbf{j}, \alpha, f, \chi)$, введем функционал $J : X \times K \to \mathbb{R}$ по формуле

$$J(\mathbf{x}, v) = \tilde{J}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|\mathbf{j}\|^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\alpha\|^2_{L^\infty(\Gamma_N)} + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2_{L^{6/5}(\Omega)} + \frac{\mu_4}{2}\|\chi\|_{-1/2,\Gamma_N}. \tag{3.1}$$

Введем оператор $F \equiv (F_1, F_2, F_3) : X \times K \to Y$, где

$$\begin{aligned}
&< F_1(\mathbf{x}, v), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) >= a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) + c_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, r) + b_1(T, \mathbf{v}) + \\
&\qquad\qquad + \mu[c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})] - < \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) >, \\
&< F_2(\mathbf{x}, v), s >= b(\mathbf{u}, s), \\
&< F_3(\mathbf{x}, v), S >= \lambda \tilde{a}_2(T, S) + c_2(\mathbf{u}, T, S) - (f, S) - < \chi, S >_{\Gamma_N},
\end{aligned}$$

и запишем (2.5), (2.6) в виде

$$F(\mathbf{x}, v) \equiv F(\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T, \mathbf{j}, \alpha, f, \chi) = 0. \tag{3.2}$$

Рассматривая (3.2) как условное ограничение на состояние $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T) \in X$ и управление $v \in K$, сформулируем следующую задачу управления

$$J(\mathbf{x}, v) \equiv J(\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T, \mathbf{j}, \alpha, f, \chi) \to \inf F(\mathbf{x}, v) = 0, \ (\mathbf{x}, v) \in X \times K. \tag{3.3}$$

В качестве возможных функционалов качества $\tilde{J}(\mathbf{x})$ будем рассматривать следующие

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{rot}\mathbf{u}|^2 d\Omega, \ J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\|_1^2, \ J_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|T\|_1^2. \tag{3.4}$$

Введем множество $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, v) \in X \times K : F(\mathbf{x}, v) = 0, J(\mathbf{x}, v) < \infty\}$ допустимых пар для задачи (3.3). Аналогично [6] доказываются теоремы.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия* (i)–(v), (j), (jj), $\tilde{J} : X \to \mathbb{R}$ — *слабо полунепрерывный снизу функционал, и множество* $Z_{ad}$ *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи управления* (3.3).

**Теорема 4.** *Пусть выполняются условия* (i)–(v), *причем* $\mu_l > 0$, *либо* $\mu_l \geq 4$ *и* $K_l$ — *ограниченные множества при* $1 \leq l \leq 4$. *Тогда существует по крайней мере одно решение задачи управления* (3.3) *при* $\tilde{J} = J_k$, $k = 1, 2, 3$.

## 4. Принцип Лагранжа. Вывод системы оптимальности

Производная Фреше по $\mathbf{x}$ от оператора $F$ в (3.2) в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{r}, \hat{T}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\alpha}, \hat{f}, \hat{\chi}) \in X \times K$ есть линейный непрерывный оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) : X \to Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $(\mathbf{w}, \mathbf{h}, z, \tau) \in X$ элемент $(\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3) \in Y$, где

$$\begin{aligned}
&< \hat{\mathbf{f}}_1, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) >= \nu a_1(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \nu_m a_1(\mathbf{h}, \mathbf{\Psi}) + [c_1(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] + b(\mathbf{v}, z) + b_1(\tau, \mathbf{v}) - \\
&\qquad - \mu[c_1(\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{h}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})] + \mu[c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) + c_1(\mathbf{\Psi}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{w})] \qquad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in \tilde{\mathbf{H}}^1_0(\Omega) \times \mathbf{V}_T, \\
&< \hat{f}_2, s >= b(\mathbf{w}, s) \qquad \forall s \in L^2(\Omega), \\
&< f_3, S >= \lambda \tilde{\tilde{a}}_2(\tau, S) + c_2(\hat{\mathbf{u}}, \tau, S) + c_2(\mathbf{w}, \hat{T}, S), \ \tilde{\tilde{a}}_2(\tau, S) = a_2(\tau, S) + (\hat{\alpha}\tau, S)_{\Gamma_N}.
\end{aligned}$$

Рассуждая как в [6], легко показываем, что $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}) = \Phi + \hat{\Phi}$, где $\Phi : X \to Y$ — изоморфизм, а $\hat{\Phi} : X \to Y$ — компактный оператор. Это означает фредгольмовость оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})$.

Положим $\mathbf{y}^* = ((\xi,\eta),\sigma,\theta) \in Y^* \equiv H_{0T} \times L^2(\Omega) \times \mathcal{T}$ и введем лагранжиан $\mathcal{L} : X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},v,\lambda_0,\mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x},v) + < \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x},v) >_{Y^*\times Y} \equiv$$
$$\equiv \lambda_0 J(\mathbf{x},v) + < F_1(\mathbf{x},v),(\xi,\eta) >_{H^*_{0T}\times H_{0T}} + (F_2(\mathbf{x},v),\sigma) + < F_3(\mathbf{x},v),\theta >_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} . \quad (4.1)$$

Пусть $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$. Из фредгольмовости оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}) : X \to Y$ вытекает в силу результатов [13, с.79]

**Теорема 5.** *Пусть при выполнении условий* (i) – (v) $K_1 \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, $K_2 \subset L^\infty_+(\Gamma_N)$, $K_3 \subset L^{6/5}(\Omega)$, $K_4 \subset H^{-1/2}(\Gamma_N)$ *— непустые выпуклые множества,* $(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}) \equiv (\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{H}},\hat{r},\hat{T},\hat{\mathbf{j}},\hat{\alpha},\hat{f},\hat{\chi}) \in X \times K$ *— элемент, на котором достигается локальный минимум в задаче* (3.3), *и пусть функционал* $J(\mathbf{x},\cdot) : K \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$ *для любого элемента* $v \in K$ *и выпуклый по* $v$ *для каждой точки* $\mathbf{x} \in X$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0,\mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$ *такой, что выполняется уравнение Эйлера-Лагранжа*

$$\lambda_0 < J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),(\mathbf{w},\mathbf{h},z,\tau) >_{X^*\times X} + < \mathbf{y}^*, F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})(\mathbf{w},\mathbf{h},z,\tau) >_{Y^*\times Y} = 0 \;\; \forall(\mathbf{w},\mathbf{h},z,\tau) \in X \quad (4.2)$$

*и принцип минимума* $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v},\lambda_0,\mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}},v,\lambda_0,\mathbf{y}^*)$ $\forall v \in K$, *эквивалентный неравенству*

$$(\mathbf{j}-\hat{\mathbf{j}}, \operatorname{rot}\eta) - \lambda((\alpha-\hat{\alpha})\hat{T},\theta)_{\Gamma_N} + (f-\hat{f},\theta) +$$
$$< \chi-\hat{\chi},\theta >_{\Gamma_N} \leq \lambda_0[J(\hat{\mathbf{x}},v) - J(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})] \;\; \forall v = (\mathbf{j},\alpha,f,\chi) \in K. \quad (4.3)$$

Отметим, что (4.2) эквивалентно трем тождествам. Они получаются, если в (4.2) последовательно полагать $z=0$, $\tau=0$, затем $\mathbf{w}=0, \mathbf{h}=0$, $z=0$ и $\mathbf{w}=0$, $\mathbf{h}=0$, $\tau=0$:

$$\nu a_1(\mathbf{w},\xi) + c_1(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{w},\xi) + c_1(\mathbf{w},\hat{\mathbf{u}},\xi) + \mu[c_1(\eta,\hat{\mathbf{H}},\mathbf{w}) + c_1(\eta,\mathbf{h},\hat{\mathbf{u}})] + b(\mathbf{w},\sigma) +$$
$$\nu_m a_1(\mathbf{h},\eta) - \mu[c_1(\hat{\mathbf{H}},\mathbf{h},\xi) + c_1(\mathbf{h},\hat{\mathbf{H}},\xi)] + c_2(\mathbf{w},\hat{T},\theta) +$$
$$+\lambda_0 < J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mathbf{w} > + \lambda_0 < J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mathbf{h} > = 0 \; \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{H}}^1_0(\Omega), \; \forall \mathbf{h} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega), \quad (4.4)$$
$$\lambda\tilde{\tilde{a}}_2(\tau,\theta) + c_2(\hat{\mathbf{u}},\tau,\theta) + b_1(\tau,\xi) + \lambda_0 < J'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\tau > = 0 \; \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad (4.5)$$
$$b(\xi,z) + \lambda_0(J'_r(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),z) = 0 \;\; \forall z \in L^2(\Omega) \Longrightarrow \operatorname{div}\xi = \lambda_0 J'_r(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}) \;\text{ в }\; \Omega. \quad (4.6)$$

Соотношения (4.4)–(4.6) вместе с принципом минимума, эквивалентным вариационному неравенству (4.3), и операторным ограничением (3.2), эквивалентным соотношениям (2.5), (2.6), представляют собой систему оптимальности для задачи (3.3).

## 5. Единственность решения задачи управления

Исследуем здесь единственность решения задачи управления (3.3) на основе методики, развитой в [9]. Предварительно установим достаточные условия регулярности множителя Лагранжа. Будем предполагать, что фиксированные элементы $v_0 \equiv (\mathbf{f},\mathbf{b},\mathbf{h},g)$ и управления $v = (\mathbf{j},\alpha,f,\chi) \in K$ удовлетворяют условиям

$$\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_0\nu} + \frac{\gamma_1}{\alpha_0\nu}\frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)M + \frac{\beta_1}{\alpha_0\nu}\frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}M_T < 1, \;\; \left(\frac{\gamma_1\mu}{\alpha_1\nu_m} + \frac{\gamma_1\mu}{\alpha_1\nu_m}\frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)M < 1, \quad (5.1)$$

обеспечивающим единственность решения задачи 1, где $M \equiv M(v_0, v)$ и $M_T \equiv M_T(v)$ введены в (2.21), (2.20).

Докажем, что при выполнении (5.1) любой нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, удовлетворяющий (4.2) или, что то же, тождествам (4.4)–(4.6), в которых элементы $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{r}, \hat{T})$ и $\hat{v}$ связаны соотношением $F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = 0$, является регулярным, т. е. имеет вид $(1, (\xi, \eta), \sigma, \theta)$. Указанный факт эквивалентен несуществованию нетривиальных решений (4.4)–(4.6) при $\lambda_0 = 0$. Пусть $\mathbf{y}^* = ((\xi, \eta), \sigma, \theta) \in Y^*$ — произвольное решение системы (4.4)–(4.6) при $\lambda_0 = 0$. Полагая $\mathbf{w} = \xi$, $\mathbf{h} = \eta$, $\tau = \theta$, $z = \sigma$, имеем

$$\nu a_1(\xi,\xi)+\nu_m a_1(\eta,\eta)+c_1(\xi,\hat{\mathbf{u}},\xi)+\mu c_1(\eta,\eta,\hat{\mathbf{u}})-\mu c_1(\hat{\mathbf{H}},\eta,\xi)+c_2(\xi,\hat{T},\theta)=0,\ b(\xi,\sigma)=0, \tag{5.2}$$

$$\lambda\tilde{\tilde{a}}_2(\theta,\theta) + b_1(\theta,\xi) \equiv \lambda a_2(\theta,\theta) + \lambda(\hat{\alpha}\theta,\theta)_{\Gamma_N} + b_1(\theta,\xi) = 0. \tag{5.3}$$

Рассуждая как при доказательстве единственности решения в § 2, из (5.3) выводим, что $\|\theta\|_1 \le (\beta_1/\alpha_2\lambda)\|\xi\|_1$, а из (5.2) приходим к следующему неравенству:

$$\Big(\alpha_0\nu-\gamma_1\|\hat{\mathbf{u}}\|_1-\frac{\gamma_1\sqrt{\mu}}{2}\|\hat{\mathbf{H}}\|_1-\frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\lambda}\|\hat{T}\|_1\Big)\|\xi\|_1^2+\Big(\alpha_1\nu_m-\gamma_1\mu\|\hat{\mathbf{u}}\|_1-\frac{\gamma_1\mu\sqrt{\mu}}{2}\|\hat{\mathbf{H}}\|_1\Big)\|\eta\|_1^2 \le 0. \tag{5.4}$$

Отсюда в силу (5.1) вытекает, что $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Тогда из (5.3) получаем на основании (1.13), что $\theta = 0$. С учетом этого (4.4) примет вид $b(\mathbf{w}, \sigma) = 0\ \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$. В [4] показано, что для любой функции $\sigma \in L^2(\Omega)$ найдется такая функция $\mathbf{w}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega)$, что

$$b(\mathbf{w}_1,\sigma)/\|\mathbf{w}_1\|_1 \ge \tilde{C}\|\sigma\|, \tag{5.5}$$

где $\tilde{C}$ — некоторая положительная константа. В таком случае $\sigma = 0$.

**Теорема 6.** *Пусть выполняются условия теоремы* 5 *и* (5.1). *Тогда:* 1) *однородное уравнение* (4.2) *имеет лишь тривиальное решение* $\mathbf{y}^* = 0$; 2) *любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий* (4.2), *является регулярным, т. е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$; 3) *решение* $\mathbf{y}^*$ *уравнения* (4.2) *при* $\lambda_0 = 1$ *единственно.*

**Следствие 1** *При выполнении условий теоремы* 6 *множитель Лагранжа для задачи* (3.3) *регулярен и определяется единственным образом.*

Исследуем единственность решения задачи управления “температурного” типа, когда $J = J_3$, а роль управлений играют “температурные” данные $f$ и $\chi$. Последнее эквивалентно выбору в качестве $K_1, K_2$ фиксированных элементов $\mathbf{j}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\alpha_0 \in L^\infty(\Gamma_N)$. Полагая $v_0 = (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{h}, g, \mathbf{j}_0, \alpha_0)$, $v = (f, \chi)$, $\mu_l = 0$, $l = \overline{1,4}$ в (3.1), рассмотрим задачу

$$J_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|T\|_1^2 \to \inf,\ F(\mathbf{x}, v) = 0,\ \mathbf{x} \in X,\ v = (f,\chi) \in K = K_3 \times K_4. \tag{5.6}$$

Предположим, что выполняются условия

$$\Big(\frac{\gamma_1}{\alpha_0\nu} + \frac{\gamma_1}{\alpha_0\nu}\frac{\sqrt{\mu}}{2}\Big)M^0 + \frac{\beta_1}{\alpha_0\nu}\frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}M_T^0 < \frac{1}{2},\ \Big(\frac{\gamma_1\mu}{\alpha_1\nu_m} + \frac{\gamma_1\mu}{\alpha_1\nu_m}\frac{\sqrt{\mu}}{2}\Big)M^0 < \frac{1}{2}, \tag{5.7}$$

где $M^0 = \sup_{v\in K} M_{\mathbf{u}}(v_0, v)$, $M_T^0 = \sup_{v\in K} M_T(v_0, v)$, имеющие смысл условий малости данных и управлений.

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{r}, \hat{T}, \hat{f}, \hat{\chi}) \in X \times K$ — решение задачи (5.6). Для него, в силу теоремы 6, существует единственный множитель Лагранжа $(1, \mathbf{y}^*) \equiv (1, (\xi, \eta), \sigma, \theta)$, с которым выполняются тождества (4.4)–(4.6), где следует положить $\lambda_0 = 1$, $< J_T'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \tau >= (\hat{T}, \tau)$, $J_{\mathbf{u}}' = J_{\mathbf{H}}' = J_r' = 0$, и выполняется принцип минимума, принимающий вид

$$(f - \hat{f}, \theta) + < \chi - \hat{\chi}, \theta >_{\Gamma_N} \le 0\ \forall (f,\chi) \in K_3 \times K_4. \tag{5.8}$$

Предположим теперь, что существуют два решения $(\mathbf{x}_1, v_1) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{H}_1, r_1, T_1, f_1, \chi_1)$ и $(\mathbf{x}_2, v_2) \equiv (\mathbf{u}_2, \mathbf{H}_2, r_2, T_2, f_2, \chi_2)$ задачи (5.6). Обозначим через $(1, \mathbf{y}_i^*)$, $i = 1, 2$ отвечающие указанным решениям нетривиальные множители Лагранжа. Полагая $f = f_1 - f_2$, $\chi = \chi_1 - \chi_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_2^*$, вычтем уравнения (2.3), (2.4), (2.6) и (2.7), записанные для $(\mathbf{x}_2, v_2)$, из соответствующих уравнений для $(\mathbf{x}_1, v_1)$:

$$\nu a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + [c_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v})] - -\mu[c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}_2, \mathbf{v})] + \\ + b(\mathbf{v}, r) + b_1(T, \mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_0^1(\Omega), \tag{5.9}$$

$$\nu_m a_1(\mathbf{H}, \mathbf{\Psi}) + \mu c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}_1) + \mu c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}_2, \mathbf{u}) = 0 \ \ \forall \mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T, \tag{5.10}$$

$$\lambda \tilde{a}_2(T, S) + c_2(\mathbf{u}_1, T, S) + c_2(\mathbf{u}, T_2, S) = (f, S) + < \chi, S >_{\Gamma_N} \ \ \forall S \in \mathcal{T}, \tag{5.11}$$

$$b(\mathbf{u}, s) = 0 \ \forall s \in L^2(\Omega), \ \ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \ T|_{\Gamma_D} = 0. \tag{5.12}$$

Из (5.12) следует, что $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T$. Положим сначала в (5.9) и (5.10) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $\mathbf{\Psi} = \mathbf{H}$ и сложим. Учитывая, что $c_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, $b(\mathbf{u}, r) = 0$, получим

$$\nu a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \nu_m a_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}) + c_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) + \mu c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{u}_1) - \mu c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}, \mathbf{u}) + b_1(T, \mathbf{u}) = 0. \tag{5.13}$$

Точно так же положим в (5.9), (5.10), (5.11) $\mathbf{v} = \xi$, $\mathbf{\Psi} = \eta$, $S = \theta$ и сложим. Получим

$$\nu a_1(\mathbf{u}, \xi) + \nu_m a_1(\mathbf{H}, \eta) + [c_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \xi) + c_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}, \xi)] + b_1(T, \xi) - \mu[c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}, \xi) + c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}_2, \xi)] + \\ + \mu[c_1(\eta, \mathbf{H}, \mathbf{u}_1) + c_1(\eta, \mathbf{H}_2, \mathbf{u})] + \lambda \tilde{a}_2(T, \theta) + c_2(\mathbf{u}, T_2, \theta) + c_2(\mathbf{u}_1, T, \theta) = (f, \eta) + <\chi, \eta>_{\Gamma_N}. \tag{5.14}$$

Рассуждая как при выводе (2.13) с учетом (5.7) из (5.13), выводим, что

$$\frac{\alpha_0 \nu}{2} \|\mathbf{u}\|_1^2 + \frac{\alpha_1 \nu_m}{2} \|\mathbf{H}\|_1^2 \leq \beta_1 \|T\|_1 \|\mathbf{u}\|_1. \tag{5.15}$$

Из (5.15) приходим с учетом (1.12) к следующей оценке для $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$:

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_1 \equiv (\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2)^{1/2} < \frac{2\beta_1}{\nu_*} \|T\|_1. \tag{5.16}$$

Полагая $(f, \chi) = (f_2, \chi_2)$ в неравенстве (5.8), записанном для $(f_1, \chi_1)$, имеем

$$(f_2 - f_1, \theta_1) + < \chi_2 - \chi_1, \theta_1 >_{\Gamma_N} \leq 0,$$

полагая $(f, \chi) = (f_1, \chi_1)$ в (5.8) при $(f_2, \chi_2)$, получим

$$(f_1 - f_2, \theta_2) + < \chi_1 - \chi_2, \theta_2 >_{\Gamma_N} \leq 0$$

Складывая последние два неравенства, будем иметь

$$-(f, \theta) - < \chi, \theta >_{\Gamma_N} \leq 0. \tag{5.17}$$

Вычтем друг из друга тождества (4.4), (4.5) при $\lambda_0 = 1$, $J = J_3$, записанные соответственно для $(\mathbf{x}_1, v_1, \mathbf{y}_1^*)$ и $(\mathbf{x}_2, v_2, \mathbf{y}_2^*)$, положим $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\mathbf{h} = \mathbf{H}$, $\tau = T$, сложим и вычтем из полученного результата (5.14). Учитывая (5.17), получим

$$c_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) - \mu c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \xi_1 + \xi_2) + \mu c_1(\eta_1 + \eta_2, \mathbf{H}, \mathbf{u}) + c_2(\mathbf{u}, T, \theta_1 + \theta_2) \leq -\|T\|_1^2. \tag{5.18}$$

Предположим, что выполняется условие

$$|c_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) - \mu c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \xi_1 + \xi_2) + \mu c_1(\eta_1 + \eta_2, \mathbf{H}, \mathbf{u}) + c_2(\mathbf{u}, T, \theta_1 + \theta_2)| < \|T\|_1^2. \tag{5.19}$$

Тогда из (5.18) будет вытекать, что $T = 0$. С учетом этого из (5.16) получаем, что $\mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$. Тогда из (5.9), используя (5.5), получаем, что и $r = 0$. Соотношение (5.11) принимает вид $(f, S) + < \chi, S >_{\Gamma_N} = 0 \ \forall S \in \mathcal{T}$, откуда выводим, что $f = 0$, $\chi = 0$. Осталось найти условия, при которых выполняется (5.19).

Записав (4.4), (4.5) для $\xi_i$, $\eta_i$, $\sigma_i$ и $\theta_i$ при $\lambda_0 = 1$, $J = J_3$, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_i$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_i$, $\hat{T} = T_i$, $i = 1, 2$, положим в них $\mathbf{w} = \xi_i \in \mathbf{W}$, $\mathbf{h} = \eta_i \in \mathbf{V}_T$, $\tau = \theta_i \in \mathcal{T}$. Получим

$$\nu a_1(\xi_i, \xi_i) + \nu_m a_1(\eta_i, \eta_i) + c_1(\xi_i, \mathbf{u}_i, \xi_i) + \mu c_1(\eta_i, \eta_i, \mathbf{u}_i) - \mu c_1(\mathbf{H}_i, \eta_i, \xi_i) + c_2(\xi_i, T_i, \theta_i) = 0, \quad (5.20)$$

$$\lambda \tilde{a}_2(\theta_i, \theta_i) + \lambda(\alpha\theta_i, \theta_i)_{\Gamma_N} + b_1(\theta_i, \xi_i) = -(T_i, \theta_i), \ i = 1, 2. \quad (5.21)$$

Из (5.21) получаем

$$\|\theta_i\|_1 \le \frac{\beta_1}{\alpha_2\lambda}\|\xi_i\|_1 + \frac{1}{\alpha_2\lambda}M_T^0, \quad |c_2(\xi_i, T_i, \theta_i)| \le \frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\lambda}\|T_i\|_1\|\xi_i\|_1^2 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}(M_T^0)^2\|\xi_i\|_1. \quad (5.22)$$

Рассуждая как в § 2, из (5.20) получаем неравенство

$$\left(\alpha_0\nu - \gamma_1\|\mathbf{u}_i\|_1 - \frac{\gamma_1\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_i\|_1\right)\|\xi\|_1^2 + \left(\alpha_1\nu_m - \gamma_1\mu\|\mathbf{u}_i\|_1 - \frac{\gamma_1\mu\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_i\|_1\right)\|\eta\|_1^2 \le |c_2(\xi_i, T_i, \theta_i)|.$$

Используя второе неравенство в (5.22), будем иметь

$$\left(\alpha_0\nu - \gamma_1\|\mathbf{u}_i\|_1 - \frac{\gamma_1\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_i\|_1 - \frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\lambda}\|T_i\|_1\right)\|\xi\|_1^2 + \left(\alpha_1\nu_m - \gamma_1\mu\|\mathbf{u}_i\|_1 - \frac{\gamma_1\mu\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_i\|_1\right)\|\eta\|_1^2 \le$$
$$\le \frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}(M_T^0)^2\|\xi_i\|_1.$$

На основании (5.7) отсюда получаем оценку

$$\frac{\alpha_0\nu}{2}\|\xi_i\|_1^2 + \frac{\alpha_1\nu_m}{2}\|\eta_i\|_1^2 \le \frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}(M_T^0)^2\|\xi_i\|_1. \quad (5.23)$$

Откуда вытекает, что

$$\frac{\alpha_0\nu}{2}\|\xi_i\|_1 \le \frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}(M_T^0)^2.$$

Учитывая (1.12) и (5.7) из (5.23) выводим

$$\|(\xi_i, \eta_i)\|_1 \equiv (\|\xi_i\|_1^2 + \|\eta_i\|_1^2)^{1/2} < \frac{2}{\nu_*}\frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}(M_T^0)^2 < \frac{\alpha_0\nu}{\beta_1\nu_*}M_T^0. \quad (5.24)$$

Используя (5.24), из первого неравенства в (5.22) получаем

$$\|\theta_i\|_1 < \frac{M_T^0}{\alpha_2\lambda}\left(\frac{\alpha_0\nu}{\nu_*} + 1\right). \quad (5.25)$$

Пусть исходные данные для задачи (5.6) таковы, что

$$\frac{4\beta_1 M_T^0}{\nu_*}\left[\frac{6\gamma_1\alpha_0\nu}{\nu_*^2} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2\lambda}\left(\frac{\alpha_0\nu}{\nu_*} + 1\right)\right] < 1. \quad (5.26)$$

Используя (5.16), (5.24)–(5.26), приходим к (5.19). Сформулируем полученный результат.

**Теорема 7.** *Пусть в дополнение к условиям* (i)-(v) $\mathbf{j}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\alpha_0 \in L_+^\infty(\Gamma_N)$ *— фиксированные элементы, и выполняются условия* (5.7), (5.26). *Тогда решение* $((\mathbf{u}, \mathbf{H}, r, T), f, \chi) \in X \times K$ *задачи управления* (5.6) *единственно.*

По аналогичной схеме доказывается единственность решения ряда других конкретных задач управления “гидродинамического” и “электромагнитного” типов.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, направленные на улучшение статьи.

## Список литературы


1. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости со смешанными граничными условиями Препринт № 2. ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука. 2004. 40 с.

2. *Meir A.J. Schmidt P.G.* On electromagnetically and thermally driven liquid-metall flows // Nonlinear Analysis. 2001. V. 47. P. 3281–3294.

3. *Park H.M., Jung W.S.* Numerical solution of optimal magnetic suppression of natural convection in magneto-hydrodynamic flows by empirical reduction of modes // Computers & Fluids. 2002. V. 31. P. 309–334.

4. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости со смешанными граничными условиями // Дальневост. мат. ж. 2003. Т. 4. № 1. С. 108–126.

5. *Meir A.J.* The equations of stationary, incompressible magnetohydrodynamics with mixed boundary conditions // Comp. Math. Applic. 1993. V. 25. P. 13–29.

6. *Алексеев Г.В.* Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45. № 2. С. 243–262.

7. *Alekseev G.V. and Smishliaev A.B.* Solvability of the boundary-value problems for the Boussinesq equations with inhomogeneous boundary conditions // J. Math. Fluid Mech. 2001. V. 3. № 1. P. 18–39.

8. *Алексеев Г.В., Смышляев А.Б., Терешко Д.А.* Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса при смешанных краевых условиях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 1. Р. 84–98.

9. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 5. С. 971–991.

10. *Girault V., Raviart P.A.* Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

11. *Valli A.* Orthogonal decompositions of $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$. Preprint UTM 493. Department of Mathematics. University of Toronto. Galamen, 1995.

12. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Monograph and studies in mathematics. London: Pitman, 1985.

13. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 1 августа 2004 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00136).

---

*Brizitskii R.V.* Control problems for the MGD model of viscous heat-conducting fluid under mixed boundary conditions. Far Eastern Mathematical Journal. 2004. V. 5. № 2. P. 226–238.

ABSTRACT

The control problems for the stationary equations of magnetic hydrodynamics of viscous heat-conducting fluid under mixed boundary conditions for velocity and electric and magnetic fields are considered. The regularity of Lagrange multipliers for the considered control problems is proved. The sufficient conditions of uniqueness of solutions of control problem for specific coast functional are obtained.

Key words: *magnetic hydrodynamics, heat-conducting fluid, control problem.*