2000, Т. 36, № 5, С. 618 — 623

УДК 517.928

О СВОЙСТВЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

О. П. Филатов

1. Постановка задачи. Пусть локально интегрируемая (по Лебегу) ограниченная функция $f: R^m \to R$ является периодической по каждой координате (в некоторой системе координат, определяемой базисом $e_1, e_2, \ldots, e_m$) с периодом $T > 0$ в евклидовом пространстве R^m со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|$. Множество всех таких функций обозначим через $P(R^m)$. Рассмотрим предел

$$M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int\limits_0^{\Delta} f(\gamma(t))\, dt, \tag{1}$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям в смысле Каратеодори дифференциального включения

$$\dot\gamma \in G, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \tag{2}$$

определенным на полуоси $t \geq 0$. Здесь G — компактное множество из R^m. Поскольку композиция $f \circ \gamma$, где γ — решение задачи (2), не обязана быть измеримой по Лебегу, то далее будем рассматривать только такое подмножество $P_G(R^m)$ из множества периодических функций $P(R^m)$, для которого указанная композиция является измеримой для любого решения задачи (2) с произвольным начальным вектором $\gamma_0 \in R^m$. Например, любая борелевская периодическая функция $f:\ R^m \to R$ принадлежит классу $P_G(R^m)$. Решение $\gamma_{\rm op}$ дифференциального включения (2), вдоль которого реализуется предел максимального среднего (1), будем называть оптимальным, а производную от этого решения $\dot\gamma_{\rm op}(t) = d\gamma_{\rm op}(t)/dt$ — оптимальным управлением.

В работах [1 — 3] показано, что в одномерном случае ($m = 1$), когда компакт $G \neq \{0\}$ является отрезком, оптимальное управление $\dot\gamma_{\rm op}$ оказывается периодической функцией времени $t \geq 0$ с периодом Δ_0, при этом

$$\gamma_{\rm op}(t + \Delta_0) \equiv \gamma_{\rm op}(t) + T, \quad M_f = \frac{1}{\Delta_0} \int\limits_0^{\Delta_0} f(\gamma_{\rm op}(t))\, dt. \tag{3}$$

Отсюда следует, что в одномерном случае композиция $f \circ \gamma_{\rm op}$ будет периодической функцией времени с тем же периодом Δ_0. Так как пределы вида (1) появляются при построении усредненных дифференциальных включений [1, 4, 5], то с точки зрения приложений особый интерес представляет ситуация, когда предел максимального среднего не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$. Это накладывает определенные требования на компакт $G \subset R^m$. С учетом сказанного поставим следующую задачу. Указать свойства компакта $G \subset R^m$, которые гарантируют, что предел (1) существует и не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$ в классе периодических функций $P_G(R^m)$, и исследовать вопрос в многомерном случае ($m \geq 2$) о существовании оптимального решения $\gamma_{\rm op} = \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_{j,{\rm op}} e_j$ дифференциального включения (2), для которого любая координатная управляющая функция $\dot\gamma_{j,{\rm op}}$ будет T_j-периодической по времени $t \geq 0$ с некоторым периодом $T_j > 0$, $j = \overline{1,m}$.

Далее будет показано, что требования на компакт G можно сформулировать в геометрически наглядной форме: компакт $G \subset R^m$ должен быть невырожденным. Последнее означает, что компакт $G \subset R^m$ не должен содержаться в гиперплоскости, проходящей через нулевой вектор пространства R^m.

Невырожденность компакта гарантирует равномерную независимость предела максимального среднего от начального вектора задачи (2) — обстоятельство, весьма существенное в теоремах усреднения дифференциальных включений [1].

Если отбросить условие невырожденности компакта, то предел максимального среднего, как можно показать, по-прежнему существует, но в общем случае зависит от начальных данных. Например, если при $m = 2$ дифференциальное включение $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = \gamma_0 = (\gamma_{1,0}, \gamma_{2,0})$, определяется отрезком части диагонали первого квадранта фазовой плоскости $G = \{\xi \in R^2 : \xi = te,\ 1 \le t \le 2\}$, где вектор $e \in R^2$ — направляющий вектор диагонали, то для функции $f(\gamma_1, \gamma_2) = \sin(\gamma_1 - \gamma_2)$ предел максимального среднего $M_f = \sin(\gamma_{1,0} - \gamma_{2,0})$ и определяется начальным вектором γ_0.

Что касается существования оптимальных периодических управлений, то приводится пример (см. ниже п. 2), из которого следует, что даже для невырожденного компакта $G \subset R^m$, вообще говоря, ответ будет отрицательным.

Тем не менее оказывается, что всегда существуют периодические управляющие функции такие, что соответствующее среднее по периоду меньше значения M_f не более чем на заданное $\varepsilon > 0$.

2. Основные результаты и примеры. В приведенной ниже теореме $T_f = T\sum\limits_{j=1}^{m} n_j e_j$ — векторный период функции f, определяемый целыми $n_1, n_2, \ldots, n_m$; константа $t_{\max} > 0$ вводится в лемме из п. 3 (см. ниже), постоянная $f_0 = \sup\limits_{\gamma \in R^m} |f(\gamma)|$, $\beta(\varepsilon) = \max\{8 f_0 t_{\max}/\varepsilon, t_{\max}\}$.

Теорема. *Пусть компакт $G \subset R^m$ является невырожденным, а периодическая функция $f \in P_G(R^m)$. Тогда предел M_f максимального среднего (1) существует и равномерно не зависит от начального вектора $\gamma_0 \in R^m$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется решение γ_ε дифференциального включения (2) с $\Delta_0(\varepsilon, \gamma_0)$-периодическим по времени $t \ge 0$ векторным управлением $\dot\gamma_\varepsilon$ такое, что*

$$\gamma_\varepsilon(t + \Delta_0) \equiv \gamma_\varepsilon(t) + T_f \tag{4}$$

и при $t_0 \ge 0$

$$M_f - \frac{1}{\Delta_0} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta_0} f(\gamma_\varepsilon(t))\,dt < \varepsilon. \tag{5}$$

Композиция $f \circ \gamma_\varepsilon$ оказывается периодической функцией с периодом $\Delta_0(\varepsilon, \gamma_0)$, для которого имеют место оценки $\beta(\varepsilon) \le \Delta_0(\varepsilon, \gamma_0) \le \beta(\varepsilon) + t_{\max}$. Период Δ_0 можно выбрать общим для всех начальных векторов $\gamma_0 \in R^m$, если свойство периодичности управления рассматривать только при $t \ge t_{\max}$, при этом в (4) и (5) соответственно $t, t_0 \ge t_{\max}$. Постоянная $t_{\max}$ зависит только от компакта G.

Доказательство приведем в п. 3.

Решение дифференциального включения γ_ε (так же как и соответствующее управление) из теоремы 1 далее будем называть квазиоптимальным (для заданной точности $\varepsilon > 0$).

Если отбросить требование невырожденности компакта G, то предел максимального среднего может, во-первых, зависеть от начального вектора (см. выше пример), а во-вторых, заключение теоремы, выражаемое соотношениями (4), (5), может и не выполняться. В качестве примера ($m = 2$) можно взять дифференциальное включение $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = \gamma_0 = (\gamma_{1,0}, \gamma_{2,0})$, где множество $G \subset R^2$ содержит единственный вектор $(1, \sqrt{2})$. В качестве функции $f(\gamma_1, \gamma_2)$ возьмем $\sin\gamma_1 + \cos\gamma_2$. Тогда предел максимального среднего просто совпадает со средним значением функции и равен 0. В то же время равенство (4) не выполняется ни при каком числе Δ_0.

Для невырожденного компакта можно привести примеры, когда существуют периодические оптимальные управления, но композиция $f \circ \gamma_{\mathrm{op}}$ не будет периодической функцией времени, как в одномерном случае. Например, рассмотрим дифференциальное включение $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = \gamma_0$, где множество $G = [1, a_1] \times [1, a_2]$ — прямоугольник на плоскости, определяемый параметрами $a_1 > 1$ и $a_2 > 1$, и $f(\gamma_1, \gamma_2) = \sin\gamma_1 + \sin\gamma_2$. Тогда в силу независимости управлений предел максимального среднего равен $M_f(a_1, a_2) = M_{\sin}(a_1) + M_{\sin}(a_2)$. Согласно (3), композиция $f \circ \gamma_{\text{op}}$ является суммой двух периодических функций времени, поэтому если периоды независимых управлений несоизмеримы, то $f \circ \gamma_{\text{op}}$ не будет периодической. Несоизмеримость периодов достигается за счет выбора параметров a_1, a_2.

Приведем теперь пример (сначала для случая $m = 2$), из которого следует, что оптимальных периодических по времени управляющих функций может не существовать для невырожденного компакта, в качестве которого возьмем отрезок $G = \{(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) :\ \dot\gamma_1 = 1,\ 1 \le \dot\gamma_2 \le \sqrt{2}\}$ из координатной плоскости R^2. Функцию $f :\ R^2 \to R$ определим следующим образом. Допустим, что луч $l = \{\gamma \in R^2 :\ \gamma = te,\ t \ge 0\}$, где направляющий вектор $e = (1, \sqrt{2})$, пересекается с открытым квадратом $K_{i,j} = \{(\gamma_1, \gamma_2) :\ i < \gamma_1 < i + 1,\ j < \gamma_2 < j + 1\}$ по интервалу $l^*_{i,j}$. Если последний сдвинуть на вектор $(-i, -j)$, то он преобразуется в интервал $l_{i,j}$ (положительной длины) из стандартного квадрата $K = K_{0,0}$.

Перенумеруем натуральными числами все интервалы в естественном порядке пересечения луча l с квадратами $K_{i,j}$. Например, интервал $l_{0,0}$ получит номер 1, интервал $l_{0,1}$ — номер 2. На каждом интервале $l_{i,j}$ с нечетным номером значение функции f примем равным 1, а во всех остальных точках квадрата K, так же как и на его границе, функцию f положим равной 0. Затем продолжим ее периодически с периодом 1 по каждой координате на всю плоскость R^2.

Поскольку функция f оказывается борелевской, то композиция $f \circ \gamma$ для любого решения γ дифференциального включения (2) также будет борелевской, а значит, измеримой по Лебегу. Следовательно, $f \in P_G(R^m)$. Так как объединение всех интервалов $l_{i,j}$ с нечетными номерами образует множество, всюду плотное в квадрате K, а функция f на этих интервалах равна 1, то предел максимального среднего, как нетрудно убедиться, равен 1 для любого начального вектора $\gamma_0 \in R^2$.

Допустим теперь, что существует решение $\gamma_{\text{op}} = (\gamma_{1,\text{op}}, \gamma_{2,\text{op}})$ задачи (2), для которого управляющая функция $\dot\gamma_{\text{op}}$ будет периодической с некоторым периодом Δ_0 и

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma_{\text{op}}(t))\, dt = 1. \tag{6}$$

Покажем, что $f(\gamma_{\text{op}}(t)) = 0$ почти всюду в точках множества $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$, где $A_j = A_0 + j\Delta_0$, $A_0 = \{0 \le t \le \Delta_0 :\ \dot\gamma_{2,\text{op}}(t) \ne \sqrt{2}\}$.

Для этого в свою очередь достаточно убедиться, что с каждым интервалом, на котором функция $f = 1$, фазовая кривая решения пересекается в моменты времени t, составляющие множество $B \subset A$ меры 0. Действительно, если мера Лебега $\lambda(B) > 0$, то, поскольку функция $\gamma(t)$ дифференцируема почти всюду по t, найдется точка сгущения $t_0 \in B$, в которой функция $\gamma(t)$ дифференцируема. Но тогда $\dot\gamma_{2,\text{op}}(t_0) = \sqrt{2}$, что противоречит определению множества A. Таким образом, $\lambda(B) = 0$.

Далее, из (6) следует, что $\lambda(A_0) > 0$, так как в противном случае почти всюду $\dot\gamma_{2,\text{op}}(t) = \sqrt{2}$, поэтому фазовая кривая решения является лучом, параллельным лучу l, с иррациональным тангенсом угла наклона к оси $0\gamma_1$, равным $\sqrt{2}$. Для таких решений левая часть (6) равна 0 или 1/2.

В результате для $\Delta = n\Delta_0$, $n = 1, 2, \ldots$, $C_j = [j\Delta_0, (j+1)\Delta_0] \setminus A_j$ имеем оценку

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma_{\text{op}}(t))\, dt = \frac{1}{n\Delta_0} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\int_{C_j} f(\gamma_{\text{op}}(t))\, dt + \int_{A_j} f(\gamma_{\text{op}}(t))\, dt \Big) \le$$

$$\le\ (1/(n\Delta_0))(n(\Delta_0 - \lambda(A_0)) \cdot 1 + n\lambda(A_0) \cdot 0) = 1 - \lambda(A_0)/\Delta_0 < 1,$$

что противоречит равенству (6).

Построенный пример выполняется и для произвольного $m > 2$. Достаточно считать, что функция f не зависит от координат $\gamma_3, \ldots, \gamma_m$, при этом соответствующие производные $\dot\gamma_3, \ldots, \dot\gamma_m$ независимо принимают значения, например, из отрезка $[0,1]$.

Таким образом, равенство (4) является многомерным аналогом тождества из (3), но в отличие от первого выполняется для некоторых квазиоптимальных решений дифференциального включения (2). Поэтому второе соотношение из (3) заменяется оценкой (5). Интересно, что свойство периодичности композиции $f \circ \gamma_\varepsilon$, которое следует из (4), также восстанавливается для квазиоптимальных решений.

Что касается зависимости периода Δ_0 от начального вектора γ_0, то, очевидно, она многозначная и единственное, что можно утверждать: для любых начальных векторов всегда существуют соответствующие периоды, которые отличаются не более чем на постоянную $t_{\max}$. Последняя зависит только от невырожденного компакта G. Тем не менее при $t \geq t_{\max}$ существует общий для всех начальных векторов период $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon)$, как это следует из второй части теоремы.

Свойство невырожденности компакта G, как показывают приведенные выше примеры, является существенным условием теоремы.

3. Доказательство теоремы. Нам понадобится следующая

Лемма. *Если компакт $G \subset R^m$ является невырожденным, то существует такая постоянная $t_{\max} > 0$, определяемая компактом, что для любых точек $a, b \in R^m$ найдется число $t_a \in [0, t_{\max}]$ и интегральная кривая дифференциального включения $\dot\gamma \in G$, соединяющая точку $(0, b)$ с точкой $(t_a, a + T_f) \in R^{m+1}$ для некоторого векторного периода T_f функции f.*

Доказательство леммы. Для задачи $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = b$ на основании свойств интегралов от многозначных отображений [6] множество достижимости в момент времени t равно $b + t \cdot \mathrm{co}(G)$. Поэтому объединение множеств достижимости для всех моментов времени $t \geq 0$ представляет собой конус K_b с вершиной в точке b:

$$K_b = \{\gamma \in R^m : \ \gamma = b + t \cdot \mathrm{co}(G), \ t \geq 0\}. \tag{7}$$

Поскольку компакт G невырожденный, то в случае, если размерность компакта $\dim(G) = m - 1$ (это размерность его аффинной оболочки), множество G содержится в некоторой гиперплоскости P, определяемой уравнением $\langle e, \xi\rangle = c$ относительно $\xi \in R^m$, где e — нормальный вектор гиперплоскости, постоянная $c \neq 0$. По теореме о непустоте относительной внутренности выпуклого множества [7, теорема 1.5, с. 202] получаем, что множество $\mathrm{co}(G)$ содержит пересечение гиперплоскости P с некоторым шаром пространства R^m радиуса $r_0 > 0$ с центром в некоторой точке гиперплоскости b_0, при этом угол между вектором b_0 и нормальным вектором гиперплоскости e отличен от прямого. В таком случае точка b_0 является внутренней для конуса K_b.

Если $\dim(G) = m$, то внутренность множества $\mathrm{co}(G)$ непустая, поэтому в качестве P можно взять гиперплоскость, проходящую через внутреннюю точку b_0 с нормальным вектором $e = b_0$.

Таким образом, в любом случае существует замкнутый (m-мерный) куб $C(b_0) \subset R^m$ с центром в точке b_0 и длиной ребра $r > 0$, грани которого параллельны координатным плоскостям для базиса $e_1, e_2, \ldots, e_m$, такой, что куб $b + C(b_0) \subset K_b$. Можно считать, что $b + C(b_0) \subset L(2)$, где открытое множеств $L(2) = \{\gamma \in K_b : \ \gamma = b + t(b_0 + h), \ 0 < t < 2, \ \|h\| < r_0, \ b_0 + h \in P\}$. Куб $b + \tau C(b_0)$ при любом $\tau > 0$ принадлежит конусу K_b, при этом $\tau C(b_0) \subset L(2\tau)$. Поэтому при $\tau = \tau_r = 2T/r$ длина его ребра равна $2T$ и он содержит хотя бы один m-мерный куб T-решетки пространства R^m, который обозначим C_a. Тогда существует векторный период T_f функции f, для которого имеет место включение $a + T_f \in C_a \subset K_b$. Следовательно, некоторая интегральная кривая задачи $\dot\gamma \in G$, $\gamma(0) = b$ пройдет через точку $(t_a, a + T_f)$ в момент времени $t_a \leq 2 \cdot 2T/r = 4T/r = t_{\max}$, где постоянная $t_{\max}$ определяется только компактом G и не зависит от выбора точек $a, b \in R^m$. Лемма доказана.

Установим теперь существование предела максимального среднего (1). Поскольку функция

f ограничена ($|f| \le f_0$), то критерий Коши существования предела функции

$$M(\Delta,\gamma_0) = \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma(t))\,dt$$

при $\Delta \to \infty$ будет следовать из выполнения следующего условия: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta_0 > 0$ такое, что для любых положительных целых n_1, n_2 выполняется неравенство

$$|M(n_1\Delta_0,\gamma_0) - M(n_2\Delta_0,\gamma_0)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Для постоянной $\beta = \beta(\varepsilon)$ возьмем такое решение $\gamma_\beta(t)$ задачи (2) на отрезке $0 \le t \le \beta$, чтобы

$$M(\beta,\gamma_0) - \frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} f(\gamma_\beta(t))\,dt \le \varepsilon/4. \tag{9}$$

Если в лемме принять $b = \gamma_\beta(\beta)$, $a = \gamma(0)$, то при некотором $\tau \in [0, t_{\max}]$ существует решение $\gamma_\tau(t)$ задачи $\dot\gamma \in G$, $\gamma(\beta) = b$, для которого выполняется равенство $\gamma_\tau(\beta+\tau) = a + T_f$. Из двух решений γ_β и γ_τ "склеим" одно (непрерывное) решение $\gamma_{\beta+\tau}$ задачи (2) на отрезке $0 \le t \le \beta+\tau$. Очевидно, что

$$M(\beta+\tau,\gamma_0) \ge \frac{1}{\beta+\tau}\int_0^{\beta+\tau} f(\gamma_{\beta+\tau}(t))\,dt = \frac{\beta}{\beta+\tau}\left(\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} f(\gamma_\beta(t))\,dt + \frac{1}{\beta}\int_{\beta}^{\beta+\tau} f(\gamma_\tau(t))\,dt\right).$$

С другой стороны, $M(\beta+\tau,\gamma_0) \le (\beta/(\beta+\tau))\Big(M(\beta,\gamma_0) + \sup\limits_{\gamma} \beta^{-1}\int_{\beta}^{\beta+\tau} f(\gamma(t))\,dt\Big)$.

На основании (9) и двух последних неравенств имеем оценки

$$0 \le M(\beta+\tau,\gamma_0) - \frac{1}{\beta+\tau}\int_0^{\beta+\tau} f(\gamma_{\beta+\tau}(t))\,dt \le \frac{\beta}{\beta+\tau}\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{2f_0t_{\max}}{\beta}\right) \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Решение $\gamma_{\beta+\tau}$ продолжим на всю полуось $t \ge 0$ так, чтобы векторное управление $\dot\gamma_{\beta+\tau}$ было продолжено периодически с периодом $\Delta_0 = \beta+\tau$; полученное решение обозначим γ_ε. Для функции γ_ε по построению выполняется тождество (4) (достаточно проинтегрировать равенство $\dot\gamma_\varepsilon(t+\Delta_0) = \dot\gamma_\varepsilon(t)$ на отрезке $[0,t]$ по формуле Ньютона — Лейбница с учетом соотношения $\gamma_\varepsilon(\Delta_0) = \gamma_\varepsilon(0) + T_f$).

Положим теперь $M(\Delta_0) = \sup\limits_{\gamma_0 \in R^m} M(\Delta_0,\gamma_0)$. На основании леммы нетрудно получить оценки

$$0 \le M(\Delta_0) - M(\Delta_0,\gamma_0) \le 2f_0t_{\max}/\beta \le \varepsilon/4. \tag{11}$$

При $\Delta = n\Delta_0$ для любого натурального n, согласно (10), (11), периодичности функции f и тождества (4), имеем

$$0 \le M(\Delta,\gamma_0) - \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} f(\gamma_\varepsilon(t))\,dt = M(\Delta,\gamma_0) - \frac{1}{\Delta_0}\int_0^{\Delta_0} f(\gamma_\varepsilon(t))\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} M(\Delta_0) - \frac{1}{\Delta_0}\int_0^{\Delta_0} f(\gamma_\varepsilon(t))\,dt \le \left(M(\Delta_0,\gamma_0) + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{1}{\Delta_0}\int_0^{\Delta_0} f(\gamma_\varepsilon(t))\,dt \le \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, $0 \le M(\Delta,\gamma_0) - (1/\Delta_0)\int_0^{\Delta_0} f(\gamma_\varepsilon(t))\,dt \le 3\varepsilon/4$.

В частности, числа $M(n_1\Delta_0,\gamma_0)$, $M(n_2\Delta_0,\gamma_0)$ попадут в отрезок, длина которого не превосходит $3\varepsilon/4$. Значит, выполняется (8), что и требуется.

Таким образом, предел (1) существует; поэтому в результате предельного перехода в последнем неравенстве при $\Delta \to \infty$ получим требуемое соотношение (5), которое в силу периодичности функции $f \circ \gamma_\varepsilon$ выполняется при любом $t_0 \geq 0$.

Ясно, что предел (1) общий для любого $\gamma_0 \in R^m$, что является прямым следствием леммы и независимости предела M_f от поведения решения на любом конечном начальном интервале. Поэтому имеет место и равномерная по всем $\gamma_0 \in R^m$ независимость предела максимального среднего от начального вектора.

Покажем теперь, что, пожертвовав отрезком времени $[0, t_{\max}]$, период $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon)$ можно выбрать общим для всех начальных векторов. Действительно, используя обозначения, приведенные в лемме, зафиксируем произвольно вектор $a \in R^m$, например $a = 0$, и примем $b = \gamma_0$. Тогда в момент времени $t = t_a$ некоторая фазовая кривая дифференциального включения, выходя из вектора $\gamma = \gamma_0$ в начальный момент времени $t = 0$, окажется в точке $a + T_f$ при $t = t_a \leq t_{\max}$ в силу леммы. Остается повторить построения, которые были выполнены при доказательстве первой части теоремы. То, что начальный момент времени при этом отличен от 0, не играет роли, поскольку дифференциальное включение является автономным. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96 — 01 — 00616.

Литература

1. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение систем дифференциальных включений. М., 1998.
2. *Филатов О. П.* // Мат. заметки. 1991. Т. 50, вып. 3. С. 135 — 142.
3. *Филатов О. П.* // Мат. заметки. 1996. Т. 59, вып. 5. С. 759 — 767.
4. *Филатов О. П.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 12. С. 2118 — 2127.
5. *Филатов О. П.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 782 — 785.
6. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* // Тр. Мат. ин-та. АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194 — 252.
7. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию
4 ноября 1998 г.