



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Хавинсон, Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций,

Матем. заметки, 1969, том 6, выпуск 5, 619–625

<https://www.mathnet.ru/mzm6970>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 апреля 2025 г., 07:28:38



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 [1969], 619—625

УДК 517.5

ДОПУСТИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ ПРИ РАВНОМЕРНОЙ АПРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Я. Хавинсон

Известные аппроксимационные теоремы Вейерштрасса и Лаврентьева дополняются указанием допустимых ограничений на величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов. Библ. 4 назв.

В работе [1] Дж. Стафни доказал следующую теорему, дополняющую классическую теорему Вейерштрасса:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $w(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, — последовательность положительных вещественных чисел, для которой

$$\lim \sqrt[m]{w(m)} = \infty.$$

Для произвольной непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$, $f(0) = 0$, и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен

$$Q(x) = \sum c_m x^m,$$

что

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |c_m| < \varepsilon w(m).$$

В то же время в [1] замечено, что не всякую непрерывную функцию $f(x)$, $f(0) = 0$, можно равномерно аппроксимировать многочленами

$$Q(x) = \sum c_m x^m,$$

для которых

$$|c_m| \leq w(m),$$

если

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{w(m)} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 1 в работе [1] получено из довольно специальных соображений.

Здесь мы докажем более сильное предложение, находящееся в таком же отношении к известной аппроксимационной теореме М. А. Лаврентьева [2], как цитированный результат из [1] относится к теореме Вейерштрасса. Наше доказательство будет основано на некоторых общих фактах функционального анализа и теории функций.

ТЕОРЕМА 2. Пусть K — нигде не плотный компакт в комплексной плоскости, имеющий связное дополнение, и $0 \in K$. Пусть последовательность $w(m)$ положительных чисел, $m = 0, 1, \dots$, удовлетворяет условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{w(m)} = \infty. \quad (1)$$

Для всякой непрерывной на K функции $f(z)$, $f(0) = 0$, и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется многочлен

$$Q(z) = \sum c_m z^m, \text{ для которого}$$

$$\max_{z \in K} |f(z) - Q(z)| < \varepsilon \text{ и } |c_m| < \varepsilon w(m), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Если

$$R = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{w(m)} < +\infty \quad (3)$$

и 0 — предельная точка K , то существует непрерывная на K функция $f(z)$, $f(0) = 0$, такая, что если последовательность многочленов

$$Q_n(z) = \sum c_m^n z^m$$

равномерно на K сходится к $f(z)$, то при всяком $M > 0$ невозможно одновременное выполнение неравенств

$$|c_m^n| \leq M w(m), \quad m = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Доказательство теоремы 2. Мы будем опираться на одну общую теорему, установленную нами в работе [3]. (Цитируем эту теорему в несколько ослабленном варианте, — достаточном для наших целей.)

Пусть E — нормированное пространство и $p(c_0, \dots, c_m, \dots)$ — функция от счетного множества числовых аргументов c_0, \dots, c_m, \dots (вещественных или комплексных — в зависимости от того, каким является E). Предположим, что при любом m функция $p(c_0, \dots, c_m) = p(c_0, \dots, c_m, 0, \dots, 0, \dots)$ является непрерывным, симметричным и выпуклым функционалом в евклидовом пространстве $E_{m+1} = \{(c_0, \dots, c_m)\}$.

В пространстве E выделена некоторая последовательность элементов $\{\varphi_m\}$, $m = 0, 1, \dots$. Нужная нам теорема утверждает:

Для того, чтобы для элемента $\omega \in E$ и произвольного $\varepsilon > 0$ можно было подобрать такие коэффициенты c_0, \dots, c_N (N также зависит от ω и ε), чтобы выполнялись неравенства

$$\|\omega - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j\| < \varepsilon, \quad p(c_0, \dots, c_N) < \varepsilon, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного функционала $l \in E^*$ из выполнения неравенств

$$\left| l \left(\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j \right) \right| \leq p(a_0, \dots, a_m) \quad (6)$$

при всех m и a_0, \dots, a_m следовало бы, что

$$l(\omega) = 0.$$

Пусть у нас $E = C(K)$ — пространство непрерывных на K функций $f(z)$ с обычной нормой

$$\|f\| = \max_{z \in K} |f(z)|. \quad (7)$$

В качестве функции $p(c_0, c_1, \dots, c_m, \dots)$ возьмем такую:

$$p(c_0, \dots, c_m, \dots) = \sup_m \left| \frac{c_m}{w(m)} \right|. \quad (8)$$

Ясно, что при любом m функция

$$p(c_0, \dots, c_m) = p(c_0, \dots, c_m, 0, \dots)$$

является непрерывной на евклидовом пространстве E_{m+1} , выпуклой и симметричной. В качестве последовательности $\{\varphi_j\}$ возьмем последовательность степеней z : $\varphi_j(z) = z^j$, $j = 0, 1, \dots$. Нам нужно установить для функции

$\omega = f(z)$, $f(0) = 0$, возможность неравенств (5) при любом $\varepsilon > 0$. Использование приведенного критерия позволяет доказать теорему 2 с помощью техники, развитой в современных способах доказательства аппроксимационной теоремы Лаврентьева и близких к ней результатов (см. [4], стр. 37—43). Пусть $l(\psi)$ — какой-то линейный функционал над $C(K)$. Он имеет представление

$$l(\psi) = \int_K \psi(z) d\mu, \quad (9)$$

где μ — некоторая комплексная бэровская мера на K . Предположим выполненным условие (6). Тогда, в частности, получим

$$|l(z^m)| \leq 1/w(m), \quad m = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Рассмотрим функцию

$$\alpha(t) = \int_K \frac{d\mu(z)}{t-z}. \quad (11)$$

Интеграл, задающий функцию $\alpha(t)$, абсолютно сходится для почти всех (относительно плоской меры) значений t , и, значит, функция $\alpha(t)$ определена для почти всех значений t (см. [4], стр. 39). Вне K функция $\alpha(t)$ является аналитической.

Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $t = \infty$:

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{-k}. \quad (12)$$

Если взять окружность Γ с центром в нуле, содержащую K внутри себя, и воспользоваться интегральной формулой Коши, то будем иметь:

$$\begin{aligned} l(z^m) &= \int_K z^m d\mu = \int_K d\mu \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^m dt}{t-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^m dt \int_K \frac{d\mu(z)}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \alpha(t) t^m dt = \alpha_{m+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Неравенство (10) вместе с условием (1) влечет сходимость ряда (12) всюду, кроме точки $t = 0$. Сумму ряда (12) будем обозначать $\alpha_1(t)$. Вне K будет равенство $\alpha(t) = \alpha_1(t)$, но оно а priori могло бы не иметь места на K . Допустим сперва, что $\alpha(t) = \alpha_1(t)$ почти везде на K , а значит, и почти везде на плоскости. Возьмем малую окружность γ

с центром в нуле. Будем иметь:

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\alpha_1(z) dz}{t-z} = \alpha(t) \quad (14)$$

Зададим на $K \cup \gamma$ меру $\nu(e)$ бэровских множеств e с помощью равенства

$$\nu(e) = \mu(e \cap K) - \frac{1}{2\pi i} \int_{e \cap \gamma} \alpha_1(t) dt. \quad (15)$$

Тогда из (14) и (11) следует, что

$$\int_{K \cup \gamma} \frac{d\nu(z)}{t-z} = 0 \text{ почти везде во внешности } \gamma. \quad (16)$$

Рассуждая так же, как это сделано при доказательстве леммы 7.5 на стр. 39 статьи [4], убедимся в том, что для любого множества $e \subset K$, лежащего во внешности γ , должно быть $\nu(e) = 0$. Но для таких множеств $\nu(e) = \mu(e)$ и, следовательно, $\mu(e) = 0$. Так как γ имеет произвольно малый радиус, то мера μ может быть сосредоточена в единственной точке 0. Но для всякой функции $\omega = f(z)$, для которой $f(0) = 0$, будет тогда

$$\int_K f d\mu = 0,$$

и теорема доказана.

Допустим теперь, что равенство $\alpha_1(t) = \alpha(t)$ не имеет места почти везде на K . Тогда найдется точка $t_0 \in K$, $t_0 \neq 0$, в которой интеграл

$$\int_K \frac{d|\mu(z)|}{|t_0 - z|} \quad (17)$$

сходится и

$$\alpha_1(t_0) \neq \alpha(t_0). \quad (18)$$

В силу сходимости интеграла (17) мера точки t_0 : $\mu\{t_0\} = 0$. Рассмотрим малую окружность γ с центром в нуле, и пусть d — замкнутый круг с границей γ . Возьмем компакт $K_1 = d \cup K$, и пусть Ω_∞ — та из дополнительных к нему областей, которая содержит ∞ , а $\partial\Omega_\infty$ — граница Ω_∞ . При достаточно малом радиусе γ мы добьемся того, что точка t_0 будет лежать на $\partial\Omega_\infty$.

Повторяя для произвольного многочлена $Q(z)$ выкладку (13), придем к равенству

$$\int_K Q(z) d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q(t) \alpha(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q(t) \alpha_1(t) dt. \quad (19)$$

Если ввести меру ν равенством (15), то соотношение (19) означает ортогональность меры ν к любому многочлену $Q(z)$. Так как $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ тоже многочлен, то из этой ортогональности следует, что

$$\int_{K_1} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} d\nu(t) = 0,$$

или

$$\int_{K_1} \frac{Q(t) d\nu(t)}{t - t_0} = Q(t_0) \int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t - t_0}, \quad (20)$$

причем интегралы сходятся абсолютно. Пусть $P(K_1)$ — алгебра всех непрерывных на компакте K_1 функций, являющихся равномерными пределами многочленов. Для любой функции $g(t) \in P(K_1)$ будем иметь

$$\int_{K_1} \frac{g(t) d\nu(t)}{t - t_0} = g(t_0) \int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t - t_0}. \quad (21)$$

Сужение $P(K_1)$ на $\partial\Omega_\infty$: алгебра $P(\partial\Omega_\infty)$ есть алгебра Дирихле. Минимальная граница $P(\partial\Omega_\infty)$ совпадает с $\partial\Omega_\infty$, и так как $t_0 \in \partial\Omega_\infty$, то существует функция $g(t) \in P(\partial\Omega_\infty)$ такая, что $g(t_0) = 1$, $|g'(t)| < 1$, $t \neq t_0$, $t \in \partial\Omega_\infty$ (относительно всех этих сведений см. [4], §§ 5—7, стр. 30—43). В силу принципа максимума можно считать, что $g(t)$ продолжена на K_1 и там имеет место неравенство $|g(t)| < 1$, $t \neq t_0$. Применяя (21) к функциям $\{g^k(t)\}$, получим

$$\int_{K_1} \frac{g^k(t) d\nu(t)}{t - t_0} = \int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t - t_0}.$$

Последовательность $\{g^k(t)\}$ сходится на K_1 к нулю всюду, кроме точки t_0 , и, следовательно, эта последовательность сходится к нулю почти везде к ν (ведь $\nu\{t_0\} = \mu\{t_0\} = 0$). Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$\int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t - t_0} = 0.$$

Но

$$\int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t - t_0} = \alpha(t_0) - \alpha_1(t_0) \neq 0$$

по предположению.

Полученное противоречие полностью доказывает первую часть теоремы.

Рассмотрим вторую часть. Пусть выполнено (3) и для многочленов

$$Q_n(z) = \sum_1 C_m^n z^m$$

выполняются неравенства (4) с некоторым $M > 0$. Последнее неравенство приводит к такому:

$$|c_m^n| \leq CM(2R)^m \quad (22)$$

с подходящим $C > 0$. Но тогда в круге $|z| < 1/4R$ будем иметь неравенство

$$|Q_n(z)| \leq 2MC.$$

Если последовательность $Q_n(z)$ сходится на множестве K к некоторой функции $f(z)$, а в круге $|z| < 1/4R$ расположено бесконечное множество точек из K , то по теореме Витали последовательность $Q_n(z)$ равномерно сходится во всем круге $|z| < 1/4R$. Таким образом, в этом круге $f(z)$ будет сужением на K аналитической в круге функции. Но если взять функцию

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{|z|}\right), \quad z \in K,$$

то она, как легко видеть, не может быть сужением на K никакой аналитической в окрестности нуля функции.

Теорема 2 доказана.

Московский инженерно-
строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
19.XI.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] St a f n e y James D., A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to C [0, 1], Duke Math. J., 34, № 3 (1967), 393—396.
- [2] Л а в р е н т ь е в М. А., Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes, P., 1936.
- [3] Х а в и н с о н С. Я., Некоторые вопросы полноты систем, Докл. АН СССР, 137, № 4 (1964), 793—796.
- [4] В е р м е р Дж., Банаховы алгебры и аналитические функции, В сб. «Некоторые вопросы теории приближений», М., 1963.