В. Г. Кановей, Об одном следствии аксиомы Мартина,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 113–121

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ АКСИОМЫ МАРТИНА

В. Г. Кановей

§ 1. Введение. Напомним некоторые известные определения.

Пусть P с порядком $\leqslant$ — частично упорядоченное множество. Два произвольных $p, q \in P$ называются совместимыми, если $\exists r\,[r \leqslant p$ и $r \leqslant q]$, и несовместимыми в противном случае [1, стр. 52]. Множество $Q \subseteq P$ называется антицепью, если любые два различных $p, q \in Q$ несовместимы. Условием счетности антицепей (в [1, стр. 68] оно названо «условием счетности цепей») называем условие: каждая антицепь $Q \subseteq P$ не более чем счетна. Далее, множество $D \subseteq P$ называется плотным в P, если для каждого $p \in P$ найдется такое $q \in D$, что $q \leqslant p$ [1, стр. 53]. Пусть F есть некоторое семейство подмножеств множества P. Множество $G \subseteq P$ называется F-генерическим при выполнении следующих трех условий [1, стр. 101]:

а) если $p \in P$ и $q \in G$, $q \leqslant p$, то $p \in G$;

б) если $p, q \in G$, то найдется такое $r \in G$, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$;

в) если $D \in F$ плотно в P, то $D \cap G \neq 0$.

Наконец, через c обозначаем мощность континуума 2^{ω}.

Аксиома Мартина (MA) может быть сформулирована следующим образом [1, стр. 101]:

Если P с порядком $\leqslant$ является частично упорядоченным множеством удовлетворяющим условию счетности антицепей, и если F есть некоторое семейство подмножеств множества P, удовлетворяющее $\operatorname{card}(F) < c$, *то существует F-генерическое множество $D \subseteq P$.*

Более подробно об этой интересной аксиоме см. в [2].

Далее, для каждого множества x через $L[x]$ обозначается класс всех множеств, конструктивных из x [1, стр. 43]. Если при этом α — ординал, то через $\omega_\alpha^{L[x]}$ будем обозначать α-й по счету бесконечный кардинал в $L[x]$ (счет начинается с нуля, т. е. $\omega_0^{L[x]} = \omega$ при любом x).

Аксиомой Леви (LA) будем называть следующее утверждение:

$(\forall x \subseteq \omega)$ [*ординал* $\omega_1^{L[x]}$ *счетен в универсуме всех множеств*].

Предложенное название обусловливается тем, что модель $ZFC + LA$ была построена и изучена А. Леви в [3]. В частности, в [3] доказана равнонепротиворечивость теорий $ZFC + LA$ и $ZFC +$ существует недостижимый кардинал.

И последняя группа определений. Пусть $\varkappa$ — ординал. Множество $A \subseteq \varkappa$ называется замкнутым неограниченным (з. н.) в $\varkappa$, если выполняются, следующие два условия: 1) $\bigcup (A \cap \alpha) \in A$ при любом $\alpha \in \varkappa$ и 2) $\bigcup A = \varkappa$. Кардинал $\varkappa$ называется кардиналом Мало, если $\varkappa$ недостижим и каждое з. н. в $\varkappa$ множество $A \subseteq \varkappa$ содержит недостижимый кардинал (см. [4, стр. 94]).

В предлагаемой статье доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1 (ZFC). *Пусть выполняются* MA, LA *и* $c > \omega_1$ (*т. е. отрицание континуум-гипотезы*). *Тогда* ω_1 *будет кардиналом Мало в* $L[x]$, *каково бы ни было* $x \subseteq \omega$.

Из этой теоремы и определения кардинала Мало немедленно вытекает.

Следствие 1.2. *В теории* $ZFC + LA + MA + c > \omega_1$ *доказуема непротиворечивость теорий* $ZFC + LA$ *и* $ZFC +$ *существует недостижимый кардинал.*

Таким образом, в смысле непротиворечивости теория $ZFC + MA + LA + c > \omega_1$ значительно сильнее благодаря второй теореме Гёделя, чем теории $ZFC + LA$ и $ZFC +$ существует недостижимый кардинал.

Доказательство теоремы 1.1 проводится в § 4 после некоторых предварительных рассуждений § 2 и § 3.

§ 2. О недостижимости. Напомним, что кардинал $\varkappa > \omega$ называется недостижимым, если он удовлетворяет таким двум условиям [1, стр. 40]:

(1) кардинал $\varkappa$ регулярен, т. е. непредставим в виде суммы меньшего числа меньших кардиналов;

(2) если $\alpha < \varkappa$, то $2^\alpha < \varkappa$.

Если при этом выполняется обобщенная континуум-гипотеза GCH, то, как отмечено в [1, стр. 40], условие (2) может быть заменено следующим условием «слабой недостижимости»:

(3) $\varkappa = \omega_\alpha$, где ординал α пределен.

Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1 *Пусть $x \subseteq \omega$ и выполняется LA. Тогда кардинал ω_1 является недостижимым кардиналом в $L[x]$.*

Доказательство. Как показано в [1, замечание на стр. 44], в классе $L[x]$ истинна GCH. Следовательно, достаточно проверить, что ω_1 удовлетворяет (1) и (3) в $L[x]$. Но кардинал ω_1, очевидно, регулярен в универсуме (аксиома выбора предполагается во всех рассуждениях). Тем самым он регулярен и в $L[x]$.

Осталось доказать (3). Пусть $\omega_1 = \omega_\alpha^{L[x]}$; докажем, что ординал α пределен.

Пусть, напротив, $\alpha = \beta + 1$. Тогда $\omega_\beta^{L[x]} < \omega_1 = \omega_\alpha^{L[x]}$, т. е. $\omega_\beta^{L[x]}$ счетно (в универсуме). Поэтому найдется такое $u \subseteq \omega$, что $x \in L[u]$ и $\omega_\beta^{L[x]}$ счетно в $L[u]$, т. е. $\omega_\beta^{L[x]} < \omega_1^{L[u]}$. Соединяя оба соотношения, получаем $\omega_\beta^{L[x]} < \omega_1^{L[u]} \leqslant \omega_1 = \omega_\alpha^{L[x]}$. Но, в силу $\alpha = \beta + 1$, между $\omega_\beta^{L[x]}$ и $\omega_\alpha^{L[x]}$ нет кардиналов в $L[x]$, тем более их нет и в $L[u]$, так как $x \in L[u]$. Это означает $\omega_1 = \omega_1^{L[u]}$, что, очевидно, противоречит LA. Таким образом, α предельно, лемма доказана.

Здесь же приведем еще одно утверждение, доказанное в [4, теорема 6, стр. 94].

Утверждение 2.2. *Если $\varkappa$ — недостижимый кардинал и каждое з. н. множество $A \subseteq \varkappa$ содержит регулярный кардинал, то $\varkappa$ является кардиналом Мало.*

§ 3. Принцип почти дизъюнктных множеств. Обозначим $R = \{x: x \subseteq \omega\}$ свокупность всех множеств натуральных чисел. Множества $x, y \in R$ называются почти дизъюнктными, если они оба бесконечны, но $x \cap y$ конечно. Укажем важный способ получения почти дизъюнктных множеств, близкий к методу получения таких множеств в [5].

Пусть $\{(n_i, u_i): i \in \omega\}$ —некоторая каноническая нумерация множества $\{(n, u): n \in \omega$ и $u \subseteq n\}$. Для каждого $x \in R$ определяется $S(x) = \{i \in \omega: x \cap n_i = u_i\}$.

ЛЕММА 3.1. *Если $x, y \in R$ различны, то $S(x)$ и $S(y)$ почти дизъюнктны; в частности, $S(x) \neq S(y)$.*

Через $\mathcal{F}$ обозначим множество $\{S(x): x \in R\}$ и докажем следующую теорему, являющуюся «принципом почти дизъюнктных множеств».

ТЕОРЕМА 3.2 (доказана в [2]). *Предположим, что выполняется MA и* $c > \omega_1$; $X \subseteq \mathcal{F}$ — *множество мощности* $\leqslant \omega_1$ *и* $Y \subseteq X$. *Тогда найдется такое* $z \in R$, *что*

(i) *если* $y \in Y$, *то* $z \cap y$ *конечно*;

(ii) *если* $x \in X - Y$, *то* $z \cap x$ *бесконечно*.

Доказательство. Пусть P есть совокупность всех пар (s, t) таких, что $s \subseteq \omega$ конечно и $t \subseteq Y$ конечно. Порядок на P вводится следующим образом: $(s, t) \leqslant (s', t')$, если и только если

1) $s' \subseteq s$ и $t' \subseteq t$;

2) $s \cap y = s' \cap y$ для любого $y \in t'$.

Таким образом, бо̀льшие компоненты множества $p \in P$ соответствуют меньшему в смысле этого порядка множеству p.

Прервем доказательство теоремы для доказательства такой леммы.

ЛЕММА 3.3. *P удовлетворяет условию счетности антицепей.*

Доказательство леммы. Заметим, что любые $(s, t) \in P$ и $(s, t') \in P$ (с одинаковыми первыми компонентами) совместимы, так как множество $(s, t \cup t')$, очевидно, принадлежит P и удовлетворяет $(s, t \cup t') \leqslant (s, t)$ и $(s, t \cup t') \leqslant (s, t')$. Поэтому несовместимые p, $q \in P$ обязаны иметь различные первые компоненты. Но имеется всего счетное число возможных первых компонент у элементов множества P. Теперь лемма очевидна.

Продолжаем доказательство теоремы 3.2. Для каждого $y \in Y$ определяем $D_y = \{(s, t) \in P: y \in t\}$. Для всех $x \in X - Y$ и $n \in \omega$ определяем множество $D_{xn} = \{(s, t) \in P$: найдется такое $k \in x \cap s$, что $k \geqslant n\}$. Докажем две леммы о плотности.

ЛЕММА 3.4. *Если* $y \in Y$, *то множество* D_y *плотно в* P.

Доказательство. Если $(s, t) \in P$, то $(s, t \cup \{y\}) \in D_y$ и $(s, t \cup \{y\}) \leqslant (s, t)$.

ЛЕММА 3.5. *Если* $x \in X - Y$ *и* $n \in \omega$, *то множество* D_{xn} *плотно в* P.

Доказательство. Пусть $p = (s, t) \in P$; построим такое $q \in D_{xn}$, что $q \leqslant p$. Заметим, что $x \notin Y$, а $t \subseteq Y$, и поэтому $x \notin t$. С другой стороны, из $x \in X \subseteq \mathcal{F}$ и $t \subseteq Y \subseteq X \subseteq \mathcal{F}$ вытекает $t \cup \{x\} \subseteq \mathcal{F}$. Значит, по лемме 3.1, множество $x \cap y$ будет конечным при любом $y \in t$. Отсюда следует существование такого $m \in \omega$, что $m \geqslant n$ и выполняется: (1) $(\forall k \geqslant m)$ $(\forall y \in t)$ $[k \notin x \cap \cap y]$.

Далее, из $x \in X \subseteq \mathcal{F}$ и леммы 3.1 вытекает бесконечность x. Следовательно, найдется такое $k \in x$, что $k \geqslant m$. Тогда $k \geqslant n$, и поэтому множество $q = (s \cup \{k\}, t)$ принадлежит D_{xn}.

Осталось проверить $q \leqslant p$. Предположим противное: $q \nleqslant p$. Поскольку $p = (s, t)$, то это означает, что найдется $y \in t$, удовлетворяющее $(s \cup \{k\}) \cap y \neq s \cap y$. Ясно, что последнее утверждение влечет $k \in y$. Но $k \geqslant m$ и $k \in x$. Получилось противоречие с (1), завершающее доказательство $q \leqslant p$ и леммы.

Продолжаем доказательство теоремы 3.2. Определим $F = \{D_y: y \in Y\} \cup \{D_{xn}: x \in X - Y$ и $n \in \omega\}$. Поскольку card $(X) \leqslant \omega_1$, то мы имеем card $(F) \leqslant \omega_1$. Значит, учитывая лемму 3.3 и $c > \omega_1$, мы можем применить аксиому Мартина и найти F-генерическое множество $G \subseteq P$. Покажем, что множество $z = \bigcup \{s$: найдется такое t, что $(s, t) \in G\}$ будет искомым в смысле теоремы 3.2.

Проверка (i). Пусть $y \in Y$; докажем, что $z \cap y$ конечно. Из леммы 3.4 и F-генеричности множества G имеем $G \cap D_y \neq 0$. Пусть $p = (s, t)$ принадлежит $D_y \cap G$. Докажем $z \cap y \subseteq s$; поскольку s конечно по определению $(s, t) \in P$, то этого будет достаточно.

Предположим противное: $k \in z \cap y$, но $k \notin s$. По определению z найдется такое $q = (s', t') \in G$, что $k \in s'$. Далее, поскольку p и q — элементы множества G, то из определения генерического множества, § 1, следует существование такого $r = (s'', t'') \in P$, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$. По определению $\leqslant$ имеем:

(1) $s' \subseteq s''$, и тем самым $k \in s''$, так как $k \in s'$;

(2) $s \cap y = s'' \cap y$, так как $y \in t$.

Но эти два утверждения дают противоречие благодаря тому, что $k \in y$ и $k \notin s$. Противоречие завершает проверку (i).

Проверка (ii). Пусть $x \in X - Y$; покажем, что $z \cap x$ бесконечно. Достаточно проверить, что для всякого $n \in \omega$ найдется такое $k \in z \cap x$, что $k \geqslant n$.

Пусть $n \in \omega$. Из леммы 3.5 и F-генеричности G следует $D_{xn} \cap G \neq 0$. Пусть $(s, t) \in D_{xn} \cap G$. Тогда $s \subseteq z$ по определению z и найдется такое $k \in s \cap x$, что $k \geqslant n$ по определению D_{xn}. Итак, нашлось такое $k \in z \cap x$, что $k \geqslant n$, что и требовалось.

Проверка (ii) для z и доказательство теоремы 3.2 закончены.

§ 4. **Доказательство теоремы 1.1.** В этом параграфе предполагается выполнение MA, LA и $c > \omega_1$.

4.1. Мы докажем, что $\Omega = \omega_1$ будет кардиналом Мало в $L[x]$ при любом $x \in R$.

Предположим противное: $u \in R$ таково, что Ω — не кардинал Мало в $L[u]$. Поскольку Ω недостижим в $L[u]$ по лемме 2.1, то это предположение согласно 2.2 влечет существование такого з.н. в Ω множества $A \subseteq \Omega$, $A \in L[u]$, которое не содержит регулярных в смысле $L[u]$ кардиналов.

Будем получать противоречие из этого предположения. Множества u и A указанного вида фиксируются в дальнейших рассуждениях. Для каждого $\alpha \in \Omega$ через a_α обозначаем α-й по величине элемент множества A (поскольку $A \subseteq \Omega$ является з. н. в $\Omega = \omega_1$ и мы предполагаем аксиому выбора, то card $(A) = \Omega$). Не ограничивая общности, считаем, что $a_0 = 0$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Существует такая последовательность* $d = (x_\alpha\colon \alpha \in \Omega)$ *элементов множества* R, *что выполняются следующие условия*:

(а) $x_\alpha \notin \{x_\gamma\colon \gamma \in \alpha\}$ *при любом* $\alpha \in \Omega$ *и* $x_0 = u$;

(б) $a_\alpha < \omega_1^{L[x_\alpha]}$ *при любом* $\alpha \in \Omega$;

(в) $\Omega = \omega_1^{L[d]}$;

(г) *если* $\alpha \in \Omega$ *предельно, то* x_α *есть наименьшее в смысле канонического полного упорядочения класса* $L[d \mid \alpha]$ *из таких* $y \in R \cap L[d|\alpha]$, *что* $y \notin \{x_\gamma\colon \gamma \in \alpha\}$ *и* $L[d|\alpha] = L[y]$.

(Комментарий к формулировке (г): $d|\alpha$ есть ограничение последовательности d на α, т. е. $d|\alpha = (x_\gamma\colon \gamma \in \alpha)$.)

Доказательство Построение искомой последовательности проходит индукцией по α. Индукция состоит из трех пунктов.

1*. Полагаем $x_0 = u$.

2*. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $x_\gamma \in R$ построено для каждого $\gamma \leqslant \alpha$. Укажем построение $x_{\alpha+1}$. Поскольку $a_{\alpha+1} \in A \subseteq \Omega$, то ординал $a_{\alpha+1}$ счетен. Значит, найдется такое $y \in R$, что $a_{\alpha+1} < \omega_1^{L[y]}$ и $y \notin \{x_\gamma\colon \gamma \leqslant \alpha\}$. Полагаем $x_{\alpha+1}$ равным одному из таких y.

3*. Предположим, что $\alpha \in \Omega$ предельно и «начало» $d|\alpha = (x_\gamma\colon \gamma \in \alpha)$ уже построено, причем (б) выполняется для всех $\gamma < \alpha$. Укажем построение x_α.

Первым делом докажем $a_\alpha < \omega_1^{L[d|\alpha]}$. В самом деле, в соответствии со сделанным предположением, $a_\gamma < < \omega_1^{L[x_\gamma]}$ выполняется для всех $\gamma \in \alpha$. Тем более $a_\gamma < \omega_1^{L[d|\alpha]}$. Но множество A замкнуто в Ω, и это в силу предельности α влечет $a_\alpha \leqslant \omega_1^{L[d|\alpha]}$.

Теперь докажем, то невозможно равенство $a_\alpha = = \omega_1^{L[d|\alpha]}$. Действительно, кардинал $\omega_1^{L[d|\alpha]}$ регулярен в $L\,[d|\alpha]$ и тем более он регулярен в $L\,[u]$, так как $u = = x_0 \in L\,[d\,|\,\alpha]$. С другой стороны, a_α не является регулярным кардиналом в $L\,[u]$ в силу $a_\alpha \in A$ и выбора A и u. Таким образом, указанное равенство действительно невозможно. Вместе с доказанным выше $a_\alpha \leqslant \omega_1^{L[d|\alpha]}$ имеем окончательно $a_\alpha < \omega_1^{L[d|\alpha]}$.

Тем более будет $\alpha < \omega_1^{L[d|\alpha]}$, т. е. в $L\,[d|\alpha]$ истинно «$d|\alpha = (x_\gamma\colon \ \gamma \in \alpha)$ есть последовательность элементов множества R счетной длины α». Значит, найдется такое $y \in R \cap L\,[d|\alpha]$, что $y \notin \{x_\gamma\colon \ \gamma \in \alpha\}$ и $L\,[d|\alpha] = L\,[y]$. Полагаем x_α равным наименьшему в смысле канонического полного упорядочения класса $L\,[d|\alpha]$ из таких y. Построение $(x_\alpha\colon \alpha \in \Omega)$ закончено.

Проверяем выполнение (а) — (г). Выполнение (а) очевидно при $\alpha = 0$ и явным образом обеспечивается в построениях 2* и 3* при $\alpha > 0$. Выполнение (б) при $\alpha = 0$ следует из предположения $a_\alpha = 0$ в 4.1. Выполнение (б) для непредельных α непосредственно следует из построения 2*.

Докажем (б) в случае предельного $\alpha \in \Omega$. По построению 3* будет $L\,[x_\alpha] = L\,[d|\alpha]$; также выполняется $a_\alpha < < \omega_1^{L[d|\alpha]}$ (см. рассуждения 3*). Соединяя оба утверждения, и получаем (б).

Далее, (в) очевидно из (б), а (г) непосредственно обеспечивается построением 3*. Итак, последовательность $d = (x_\alpha\colon \alpha \in \Omega)$ — искомая. Теорема доказана.

В дальнейшем последовательность $d = (x_\alpha\colon \alpha \in \Omega)$ со свойствами (а) — (г) фиксирована.

4.3. Отметим, что если $\alpha \in \Omega$ предельно, то, имея «начало» $\mathrm{d}\,|\alpha = (x_\gamma\colon \gamma \in \alpha)$, мы однозначно восстанавливаем x_α в $L\,[d|\alpha]$ с помощью 4.2 (г). Целью следующей леммы будет выбор такого $z \in R$, которое поможет сделать то же самое и для непредельных α. Перед формулировкой леммы введем для $x \in R$ и $n \in \omega$ «свертку» $x * * n = \{2^n (2k + 1) - 1 \colon k \in x\}$.

ЛЕММА 4.3. *Найдется такое $z \in R$, что для каждого $\alpha \in \Omega$ выполняется равенство $x_{\alpha+1} = \{n\colon$ множество $z \cap S (x_\alpha * n)$ конечно$\}$.*

Доказательство основано на теореме 3.2. Определяем множества $X = \{S (x_\alpha * n)\colon \alpha \in \Omega$ и $n \in \omega\}$ и $Y = \{S (x_\alpha * n)\colon \alpha \in \Omega$ и $n \in x_{\alpha+1}\}$. Перед применением 3.2 докажем два вспомогательных утверждения.

(1) Если $x_\alpha * n = x_\beta * m$, то $\alpha = \beta$ и $m = n$.

В самом деле, указанное равенство очевидным образом влечет $m = n$ и $x_\alpha = x_\beta$ по определению свертки $*$. Но если $\alpha \neq \beta$, то $x_\alpha \neq x_\beta$ следует из 4.2 (а). Теперь (1) очевидно.

(2) Если $S (x_\alpha * n) \in Y$, то $n \in x_{\alpha+1}$.

Действительно, по определению множества Y имеем: найдутся такие $\beta \in \Omega$ и $m \in \omega$, что $S (x_\alpha * n) = S (x_\beta * m)$ и $m \in x_{\beta+1}$. Но равенство $S (x) = S (y)$ влечет $x = y$ по 3.1, следовательно, $x_\alpha * n = x_\beta * m$. Применяя (1), отсюда имеем $\alpha = \beta$ и $m = n$. Теперь (2) вытекает из $m \in x_{\beta+1}$.

Возвращаемся к доказательству леммы. Из определения X и Y получаем $Y \subseteq X \subseteq \mathcal{F}$ и $\operatorname{card} (X) = \Omega = \omega_1$. Значит, по теореме 3.2 найдется такое $z \in R$, что для каждого $x \in X$ выполняется эквивалентность: (3) $x \in Y$, если и только если $z \cap x$ конечно.

Теперь из утверждений (2), (3) и определения множества Y следует: множество z является искомым. Лемма доказана.

Фиксируем множество $z \in R$, существование которого утверждается в доказанной лемме. Решающим моментом доказательства теоремы 1.1 является следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4.4. *Последовательность $d = (x_\alpha\colon \alpha \in \Omega)$ принадлежит $L [u, z]$.*

Доказательство. Укажем следующую процедуру вычисления множества $x'_\alpha \in R$ в $L [u, z]$.

1**. Полагаем $x'_1 = u$.

2**. Если $x'_\alpha \in R$ построено, то $x'_{\alpha+1} = \{n\colon z \cap S (x_\alpha * * n)$ конечно$\}$.

3**. Если $\alpha \in \Omega$ предельно и «начало» $d' = (x'_\gamma\colon \gamma \in \alpha)$ уже построено, то x'_α есть наименьшее в смысле канонического полного упорядочения класса $L[d']$ из таких $y \in R \cap L[d']$, что $L[d'] = L[y]$ и $y \notin \{x'_\gamma: \gamma \in \alpha\}$.

Индукцией по α нетрудно доказать равенство $x'_\alpha = x_\alpha$, для всех $\alpha \in \Omega$. Именно, для $\alpha = 0$ искомое очевидно: $x'_\alpha = x_\alpha = u$. Индуктивный шаг $\alpha \to \alpha + 1$ рассматривается с учетом выбора z (удовлетворяющего условию леммы 4.3). А индуктивный шаг предельного α рассматривается с учетом 4.2 (г). Итак, $x'_\alpha = x_\alpha$, для всех $\alpha \in \Omega$.

Далее, указанное построение проходит в $L[u, z]$. Тем самым $d = (x_\alpha: \alpha \in \Omega)$ принадлежит $L[u, z]$. Теорема доказана.

Следствие 4.5. *Найдется такое* $y \in R$, *что* $\omega_1^{L[y]} = \Omega$.

Доказательство. Действительно, определим $y = \{2n: n \in u\} \cup \{2n + 1: n \in z\}$. Тогда $u, z \in L[y]$, и поэтому $d \in L[y]$ по теореме 4.4. Используя 4.2 (в), отсюда имеем искомое.

4.6. Завершаем доказательство теоремы 1.1. Выше в 4.1 мы предположили противное. Это привело нас к существованию такого $y \in R$, что $\omega_1^{L[y]} = \Omega = \omega_1$. Тем самым получаем противоречие с предположением о том, что выполняется LA (сделанным в соответствии с формулировкой теоремы 1.1). Противоречие опровергает предположение противного в 4.1 и завершает доказательство теоремы 1.1.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
26.X.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Й е х Т., Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.
[2] M a r t i n D., S o l o v a y R., Internal Cohen extensions, Ann. of Math. Logic, 2, № 2 (1970), 143—178.
[3] L e v y A., Definability in axiomatic set theory II, Math. Logic and Found. of Set Theory, North-Holl., Amst., 1970, 129—145.
[4] D e v l i n K., Indescribability properties and small large cardinals, Lectures Notes in Math., 499, Berlin, Springer, 1975, 89—114.
[5] J e n s e n R. B., S o l o v a y R. M., Some applications of almost disjoined sets, Math. Logic and Found. of Set Theory, North-Holl., Amst., 1970, 84—103.