УДК 517.958

О ПРИМЕНЕНИИ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ

Л.И. СЕРБИНА

ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»
355029, г. Ставрополь, ул. Ленина, 417-а
E-mail: mail@sspi.ru

В рамках развития методов математического моделирования нелинейных особенностей динамики грунтовых вод в пористых средах со сложной структурой порового пространства рассмотрен вопрос аппроксимации нелинейного эволюционного уравнения фильтрации нагруженным уравнением, учитывающего взаимосвязь между геометрическими и динамическими характеристиками природной системы.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, аппроксимация, фрактальная структура, нагруженное уравнение, нелокальное условие, краевая задача.

Методы математического моделирования нелинейных динамических процессов фильтрации в природных средах имеют исключительно важное значение при разработке методов оценки и принятия решений оптимального управления режимом грунтовых вод.

Многие важные достижения теории моделирования нелинейной фильтрации в своей основной, ставшей уже классической, части основаны на линейных представлениях, которые в математическом отношении сводятся к изучению математических моделей, в основе которых лежат линейные дифференциальные уравнения или линейные уравнения с нелинейными граничными условиями. В ряде случаев решения практических задач указанный подход дает достаточную степень точности и находит широкое применение. Однако, как показывают результаты комплексных экспериментально-теоретических исследований, во многих случаях это приводит к утрате значительной части весьма важной информации о нелинейных свойствах потока грунтовых вод со сложной пространственно-временной структурой.

Одним из эффективных методов исследования процессов нестационарной фильтрации, существенно расширяющих возможности качественного понимания, и методов количественной характеристики нелинейных особенностей их протекания в реологических сложных средах являются методы математического моделирования, основанные на применении нагруженных уравнений [1]. Уравнения данного типа являются наиболее естественной и более адекватной математической основой для описания фильтрационных аномалий с точки зрения классической теории фильтрации. Однако решение задач подобного класса, с исчерпывающей полнотой раскрывающих внутренние механизмы нелинейных процессов, протекающих в рамках трудно формализуемых объектов и систем, сопряжено с довольно серьезными математическими сложностями, не позволяющими применять непосредственно для их разрешимости известную теорию краевых задач.

В настоящей статье рассматривается возможность применения нагруженных дифференциальных уравнений к моделированию нелинейных особенностей потока грунтовых вод фрактальной структуры, для которого характерно нерегулярное хаотическое изменение динамических переменных в пространстве и во времени.

Основой для математических моделей широкого круга практических задач нелинейной фильтрации при некоторых допущениях [2], главным из которых является предположение о достаточной протяженности водоносных горизонтов, в рамках феноменологического подхода и справедливости полуэмпирического закона Дарси служит следующее нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(h-h_0)\frac{\partial h}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(h-h_0)\frac{\partial h}{\partial \eta}\right]\right\} + b\frac{\partial h}{\partial \xi} + f(h;\xi;\eta;t) \qquad (1)$$

Здесь $h = h\,(\xi;\eta;t)$ описывает свободную поверхность потока грунтовых вод в области Ω евклидовой плоскости точек $(\xi;\eta)$ с абсциссой ξ и ординатой η в момент времени t. Коэффициент $a = \frac{\kappa}{\sigma}M$ – это так называемый коэффициент уровнепроводности, характеризующий степень проницаемости пористой среды, величина b связана с уклоном непроницаемого или слабо проницаемого водоупора подстилающего слоя грунта; $f = f\,(h;\ \xi;\eta;t)$ – функция, учитывающая внешние воздействия на поток грунтовых вод.

Следует отметить, что нелинейность задач для этого класса уравнений, представляющих большой теоретический и практический интерес, в подавляющем большинстве случаев связана с весьма большими и часто неразрешимыми математическим трудностями. Для решения конкретных задач уравнение (1) стараются линеаризовать часто недостаточно обоснованными физически способами.

Так, один из наиболее эффективных практических методов поиска точного численного аналитического решения нелинейного уравнения (1) состоит в замене в нем величины $(h - h_0)$, характеризующей проводимость пористой среды, некоторым средним значением M, что приводит его к квазилинейному дифференциальному уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + b\frac{\partial h}{\partial \xi} + f(h;\xi;\eta;t) \qquad (2)$$

Решение так называемых обобщенных плановых задач [2] для линеаризованного уравнения (2) в частном случае, когда функция $f\,(h;\ \xi;\eta;t)$ является линейной, и при линейных граничных условиях находят известными методами теории линейных краевых задач. В принципе, относительно нетрудно, применяя интегральные преобразования, в особенности метод Лапласа, а при более сложных граничных условиях используя приближенные численные методы, получить некоторые, вполне содержательные частные их решения.

Однако следует отметить, что описанный подход математического моделирования, в основе которого положена гипотеза о линейном характере зависимости между скоростью течения и градиентом давления в потоке жидкости, может применяться лишь для ограниченных временных интервалов и в области малых значений вынуждающей силы, что существенно снижает его практическую ценность при исследовании фильтрационных аномальных явлений. Поэтому в последнее время все больше внимания уделяется исследованию нелинейных свойств самого модельного уравнения (1) и определению погрешностей при его линеаризации.

Представляется весьма важным поиск математических методов аппроксимации уравнения (1) нагруженными дифференциальными уравнениями, позволяющих глубже понять взаимосвязь между геометрическими и динамическими характеристиками природной системы, подчиненных общим идеям фрактальной геометрии.

Рассмотрим неустановившееся одномерное движение грунтовых вод, которое при определенной схематизации описывается нелинейным дифференциальным уравнением Буссинеска:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left[h\frac{\partial h}{\partial \xi}\right] + f\,(h;\xi;t). \qquad (3)$$

Здесь $h = h(\xi; t)$ – уровень грунтовых вод в точке $\xi \geq 0$ в момент времени t.

Пусть $f(\xi; h; t)$ – непрерывно дифференцируемая по времени функция и $h(\xi; t)$ – любое решение уравнения (3), которое дважды непрерывно дифференцируется по t. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(h\frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4}$$

При решении проблемы долгосрочного прогноза динамики грунтовых вод на больших территориях весьма часто изменение уровня $h(\xi,t)$ грунтовых вод подчиняется следующему степенному закону:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^b h(\xi; t)d\,\xi = ct^m\,, \tag{5}$$

где b, c и m – неотрицательные величины, характеризующие фрактальную пространственно-временную структуру фильтрационного потока.

Заменим в уравнении (4) сомножитель $\frac{\partial h}{\partial t}$ его средним значением

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{1}{b}\int_0^b \frac{\partial h(\xi; t)}{\partial t}d\xi.$$

Тогда согласно (5) можно записать приближенное соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{c}{b}t^m. \tag{6}$$

С учетом (6) нелинейное уравнение (4) аппроксимируется уравнением вида

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \approx \frac{ac}{b}t^m\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7}$$

Уравнение (7) заменой переменных

$$x = \sqrt{\frac{b}{ac}}\xi\,, \quad u(x,t) = h\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}x, t\right), \quad F(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}f\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}x, t\right)$$

сводится к дифференциальному уравнению

$$t^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(x;t), \qquad x \geq 0. \tag{8}$$

Отметим, что условие (5) является нелокальным условием типа условия Самарского [3], и его для уравнения (8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^d u(x,t)dx = \lambda ct^m, \tag{9}$$

где $d = b\sqrt{\frac{ac}{b}}, \lambda = \sqrt{\frac{b}{ac}}$.

Пусть уровень грунтовой воды в начальный момент меняется по закону

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad x \geq 0, \tag{10}$$

где $\tau(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ и дважды непрерывно дифференцируема при $x > 0$.

Условие (9) вследствие (10) принимает вид

$$\int_0^d u(x,t)dt = \frac{\lambda c}{m+1}t^{m+1} + \int_0^d \tau(x)dx. \tag{11}$$

В качестве второго начального условия можно взять условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{12}$$

которое при *m≠0* находится в согласии со степенным законом (9).

В случае, когда внешнее воздействие на поток во времени не меняется (или меняется слабо), можно положить *F(x,t)=0,* и тогда модельное уравнение (8) переходит в уравнение вида

$$t^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{13}$$

известное в теории уравнений смешанного типа как уравнение Геллерстедта.

Исходящая из точки $x = 0$ в момент времени $t = 0$ характеристика уравнения (13) имеет вид

$$x - \frac{2}{m+2}t^{\frac{m+2}{2}} = 0. \tag{14}$$

Уравнение (13) при $m = 0$ совпадает с одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{15}$$

а характеристика (14) совпадает с биссектрисой

$$x - t = 0 \tag{16}$$

первого координатного угла $x \geq 0,\ \ t \geq 0$.

Если *m=0*, то условие (11) целесообразно заменить физически обоснованным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \approx \frac{1}{d}\int_0^d u_t(x,t)dx - \frac{\lambda c}{d},$$

то есть предположением, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \approx \frac{1}{a}. \tag{17}$$

Решение уравнения (15), удовлетворяющее начальным условиям (10), (17) при *x ≥ 0* задается формулой

$$u(x,t) = \frac{\tau(x+t)+\tau(x-t)}{2} + \frac{t}{a}, \qquad x \geq t. \tag{18}$$

Пусть $\varphi(t)$ – след искомого решения $u(x,t)$ в точке *x=0*:

$$u(x,t) = \varphi(t),\ \ \varphi(0) = \tau(0). \tag{19}$$

Тогда любое решение $u(x,t)$ уравнения (15), удовлетворяющее условиям (10), (17) и (19), при $x \le t$ определяется формулой

$$u(x,t) = \varphi(t-x) + \frac{\tau(x+t)+\tau(x-t)}{2} + \frac{x}{a}. \tag{20}$$

Для того чтобы найти $\varphi(t)$ для всех *t*, достаточно воспользоваться условием

$$\int_0^d u(x,t)dx = \lambda c + \int_0^d \tau(x)dx, \tag{21}$$

которое получается из (11) при $m = 0$.

Действительно, в силу (16), (17) и (19) имеем

$$\int_0^d u(x,t)dx = \int_0^t u(x,t)dx + \int_t^d u(x,t)dx = \int_0^t \varphi(t-x)dx +$$
$$\int_0^t \frac{\tau(x+t)-\tau(x-t)}{2}dx + \frac{t^2}{2a} + \int_t^d \frac{\tau(x+t)-\tau(x-t)}{2}dx + \frac{t(d-t)}{a} = \lambda c + \int_0^d \tau(x)dx.$$

Стало быть,

$$\int_0^t \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \Psi(t), \tag{22}$$

где

$$2\Psi(t) = 2\lambda c - \int_t^{d+t} \tau(\eta)d\eta + \int_0^t \tau(\xi)d\xi -$$
$$\int_0^{d-t} \tau(\xi)d\xi + \int_t^{d-t} \tau(x)dx + \frac{2(t-d)}{a}.$$

Очевидно, что

$$2\Psi(t) = \tau(d-t) - \tau(d+t) + \frac{2(t-d)}{a}.$$

Поэтому из (22) непосредственным дифференцированием получаем

$$\varphi(x,t) = \frac{\tau(d-t)+\tau(d+t)}{2} + \frac{t-d}{a}. \tag{23}$$

Подставим значение $\varphi(t)$ из (23) в (18). Тогда будем иметь

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tau(d+x-t) - \tau(d+t-x) + \tau(x+t) - \tau(t-x)]$$
$$+ \frac{2(t-d)}{a}, \qquad \forall\, x \le t.$$

Аналогично исследуется вопрос однозначной разрешимости задачи (9), (10), (12) при $m \neq 0$. Решение в области, ограниченной характеристикой (14), и при $t=0$ определяется формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{B(\beta,\beta)} \int_0^1 \tau\left(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi - 1)\right)[\xi(1-\xi)]^{\beta-1}\, d\xi,$$

где $B(\beta,\beta) = \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad \beta = \frac{m}{2m+4}.$

Полученные аналитические решения могут служить теоретической основой при исследовании аномальных явлений потока грунтовых вод, обладающих фрактальной пространственно-временной структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012. 231 с.
2. *Полубаринова-Кочина Т.Я.* Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977. 64 с.
3. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

ON USAGE OF THE LOADED EQUATIONS IN MODELING OF FILTRATIONAL ANOMALIES

L.I. SERBINA

SBEIHE "Stavropol State Pedagogical Institute”
355029 g Stavropol, Lenin St., 417 A
E-mail: mail@sspi.ru

As part of the development of mathematical methods modeling of nonlinear features of groundwater dynamics in porous media with a complex structure of the pore space the problem of approximation of the nonlinear evolution equation of filtration by the loaded equation is studied, taking into account the relationship between the geometric and dynamic characteristics of the natural system.

Keywords: nonlinear equation, approximation, fractal structure, loaded equation, nonlocal condition, boundary value problem.

Работа поступила 11.09.2018 г.