



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. N. Subbotina, Universal optimal strategies in positional differential games, *Differ. Uravn.*, 1983, Volume 19, Number 11, 1890–1896

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

February 18, 2025, 00:02:57



Н. Н. СУББОТИНА

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

В теории позиционных дифференциальных игр известно, что для фиксированной начальной позиции существуют оптимальные стратегии игроков, образующие седловую точку. Этот факт имеет место, если принять систему определений дифференциальной игры из [1]. Чтобы построить универсальные стратегии, оптимальные для целой области начальных позиций, была предложена новая формализация [2]. Однако оставался открытым вопрос о существовании универсальных оптимальных стратегий в рамках формализации, предложенной в [1]. В настоящей работе построен пример, который дает отрицательный ответ на этот вопрос. В заключение статьи дано краткое обсуждение некоторых определений универсальных оптимальных стратегий.

1. Прежде чем перейти к рассмотрению упомянутого примера, приведем постановку исследуемого вопроса. Пусть динамика конфликтно-управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad (1)$$

где $f(\cdot) : (-\infty, \theta] \times R^n \times P \times Q \rightarrow R^n$ — функция, удовлетворяющая стандартным требованиям, обеспечивающим существование, единственность и продолжимость вплоть до фиксированного момента окончания игры θ любого решения $x(\cdot)$ уравнения (1) с начальными данными $(t_0, x_0) \in (-\infty, \theta] \times R^n$. Множества P и Q — геометрические ограничения на управления первого и второго игроков — компакты в конечномерных пространствах R^p и R^q соответственно.

Плата в данной игре определяется соотношением

$$\gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta)), \quad (2)$$

где $\sigma(\cdot) : R^n \rightarrow R$ — локально-липшицева функция. Первый игрок, выбирающий управление u , заинтересован в минимальном значении платы; второй игрок, выбирающий управление v , стремится максимизировать плату γ .

Предполагается также, что для любых $s \in R^n$, $x \in R^n$, $t \in (-\infty, \theta]$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре:

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} s^t f(t, x, u, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s^t f(t, x, u, v). \quad (3)$$

Символ t означает транспонирование.

Согласно формализации из [1], позиционные стратегии U и V первого и второго игроков соответственно отождествляются с произвольными функциями $U : (-\infty, \theta] \times R^n \rightarrow P$ и $V : (-\infty, \theta] \times R^n \rightarrow Q$. Стратегии U и V порождают пучки движений $X(t_0, x_0, U)$ и $X(t_0, x_0, V)$, выходящих из начальной позиции (t_0, x_0) . Пучок $X(t_0, x_0, U)$ определяется как совокупность равномерных на $[t_0, \theta]$ пределов последовательностей аппроксимационных движений $x(\cdot, t_0, x_0^{(k)}, U, v_k(\cdot), \Gamma_k)$. Здесь $\Gamma_k = \{\tau_0^{(k)} = t_0 < \tau_1^{(k)} < \dots < \tau_{m(k)+1}^{(k)} = \theta\}$, $\max_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \rightarrow 0$, $x_0^{(k)} \rightarrow x_0$,

при $k \rightarrow \infty$; $v_k(\cdot) : [t_0, \theta] \rightarrow Q$ — измеримые функции. Аппроксимационное движение $x(\cdot, t_0, x_*, U, v(\cdot), \Gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), U(\tau_i, x(\tau_i)), v(t)), \\ \tau_i &\leq t < \tau_{i+1}, \quad i=0, 1, \dots, m, \quad x(t_0) = x_*. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично определяется пучок движений $x(t_0, x_0, V)$.

Для дифференциальной игры (1) — (3) в рамках указанной форма-

лизации показано, что для каждой начальной позиции $(t_0, x_0) \in (-\infty, \theta] \times R^n$ существует пара оптимальных позиционных стратегий $U^0 = U^0(t_0, x_0)$, $V^0 = V^0(t_0, x_0)$, доставляющая ситуацию равновесия, т. е. пара стратегий U^0, V^0 обеспечивает выполнение равенства

$$\max_{x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^0)} \sigma(x(\theta)) = c^0(t_0, x_0) = \min_{x(\cdot) \in X(t_0, x_0, V^0)} \sigma(x(\theta)), \quad (5)$$

где число $c^0(t_0, x_0)$ есть значение цены игры в позиции (t_0, x_0) .

Подчеркнем, что здесь утверждается существование для каждой начальной позиции $(t_0, x_0) \in (-\infty, \theta] \times R^n$, вообще говоря, своей оптимальной позиционной стратегии $U^0(t_0, x_0) : (-\infty, \theta] \times R^n \rightarrow P$.

Пусть G — некоторое множество в $(-\infty, \theta] \times R^n$. Введем определение стратегии, оптимальной для всех позиций из G .

Определение 1. Функцию $U^0 : (-\infty, \theta] \times R^n \rightarrow P$ назовем универсальной оптимальной в G стратегией первого игрока, если для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ и соответствующего пучка движений $X(t_0, x_0, U^0)$ выполняется (5).

Известны примеры дифференциальных игр (1), (2), для которых можно построить универсальную в $(-\infty, \theta] \times R^n$ оптимальную стратегию $U^0(t, x)$ первого игрока. Например, в тех случаях, когда функция цены игры $(t, x) \rightarrow c^0(t, x)$ является непрерывно-дифференцируемой всюду, позиционная стратегия $U^0(t, x)$, удовлетворяющая условию: $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} r(t, x) \text{тф}(t, x, u, v) = \max_{v \in Q} r(t, x) \text{тф}(t, x, U^0(t, x), v)$, где $r(t, x) = \text{grad}_x c^0(t, x) = (\partial c^0(t, x) / \partial x_1, \dots, \partial c^0(t, x) / \partial x_n)$, является универсальной оптимальной в $(-\infty, \theta] \times R^n$ стратегией первого игрока.

Оставался невыясненным вопрос: во всякой ли дифференциальной игре можно построить универсальную оптимальную в заданном множестве G позиционную стратегию первого игрока? Пример, приведенный ниже, дает отрицательный ответ на этот вопрос. Построение такого контрпримера базируется на следующем простом свойстве универсальной стратегии.

Утверждение 1. Пусть G и D — некоторые открытые области из $(-\infty, \theta] \times R^n$, $G \supset D$, и пусть в дифференциальной игре (1)–(3) существует универсальная оптимальная в G позиционная стратегия $U^0(t, x)$. Пусть функция цены игры $(t, x) \mapsto c^0(t, x)$ непрерывно-дифференцируема в D . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует всюду плотное в D множество E_ε , в точках которого выполняется соотношение

$$\max_{v \in Q} r(t, x) \text{тф}(t, x, U^0(t, x), v) - \min_{u \in P} \max_{v \in Q} r(t, x) \text{тф}(t, x, u, v) \leq \varepsilon, \quad (6)$$

где $r(t, x) = \text{grad}_x c^0(t, x)$.

Доказательство проводится от противного. Предположим, что существуют точка $(t_*, x_*) \in D$, замкнутый евклидов шар $O_\eta(t_*, x_*)$ радиуса $\eta > 0$ с центром в точке (t_*, x_*) и число $\varepsilon_* > 0$ такие, что во всех точках $(t, x) \in O_\eta(t_*, x_*)$ имеет место

$$\max_{v \in Q} r(t, x) \text{тф}(t, x, U^0(t, x), v) > \min_{u \in P} \max_{v \in Q} r(t, x) \text{тф}(t, x, u, v) + \varepsilon_*, \quad (7)$$

т. е. $O_\eta(t_*, x_*) \cap E_{\varepsilon_*} = \emptyset$. Из условия $O_\eta(t_*, x_*) \subset D$ следует, что во всех точках $(t, x) \in O_\eta(t_*, x_*)$ выполняется уравнение Беллмана

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left[\frac{\partial c^0(t, x)}{\partial t} + \text{grad}_x c^0(t, x) \text{тф}(t, x, u, v) \right] = 0. \quad (8)$$

Из (7) и (8) выводим, что во всех точках $(t, x) \in O_\eta(t_*, x_*)$ справедливо

$$\max_{v \in Q} \left[\frac{\partial c^0(t, x)}{\partial t} + r(t, x) \text{тф}(t, x, U^0(t, x), v) \right] \geq \varepsilon_*. \quad (9)$$

Свойство (9) и гладкость функции $c^0(t, x)$ в $D \supset O_\eta(t_*, x_*)$ позволяют построить движение $x_*(\cdot) \in X(t_*, x_*, U^0)$ и указать момент $t^* \in (t_*, t_* + \eta)$ такие, что $(t, x_*(t)) \in O_\eta(t_*, x_*)$ при всех $t \in [t_*, t^*]$ и справедлива оценка

$$c^0(t^*, x_*(t^*)) > c^0(t_*, x_*). \quad (10)$$

Далее, используя оптимальность стратегии $U^0(t, x)$ для начальной позиции $(t^*, x^* = x_*(t^*)) \in O_\eta(t_*, x_*) \subset G$, можно показать, что в пучке $X(t_*, x_*, U^0)$ существует такое движение $x_{**}(t) : x_{**}(t) = x_*(t)$ при $t_* \leq t \leq t^*$, $x_{**}(\cdot) \in X(t^*, x^*, U^0)$, для которого имеют место соотношения $\sigma(x_{**}(\theta)) = c^0(t^*, x_*(t^*)) > c^0(t_*, x_*)$, что противоречит оптимальности (5) стратегии $U^0(t, x)$ в точке $(t_*, x_*) \in G$. Тем самым утверждение 1 доказано.

2. Пример. Рассмотрим дифференциальную игру с «простыми движениями»

$$\dot{x}_1 = u_1 + v_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 + v_2, \quad u = (u_1, u_2)^T \in P, \quad v = (v_1, v_2)^T \in Q, \quad (11)$$

где

$$P = Q = \{y = (y_1, y_2)^T \in R^2 : (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \leq 1\}, \quad (12)$$

а плата $\gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta))$ имеет вид

$$\sigma(x) = x_2 + |x_1|. \quad (13)$$

Очевидно, данная игра является игрой типа (1)–(3), и здесь можно установить следующее соотношение для цены игры $c^0(t, x)$:

$$c^0(t, x) = \sigma(x), \quad (t, x) \in (-\infty, \theta] \times R^2. \quad (14)$$

Определим открытую ограниченную область

$$G = \{(t, x) : t_{00} < t < \theta, \quad \|x\| < 1 + 2(t - t_{00})\}, \quad (15)$$

где t_{00} — некоторое число из промежутка $(-\infty, \theta)$.

Утверждение 2. В дифференциальной игре (11)–(13) не существует универсальной оптимальной в G позиционной стратегии первого игрока $U^0(t, x)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует универсальная оптимальная в G стратегия $U^0(t, x)$. В открытой области

$$D = G \setminus \{(t, x_1, x_2) \in (t_{00}, \theta) \times R^2 : x_1 = 0\} \quad (16)$$

функция $c^0(t, x) = x_2 + |x_1|$ непрерывно дифференцируема. Согласно утверждению 1, для любого $\varepsilon > 0$ существует всюду плотное в D множество E_ε , в точках которого будет выполнено соотношение

$$U^0(t, x) = -\text{grad}_x \sigma(x) \|\text{grad}_x \sigma(x)\|^{-1} + h(t, x), \\ \|h(t, x)\| \leq \xi(\varepsilon) \quad \xi(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\frac{\text{grad}_x \sigma(x)}{\|\text{grad}_x \sigma(x)\|} = \begin{cases} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T & \text{при } x_1 > 0, \\ (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T & \text{при } x_1 < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что множество E_ε всюду плотно и в G .

Покажем, что для любой начальной позиции $(t^0, x^0) \in G$, удовлетворяющей неравенству

$$|x_1^0| < (1 - \sqrt{2}/2)(\theta - t^0), \quad (19)$$

можно построить разбиение

$$\Gamma = \{t_0 = t^0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = \theta\}, \quad \Delta/2 \leq \tau_{i+1} - \tau_i \leq \Delta, \quad i \in \overline{0, N}, \quad (20)$$

и кусочно-постоянное управление

$$v(t) = v(\tau_i) \in Q, \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i \in \overline{0, N}, \quad (21)$$

такие, что для аппроксимационного движения $x(\cdot, t^0, x^0, U^0, v(\cdot), \Gamma)$ будет выполнено соотношение

$$\sigma(x(\vartheta)) \geq x_2^0 + (\vartheta - t^0)(1 - \sqrt{2}/2) - \alpha(\Delta), \quad (22)$$

где $\alpha(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. Из (22) следует, что можно построить последовательность аппроксимационных движений $x_k(\cdot)$ ($k=1, 2, \dots$), отвечающую последовательности чисел $\Delta_k \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$ так, чтобы, согласно (22), для предельного движения $x^*(\cdot)$ было выполнено неравенство

$$\sigma(x^*(\vartheta)) \geq x_2^0 + (\vartheta - t^0)(1 - \sqrt{2}/2). \quad (23)$$

Поскольку в рассматриваемом примере $c^0(t^0, x^0) = x_2^0 + |x_1^0|$, то из (19) и (23) будет следовать неравенство

$$\sigma(x^*(\vartheta)) > c^0(t^0, x^0), \quad (24)$$

которое противоречит, однако, оптимальности (5) стратегии U^0 в позиции (t^0, x^0) . Таким образом, чтобы доказать утверждение 2, достаточно построить разбиение Γ и управление $v(\cdot)$, для которых соответствующее аппроксимационное движение удовлетворяет оценке (22).

Докажем сначала следующее положение, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\Delta \in (0, 1)$, $(t_*, x_*) \in G$, $t_* \leq \vartheta - \Delta$, $\|u_*\| \leq 1$, $v_\Delta = (0, 1 - \Delta)^T$. Полагаем

$$x(t, v^*) = x_* + (t - t_*)(u_* + v_\Delta + v^*),$$

$$S(t_*, x_*, u_*, \Delta) = \{(t, x(t, v^*)) : t_* + \Delta/2 \leq t \leq t_* + \Delta, \|v^*\| \leq \Delta\}. \quad (25)$$

Отметим, что $\|v_\Delta + v^*\| \leq 1$ при $\|v^*\| \leq \Delta$. Поскольку $(t_*, x_*) \in G$, то из (15) следует вложение $S(t_*, x_*, u_*, \Delta) \subset G$. Множество $S(t_*, x_*, u_*, \Delta)$ содержит внутренние точки, а множество E_ε всюду плотно в G , следовательно,

$$S(t_*, x_*, u_*, \Delta) \cap E_\varepsilon \neq \emptyset \quad (26)$$

при любом $\varepsilon > 0$, в частности, при $\varepsilon = \Delta$.

Итак, для любых $\Delta \in (0, 1)$, $(t_*, x_*) \in G$, $t_* \leq \vartheta - \Delta$, $u_* \in P$ существуют постоянное управление $v = v_\Delta + v^* \in Q$ и момент $t^* \in [t_* + \Delta/2, t_* + \Delta]$ такие, что движение системы $\dot{x}(t) = u_* + v_\Delta + v^*$ ($x(t_*) = x_*$) будет удовлетворять условию $(t^*, x(t^*)) \in E_\Delta$.

Обратимся к построению разбиения Γ и управления $v(\cdot)$, для которых будет справедлива оценка (22). Пусть заданы точка $(t^0, x^0) \in G$ и число $\Delta \in (0, 1)$. Воспользуемся приведенным выше положением. Выберем момент времени $\tau_1 \in [t^0 + \Delta/2, t^0 + \Delta]$ и вектор $v(\tau_0) = v_\Delta + v^*(\tau_0)$ ($\|v(\tau_0)\| \leq \Delta$) так, чтобы система $\dot{x}(t) = U^0(t^0, x^0) + v(\tau_0)$ ($x(t^0) = x^0$) пришла в позицию $(\tau_1, x(\tau_1)) \in E_\Delta$.

Пусть определены моменты времени τ_1, \dots, τ_i и управление $v(t) = v(\tau_j)$, $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$ ($j \in \overline{1, i-1}$). Предположим, что $\tau_i \leq \vartheta - \Delta$. Пусть $x(\tau_i)$ — состояние системы

$$\dot{x}(t) = U^0(\tau_j, x(\tau_j)) + v(\tau_j), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j \in \overline{1, i-1}, \quad x(\tau_0) = x^0. \quad (27)$$

Отметим, что из включения $(t^0, x^0) \in G$ следует $(\tau_i, x(\tau_i)) \in G$ (см. (15)).

Выберем момент $\tau_{i+1} \in [\tau_i + \Delta/2, \tau_i + \Delta]$ и управление $v(\tau_i) = v_\Delta + v^*(\tau_i)$ ($\|v^*(\tau_i)\| \leq \Delta$) так, чтобы система (27) при $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ перешла из позиции $(\tau_i, x(\tau_i))$ в позицию $(\tau_{i+1}, x(\tau_{i+1})) \in E_\Delta$. Это опять возможно в силу сформулированного выше положения.

Указанное построение проводится вплоть до момента $\tau_i = \tau_N$, когда впервые $\tau_i \geq \vartheta - \Delta$. На последнем промежутке $[\tau_N, \vartheta]$ полагаем $\tau_{N+1} = \vartheta$, $v(\tau_N) = v_\Delta$.

Рассмотрим свойства построенного движения $x(\cdot)$. Отметим сначала, что

$$(\tau_i, x(\tau_i)) \in E_\Delta \text{ при } i \in \overline{1, N}. \quad (28)$$

Пусть $i \in \overline{1, N}$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Тогда из предыдущих построений и соотношений (17), (18) следует

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(\tau_i) + (t - \tau_i) (U_1^0(\tau_i, x(\tau_i)) + v_1(\tau_i)) \leq \\ &\leq x_1(\tau_i) + (t - \tau_i) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \xi(\Delta) + \Delta \right) \text{ при } x_1(\tau_i) > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$x_1(t) \geq x_1(\tau_i) + (t - \tau_i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \xi(\Delta) - \Delta \right) \text{ при } x_1(\tau_i) < 0,$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2(\tau_i) + (t - \tau_i) (U_2^0(\tau_i, x(\tau_i)) + v_2(\tau_i)) \geq \\ &\geq x_2(\tau_i) + (t - \tau_i) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \xi(\Delta) + 1 - \Delta + v_2^*(\tau_i) \right) \geq \\ &\geq x_2(\tau_i) + (t - \tau_i) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\Delta - \xi(\Delta) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Полагаем, что

$$\xi(\Delta) + \Delta < \sqrt{2} - 1 < 1. \quad (31)$$

Предположим сначала, что $x_1(t) \neq 0$ при всех $t \in [\tau_1, \theta]$. Тогда из (19), (29), (31) следует $|x_1(\theta)| \leq |x_1(\tau_1)| - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\theta - \tau_1) \leq |x_1^0| + 2\Delta - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\theta - \tau_1) < (3 - \sqrt{2}/2)\Delta = \alpha_1(\Delta)$. Если же $x_1(t^*) = 0$ при некотором $t^* \in [\tau_1, \theta]$, то из (29), (31) следует $|x_1(t)| \leq \leq 2\Delta$ при всех $t \in [t^*, \theta]$. Итак,

$$|x_1(\theta)| \leq \alpha_1(\Delta) = (3 - \sqrt{2}/2)\Delta. \quad (32)$$

Оценим теперь величину $x_2(\theta)$. Заметим, что $x_2(\tau_1) \geq x_2^0 - 2\Delta$. Суммируя оценку (30), получаем

$$\begin{aligned} x_2(\theta) &\geq x_2(\tau_1) + (\theta - \tau_1) (1 - \sqrt{2}/2) - (\theta - \tau_1) (\xi(\Delta) + 2\Delta) \geq \\ &\geq x_2^0 + (\theta - t^0) (1 - \sqrt{2}/2) - \alpha_2(\Delta), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\alpha_2(\Delta) = (1 - \sqrt{2}/2)\Delta + 2(\theta - t^0) (\xi(\Delta) + \Delta). \quad (34)$$

Из (13), (32), (33) следует

$$\sigma(x(\theta)) \geq x_2^0 + (\theta - t^0) (1 - \sqrt{2}/2) - \alpha_1(\Delta) - \alpha_2(\Delta). \quad (35)$$

Итак, приходим к требуемой оценке (22), где, стало быть, $\alpha(\Delta) = \alpha_1(\Delta) + \alpha_2(\Delta) = (4 - \sqrt{2})\Delta + 2(\theta - t^0) (\xi(\Delta) + \Delta)$. Утверждение 2 доказано.

При обсуждении данной работы Н. Н. Красовский предложил другой пример дифференциальной игры: $\dot{x}_1 = u_1 + v_1$, $\dot{x}_2 = u_2 + x_1 v_2$, $\sigma(x) = -x_2$, $|v_1| \leq 1$, $|v_2| \leq 1$, $|u_1| \leq 1 - u_2$, $-1 \leq u_2 \leq 0$.

Здесь в отличие от приведенного выше примера плата является гладкой. Но функция цены игры так же, как и в предыдущем случае, оказывается кусочно-гладкой:

$$c^0(t, x) = \begin{cases} -x_2 + |x_1|(\vartheta - t) & \text{при } \vartheta - 1 \leq t \leq \vartheta, \\ -x_2 + |x_1| + \frac{x_1^2}{2} & \text{при } t \leq \vartheta - 1, |x_1| \leq \vartheta - 1 - t, \\ -x_2 + |x_1|(\vartheta - t) - \frac{(\vartheta - 1 - t)^2}{2} & \text{при } t \leq \vartheta - 1, |x_1| \geq \vartheta - 1 - t. \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными упомянутым выше, можно показать, что для некоторых ограниченных областей G отсутствует универсальная позиционная стратегия $U^0(t, x)$, оптимальная в G .

3. Приведенные примеры показывают, что надежда построить в дифференциальной игре универсальную оптимальную в заданном множестве G позиционную стратегию $U^0(t, x)$, оставаясь при этом в рамках системы определений дифференциальной игры из [1], не всегда оправдана. Решение вопроса о существовании универсальной оптимальной позиционной стратегии следует искать, модифицируя формализацию из [1].

Такая модификация содержится, например, в работе [2]. Здесь позиционной стратегией первого игрока называется функция $U = U(t, x; \varepsilon)$; которая позиции (t, x) и параметру $\varepsilon > 0$ ставит в соответствие точку $U(t, x, \varepsilon) \in P$, а движение $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, U)$ системы (1), порождаемое этой стратегией, определяется как двойной предел $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow +0} \lim_{\Delta_k \rightarrow +0} x_{\Delta_k}^{\varepsilon_k}(\cdot) = x(\cdot)$ аппроксимационных движений $x_{\Delta_k}^{\varepsilon_k}(\cdot)$, отвечающих разбиениям $\Gamma = \{t_0 = \tau_0^k < \tau_1^k < \dots \leq \vartheta\}$ с дискретом $\tau_{i+1}^k - \tau_i^k \leq \Delta_k$ ($i = 1, 2, \dots$) и описываемых уравнением $x_{\Delta_k}^{\varepsilon_k}(t) = f(t, x_{\Delta_k}^{\varepsilon_k}(t), U(\tau_i^k, x_{\Delta_k}^{\varepsilon_k}(\tau_i^k), \varepsilon_k), v_k(t))$, $\tau_i^k \leq t < \tau_{i+1}^k$, $v_k(\cdot) : [t_0, \vartheta] \rightarrow Q$ — измеримая функция, $x_{\Delta_k}^{\varepsilon_k}(t_0) \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. В работе [2] показано, что при таком определении позиционных стратегий и движений в дифференциальной игре (1) — (3) существует универсальная стратегия $U^0(t, x, \varepsilon)$, оптимальная для всех точек заданной ограниченной области $G \subset [t_{00}, \vartheta] \times R^n$.

Эта стратегия может быть определена, например, следующим образом.

Для позиции (t, x) вычислим величину $\varepsilon(t) = \varepsilon \exp(2\lambda(t - \vartheta))$, где λ — константа Липшица по x для функции $f(t, x, u, v)$ в области $G \times P \times Q$. Затем построим в пространстве R^n евклидов шар $O_{\varepsilon(t)}(x)$ с центром в точке x радиуса $\varepsilon(t)$ и найдем точку ω_* : $c^0(t, \omega_*) = \min_{w \in O_{\varepsilon(t)}(x)} c^0(t, w)$. Значение $U^0(t, x, \varepsilon)$ определим из условия

$$\max_{v \in Q} s^T f(t, x, U^0(t, x, \varepsilon), v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s^T f(t, x, u, v), \text{ где } s = x - \omega_*.$$

Еще одну возможную модификацию определений позиционной дифференциальной игры подсказывает построение приведенного выше примера.

Определение 2. Позиционной стратегией первого игрока будем называть пару: функцию $(t, x) \mapsto U(t, x) \in P$ и отображение $\Delta \mapsto \Gamma(\Delta)$ ($\Delta \in (0, \Delta^*) \subset R$). Отображение $\Delta \mapsto \Gamma(\Delta)$ ставит в соответствие положительному числу Δ некоторое разбиение $\Gamma(\Delta) = \{t_0 = t_{00} < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = \vartheta\}$ с дискретом $\tau_{i+1} - \tau_i \leq \Delta$ ($i \in \overline{0, N}$).

Движение $x(\cdot)$, порождаемое позиционной стратегией, есть равномерный на $[t_0, \vartheta]$ предел аппроксимационных движений $x_{\Delta_k}(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^{(k)}, U, v_k(\cdot), \Gamma(\Delta_k))$ (см. (4)), отвечающих, согласно определению этой стратегии, функции $U = U(t, x)$ и разбиениям $\Gamma(\Delta_k)$ (при $\Delta_k \rightarrow 0$). (Здесь $v_k(\cdot) : [t_{00}, \vartheta] \times R^n \mapsto Q$ — измеримые функции, $k = 1, 2, \dots$)

Используя определение 2, мы сужаем пучок движений, порождаемых функцией $U(t, x)$, по сравнению с пучком движений, построенных

согласно формализации из [1]. Это обстоятельство позволяет доказать следующий результат.

Утверждение 3. Для любой ограниченной области $G \subset [t_0, \vartheta] \times \times R^n$ в дифференциальной игре (1)–(3) существует универсальная, оптимальная в G позиционная стратегия $(t, x) \mapsto U^0(t, x)$, $\Delta \mapsto \Gamma^0(\Delta)$.

Действительно, как показано в [2, 3], для любой ограниченной области G , задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, можно построить позиционную стратегию $U^0(t, x, \varepsilon)$, которая для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ гарантирует первому игроку результат, не больший, чем $c^0(t_0, x_0) + \varepsilon$. При этом пучки движений определяются согласно [1]. Это означает, что в аппроксимационной схеме числу $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой позиции $(t_0, x_0) \in G$ и для любого аппроксимационного движения $x_\Delta(\cdot)$ с дискретом не больше Δ справедливо

$$\sigma(x(\vartheta)) \leq c^0(t_0, x_0) + 2\varepsilon. \quad (36)$$

Зададимся последовательностью $\{\varepsilon_k\} \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$. Ей соответствует последовательность $\{\Delta_k = \Delta(\varepsilon_k)\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Построим отображение $\Delta \mapsto \Gamma^0(\Delta)$ следующим образом. Числу Δ поставим в соответствие $\Gamma^0(\Delta) = \Gamma^0(\Delta_k) = \{\tau_0^k = t_0 < \tau_1^k < \dots < \tau_{N^k+1}^k = \vartheta\}$ при $\Delta_k \leq \Delta < \Delta_{k-1}$.

Позаботимся, чтобы выполнялось условие

$$\tau_i^k \notin \Gamma^0(\Delta_j), \quad i \in \overline{1, N^k} \quad \text{при всех } j \neq k. \quad (37)$$

Определим теперь функцию $U^0(t, x)$ следующим образом:

$$U^0(\tau_i^k, x) = U^0(\tau_i^k, x, \varepsilon_k), \quad \text{если } \tau_i^k \in \Gamma^0(\Delta_k), \quad i \in \overline{1, N^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

а в остальных точках (t, x) определяем $U^0(t, x)$ произвольным образом, $U^0 = U^0(t, x) \in P$.

Согласно построению, для аппроксимационных движений $x_\Delta(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^k, U^0, v_k(\cdot), \Gamma^0(\Delta))$ справедлива оценка (36). Отсюда вытекает, что для предельных движений построенная позиционная стратегия $(t, x) \mapsto U^0(t, x)$, $\Delta \mapsto \Gamma^0(\Delta)$ гарантирует оптимальный результат $c^0(t_0, x_0)$ из любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$, т. е. стратегия $(t, x) \mapsto U^0(t, x)$, $\Delta \mapsto \Gamma^0(\Delta)$ является универсальной.

Как видно из доказательства утверждения 3, оно останется справедливым, если изменить определение 2 позиционной стратегии следующим образом: в паре с функцией $(t, x) \mapsto U(t, x)$ вместо отображения $\Delta \mapsto \Gamma(\Delta)$, $\Delta \in (0, \Delta^*) \subset R$, рассматривать некоторую последовательность разбиений $\Gamma(\Delta_k) = \{\tau_0^k = t_0 < \tau_1^k < \dots < \tau_{N^k+1}^k = \vartheta\}$ с дискретом $\tau_{i+1}^k - \tau_i^k \leq \Delta_k$, $i \in \overline{0, N^k}$, $k = 1, 2, \dots$, $\{\Delta_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

Литература

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н.— Мат. сб., 1978, т. 107 (149), № 4, (12), с. 541—571.
3. Кононенко А. Ф. Математические методы анализа динамических систем с иерархической системой управления.— Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— М., 1979.

Институт математики и механики УНЦ
АН СССР

Поступила в редакцию
6 января 1981 г.