Буй Суан Хай

О РАСПОЛОЖЕНИИ ПОДГРУПП В СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ НАД ТЕЛОМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЦЕНТРОМ

§ I. Введение. В теории линейных групп над кольцами одним из направлений является изучение строения и расположения подгрупп. Частным случаем этой общей задачи является вопрос об описании решетки подгрупп в классических линейных группах, содержащих подгруппу диагональных матриц (саму линейную группу мы представляем в виде группы матриц). Для случая полной линейной группы $GL(n, K)$ над полем K эта задача была решена З.И.Боревичем в работе [I]. Оказалось, что если $card\, K \geqslant 7$, решетка подгрупп в $GL(n, K)$, содержащих подгруппу $D(n, K)$ диагональных неособенных матриц, конечна и не зависит от поля K. Этот результат в дальнейшем был перенесен на случай общих полулокальных колец (см. [3]). Другие классические группы над полями и над некоторыми коммутативными кольцами были изучены в серии работ Н.А.Вавилова и ряда других авторов [6]-[8], [4], [5], [10]. В частности, для конечного поля $K = \mathbb{F}$ из q элементов, где $q \geqslant 13$, $q \neq 2^n$, $n \geqslant 2$ задача описания подгрупп в специальной линейной группе $SL(n, K)$ была решена Г.Зейтцем [10]. В серии из недавних четырех работ Н.А.Вавилова эта задача получила полное решение для произвольного поля, имеющего не менее семи элементов, при $n \geqslant 3$ (см. [4]). Именно ими была доказана стандартность расположения промежуточных подгрупп в $SL(n, K)$, содержащих группу специальных диагональных матриц $SD(n, K)$.

Для случая полной линейной группы, подгруппы, содержащие группу диагональных матриц, описаны не только над полем, но и над полулокальным кольцом (не обязательно коммутативным). Естественно, поэтому поставить теперь вопрос, допускают ли результаты работ [4], [10] распространение на полулокальные кольца. Однако, это совсем не простая задача. Дело в том, что методы работ [6], [7], [4], [5], [10] самым существенным образом используют специфику поля и поэтому не могут быть непосредственно распространены на кольца. Чтобы убедиться в этом, достаточно смотреть хотя бы работу [4].

В качестве первого шага в этом направлении отметим недавнюю работу И.Хамдана [9], в которой получено стандартное описание подгрупп для группы $SL(n, R)$, где R - кольцо дискретного нормирования (т.е. R - коммутативное локальное кольцо главных идеалов). Однако, класс колец, рассматриваемый И.Хамданом, удов-

© Буй Суан Хай, 1989

летворяет ряду арифметических условий, благодаря которым удается так модифицировать алгоритм получения нуля из работы [4], который играет очень существенную роль в методе решения этой задачи.

Дело обстоит гораздо сложнее в случае некоммутативных полулокальных колец. Еще не было ни одной работы, посвященной этому направлению. Такое обстоятельство объясняется тем, что для общих полулокальных колец к настоящему времени все еще не видно даже никаких подходов к решению этой задачи. В качестве первого шага в таком направлении следовало бы рассмотреть случай тел. Именно это и служит предметом наших исследований в настоящей работе. При этом мы ограничиваемся лишь телами с бесконечным центром. Тела с произвольным центром будут исследованы в другой работе автора.

Как и в случае поля описание решетки промежуточных подгрупп H (для которых $SD(n,T) \leq H \leq SL(n,T)$) дается нами в терминах понятий сети и сетевой подгруппы. Напомним их определения. В самом общем виде для произвольных колец эти понятия содержатся в работе [2].

Пусть R - произвольное ассоциативное кольцо с единицей и $n \geq 2$ - натуральное число. Рассмотрим квадратную таблицу

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n, \qquad (1)$$

состоящую из n^2 аддитивных подгрупп σ_{ij} аддитивной группы кольца R (расположенных в n строчках и n столбцах). Для таблицы (1) через $M(\sigma)$ обозначим совокупность всех тех матриц $a = (a_{ij})$ порядка n с элементами a_{ij} из R, для которых $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех i и j. Легко видеть, что $M(\sigma)$ будет подкольцом в кольце $M(n, R)$ всех матриц порядка n над R тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij} \qquad (2)$$

при всех значениях индексов i, r, j.

Таблица (1) называется сетью аддитивных подгрупп кольца R порядка n, если для нее выполнены все условия (2), т.е. если $M(\sigma)$ является подкольцом в кольце $M(n,R)$. Ясно, что для сети σ все σ_{ii} - подкольца кольца R (возможно без единицы).

Пусть e - единичная матрица порядка n. Для произвольной сети σ множество

$$e + M(\sigma) = \{e + a : a \in M(\sigma)\}$$

является мультипликативной системой с единицей e. Группа $G(\sigma)$ всех обратимых элементов этой мультипликативной системы называется сетевой подгруппой в полной линейной группе $GL(n, R)$. Если $e \in M(\sigma)$, то $e + M(\sigma) = M(\sigma)$, и тогда $G(\sigma)$ совпадает с группой обратимых элементов кольца $M(\sigma)$.

Если Γ - подгруппа в $GL(n, R)$ и σ - сеть в кольце R порядка n, то под сетевой подгруппой в Γ, соответствующей сети σ, понимается пересечение:

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma \cap G(\sigma) .$$

В нашей работе в качестве кольца R выступает тело T, и все используемые сети характеризуются условием

$$\sigma_{ii} = T \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) . \tag{3}$$

При этом условии для аддитивной группы σ_{ij} имеем только две возможности: либо σ_{ij} - нулевая подгруппа, либо $\sigma_{ij} = T$. Включения (2) в этом случае можно перефразировать в виде: если $\sigma_{ir} = T$ и $\sigma_{rj} = T$, то $\sigma_{ij} = T$.

Как обычно через e_{ij} мы обозначаем матрицу, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Матрица вида $e + \alpha e_{ij}$ $(i \neq j,\ \alpha \in T)$ называется элементарной трансвекцией и обозначается через $t_{ij}(\alpha)$. Для обратной матрицы $a = (a_{ij})$ обратная к ней матрица обозначается через $a^{-1} = (a'_{ij})$.

Специальная линейная группа $\Gamma = SL(n, T)$ над телом T определяется как подгруппа в $GL(n, T)$, состоящая из матриц с единичным определителем Дьедонне, или как подгруппа, порожденная всеми элементарными трансвекциями (см., например, [10]).

Обозначим через $\Delta = SD(n, T)$ подгруппу содержащихся в Γ диагональных матриц из $GL(n, T)$. Нашей целью является описание решетки всех промежуточных подгрупп, т.е. тех подгрупп H, для которых $\Delta \leqslant H \leqslant \Gamma$. Если некоторая трансвекция $t_{ij}(\alpha)$ с $\alpha \neq 0$ содержится в H, то в H содержатся и все трансвекции вида $t_{ij}(\xi)$ при любом $\xi \in T$, ввиду очевидной формулы

$$t_{ij}(\xi) = t_{ij}(\varepsilon\alpha) = d_{ir}(\varepsilon)\, t_{ij}(\alpha)\, d_{jr}(\varepsilon^{-1}) ,\ \varepsilon \neq 0 .$$

Отсюда следует, что при фиксированных i и j подгруппа H содержит все трансвекции $t_{ij}(\xi)$, $\xi \in T$, тогда и только тогда, когда $t_{ij}(1) \in H$.

С подгруппой H ассоциируем сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, определив σ_{ij} следующим образом: если $i = j$, то используем формулы (3), если же $i \neq j$, то $\sigma_{ij} = T$, если $t_{ij}(1) \in H$, и $\sigma_{ij} = 0$ в противном случае. Так построенную сеть σ называем сетью, ассоциированной с H.

Введем еще одно обозначение. Для сетевой подгруппы $\Gamma(\sigma)$, соответствующей сети σ, ее нормализатор в группе $\Gamma = SL(n, T)$ будем обозначать через

$$N(\sigma) = N_{\Gamma}(\Gamma(\sigma)) .$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА. Пусть T - тело с бесконечным центром, $\Gamma = SL(n,T)$ - специальная линейная группа над T степени $n \geq 3$, $\Delta = SD(n,T)$ - подгруппа диагональных матриц с единичным определителем Дьедонне. Тогда для каждой промежуточной подгруппы H, $\Delta \leq H \leq \Gamma$, существует сеть σ порядка n такая, что

$$\Gamma(\sigma) \leq H \leq N(\sigma) .$$

Сеть σ определена подгруппой H однозначно, а именно, - это сеть, ассоциированная с H.

В дальнейшем через Z обозначается центр тела T, а T^* - мультипликативная группа тела T. Если $\theta \in T^*$, $1 \leq r \leq n$, то $d_r(\theta) = e + (\theta - 1) e_{rr}$.

§ 2. Вспомогательные утверждения. Мы приведем без доказательств следующие леммы.

ЛЕММА I. Пусть σ - некоторая сеть над телом T. Для того чтобы матрица $a = (a_{ij}) \in \Gamma$ с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$ принадлежала нормализатору $N(\sigma)$, необходимо и достаточно чтобы для всех индексов i, j, r, s из условий $a_{ir} a'_{sj} \neq 0$ и $\sigma_{rs} = T$ всегда следовало $\sigma_{ij} = T$.

ЛЕММА 2. Пусть $card\, Z \geq 5$, $n \geq 3$. Если для некоторой матрицы $a = (a_{ij}) \in H$, $\Delta \leq H \leq \Gamma$, при каком-то r, $1 \leq r \leq n$ имеем $a_{rj} = 0$ для всех $j \neq r$, то $a \in N(\sigma)$. В частности, $a_{ir} \in \sigma_{ir}$ при всех $i \neq r$.

В ходе доказательства следующей леммы нам будет нужна матрица такого вида

$$d^r(\varepsilon) = diag(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \varepsilon^{1-n}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) ,$$

где $\varepsilon \in T^*$, $1 \leq r \leq n$, ε^{1-n} стоит на r-м месте.

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 3$, $card\, Z > 2n+1$, $\Delta \leq H \leq \Gamma$.

Если в матрице $a = (a_{ij}) \in H$ при некоторых p, r имеем $a_{pr} = 0$, то $a_{ir} a'_{rj} \in \sigma_{ij}$ при всех i, j.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу $d^r(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in Z$, $\varepsilon \neq 0$, $1 \leq r \leq n$. Ясно, что матрица $b = a d^r(\varepsilon) a^{-1}$ принадлежит H и

$$b_{ij} = \varepsilon(\delta_{ij} + a_{ir} \xi a'_{rj}),$$

где $\xi = \varepsilon^{-n} - 1$, δ_{ij} – символ Кронекера. Так как $a_{pr} = 0$, то $b_{pj} = \varepsilon \delta_{pj}$. Поэтому можно применить лемму 2 и заключить, что $b \in N(\sigma)$. В частности, отсюда следует $b_{ij} b'_{jj} \in \sigma_{ij}$. Поскольку $b'_{ij} = \varepsilon^{-1}(1 + a_{ir}(\varepsilon^n - 1) a'_{rj})$, то, очевидно, мы можем выбрать ε из Z так, что $b'_{jj} \neq 0$. Для этого ε не должно быть корнем одного уравнения n-ой степени. Заметим, что такое ε существует, так как любой многочлен n-ой степени с коэффициентами из тела может иметь лишь не более n корней, лежащих в центре тела. Следовательно, $b_{ij} = \varepsilon a_{ir} \xi a'_{rj} \in \sigma_{ij}$. Условие $\xi \neq 0$ накладывает на ε еще n ограничений, а в нашем предположении $card\, Z > 2n + 1$, то в итоге мы можем выбрать ε из Z так чтобы $b'_{jj} \neq 0$ и $\xi \neq 0$. Отсюда следует $a_{ir} a'_{rj} \in \sigma_{ij}$.

В оставшейся части этого параграфа мы докажем основную лемму об извлечении трансвекций, играющую ключевую роль в решении нашей задачи.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ – элементы тела T, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = 1$. Возьмем элемент из Z такой, что $\xi = \varepsilon^{-n} - 1 \neq 0$, и положим

$$a(\varepsilon) = \varepsilon(\delta_{ij} + \alpha_i \xi \beta_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Непосредственная проверка показывает, что эта матрица обратима и обратная к ней равна

$$a(\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1}(\delta_{ij} + \alpha_i \bar{\xi} \beta_j), \quad \bar{\xi} = -\xi(1 + \xi)^{-1}.$$

ЛЕММА 4. Пусть T – тело с центром Z, $card\, Z > 23n + 1$, $n \geq 3$. Пусть, далее H – подгруппа, такая что $\Delta \leq H \leq \Gamma$. Тогда, если для любого ε из Z матрица $a(\varepsilon)$ принадлежит H, то для всех p, q имеем $\alpha_p \beta_q \in \sigma_{pq}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, мы можем считать, что $p \neq q$ и

$\alpha_p \beta_q \neq 0$. По лемме 2 мы можем считать, что $\alpha_h \beta_h \beta_p \neq 0$. Это накладывает на ε n ограничений. Рассмотрим матрицу $c = a\, d_{hr}(\theta)$, где $a = a(\varepsilon)$, $\varepsilon \in Z$, $\varepsilon \neq 0$, $\theta \in T^*$, $d_{hr}(\theta) = d_h(\theta)\, d_r(\theta^{-1})$. Ясно, что матрица $b = c\, d_{hp}(\eta)\, c^{-1}$, где $\eta \in T^*$, принадлежит подгруппе H. Непосредственное вычисление дает следующую формулу

$$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ih}\theta(\eta - 1)\theta^{-1} a'_{hj} + a_{ip}(\eta^{-1} - 1) a'_{pj} .$$

Из этой формулы получаем

$$b_{hq} = a_{hh}\theta(\eta - 1)\theta^{-1} a'_{hq} + a_{hp}(\eta^{-1} - 1) a'_{pq} .$$

Положим $\theta = a_{hh}^{-1} a_{hp}$. Тогда

$$b_{hq} = a_{hp}(\eta - 1)(\theta^{-1} a'_{hq} - \eta^{-1} a'_{pq}) .$$

Положив $\eta = a'_{pq}\, a'^{-1}_{hq}\, a_{hh}^{-1}\, a_{hp}$, получим $b_{hq} = 0$. Заметим, что здесь элементы a'_{pq}, a'_{hq}, a_{hp} автоматически обратимы. Обратимость элемента $a_{hh} = 1 + \alpha_h \xi \beta_h$ накладывает на ε самое большее n ограничений. Ясно, что можно выбрать ε из Z так, чтобы $\eta \neq 1$. Для этого ε не должно быть корней еще одного уравнения степени $4n$. Ясно также, что мы можем выбрать ε из Z так, чтобы $b_{pq} \neq 0$ и $b'_{qq} \neq 0$. Для этого ε не должно быть корней еще двух уравнений степеней соответственно $8n$ и $10n$. В итоге всего $23n + 1$ ограничений на ε. Теперь из леммы 3 следует, что ненулевой элемент $b_{pq} b'_{qq}$ принадлежит σ_{pq}. Это означает, что $\sigma_{pq} = T$, и поэтому $\alpha_p \beta_q \in \sigma_{pq}$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы. Пусть $a = (a_{ij})$ – произвольная матрица из $\Gamma = SL(n, T)$. Положим $b = a d^r(\varepsilon) a^{-1}$, $\varepsilon \in T^*$. Если ε принадлежит центру Z тела T, то имеем

$$b_{ij} = \varepsilon(\delta_{ij} + a_{ir}\xi a'_{rj}) , \qquad \text{где } \xi = \varepsilon^{-n} - 1 .$$

Теперь, пусть $a = (a_{ij})$ – произвольная матрица из подгруппы H с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$. Согласно лемме I мы должны доказать, для всех индексов i, j, r, s, что $\sigma_{ij} = T$, если только $a_{ir} a'_{sj} \neq 0$ и $\sigma_{rs} = T$. В случае $r = s$ требуемые равенства непосредственно вытекают из леммы 4, если мы положим там $\alpha_i = a_{ir}$, $\beta_i = a'_{ri}$ и заметим, что матрица $a(\varepsilon) =$

$= a d^{r}(\varepsilon) a^{-1}$ принадлежит H при всех ненулевых ε из Z. Пусть $r \neq s$. Возьмем элемент α из T^* и положим $b = a t_{rs}(\alpha) a^{-1}$. Ясно, что мы можем выбрать α из T^* так, чтобы $b'_{jj} = 1 - a_{jr} \alpha a'_{rj} \neq 0$. Кроме того, по условию $b_{ij} = a_{ir} \alpha a'_{sj}$ отличается от нуля. Поэтому по уже доказанному $\sigma_{ij} = T$, что и требовалось доказать.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю З.И.Боревичу, а также Н.А.Вавилову за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Боревич З.И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц//Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР. 1976. Т.64. С.12-29.
2. Боревич З.И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями//Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР. 1978. Т.75. С.22-31.
3. Боревич З.И., Вавилов Н.А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц//Тр.Мат.ин-та АН СССР. 1978. Т.148. С.43-57.
4. Вавилов Н.А. О подгруппах специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц. I-IУ//Вестник Ленингр. ун-та. Сер.I. 1985, № 22. С.3-7. Вып.I. С.10-15; 1987. Вып.2. С.3-8; 1988. Вып.3.
5. Вавилов Н.А., Дыбкова Е.В. О подгруппах симплектической группы, содержащих группу диагональных матриц. I,II// Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР. 1980. Т.103. С.31-47; 1983. Т.132. С.44-56.
6. Койбаев В.А. Подгруппы специальной линейной группы над полем из пяти элементов, содержащие группу диагональных матриц//9-й Всесоюзн.симп.по теории групп.Тезисы докл.М.1984.
7. Койбаев В.А. Промежуточные подгруппы в специальной линейной группе порядка 6 над полем из четырех элементов//10-й Всесоюзн.симп.по теории групп.Тезисы докл.Минск,1986.С.115.
8. Хамдан И. О подгруппах специальной линейной группы над кольцом дискретного нормирования//XIX Всесоюзн.алгебр.конф. Тезисы сообщ. Ч.I. Львов, 1987. С.298.
9. Артин Э. Геометрическая алгебра. М: Наука, 1969. 283с.
10. Seitz G.M. Subgroups of finite groups of Lie type // J.Algebra. 1979. Vol.61, N 1, P.16-27.