



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. L. Daletskii, Integration and differentiation of functions of Hermitian operators depending on a parameter, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, Volume 12, Issue 1, 182–186

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

February 17, 2025, 23:17:13



Здесь $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q - 1$ — индексы, задающие представление, а символ $|\delta^{k_1}, \dots, \delta^{k_p}|$ обозначает определитель

$$|\delta^{k_1}, \dots, \delta^{k_p}| = \begin{vmatrix} \delta_1^{k_1} & \dots & \delta_p^{k_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1^{k_p} & \dots & \delta_p^{k_p} \end{vmatrix}.$$

След $S(T_q)$ для $g \in G_{p,q}$ можно теперь определить как предельное значение $S(T_{g'})$ для $g' \in \mathcal{X}$ при $g' \rightarrow g$.

Оказывается, что для следа $S(T_x)$ оператора $T_x = \int x(g) T_g dg$, который, как показал Хариш-Чандра [3], существует в обычном смысле, справедлива формула $S(T_x) = \int x(g) S(T_g) dg$.

4. Помимо дискретных, группа $G_{p,q}$ обладает еще q основными унитарными сериями представлений. Последние реализуются в пространствах функций, аналитических лишь по части переменных. Эти серии были описаны в [2]. Следы представлений этих серий вычисляются путем комбинирования изложенного выше метода вычисления следов дискретных серий с методами, применяемыми при вычислении следов представлений классических групп.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Унитарные представления вещественной унимодулярной группы, Изв. АН, серия матем, **17** (1953), 189—248.
- [2] М. И. Граев, Основные серии унитарных представлений вещественных форм комплексной унимодулярной группы, ДАН **98** (1954), 517—520.
- [3] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie group. III, Trans. Am. Math. Soc. **76**, № 2 (1954).
- [4] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **36** (1950), 1—288.
- [5] М. И. Граев, Об одном общем методе вычисления следов бесконечномерных унитарных представлений вещественных простых групп Ли, ДАН **103** (1955), 357—360.
- [6] И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Об одном общем методе разложения регулярного представления группы Ли на неприводимые представления, ДАН **92** (1953) 221—224.
- [7] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. **48** (1947), 568—640.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Ю. Л. Далецкий

В настоящем сообщении излагаются результаты, полученные С. Г. Крейном и автором [1] и развитые далее автором.

1. Пусть $H(\tau)$ — эрмитова матрица, элементы которой непрерывно дифференцируемы по параметру τ . Если $H(\tau) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\tau) E_k(\tau)$ — спектральное

разложение $H(\tau)$, а $f(\lambda)$ — числовая функция, то, как обычно,

$$f(H(\tau)) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k(\tau)) E_k(\tau).$$

Имеет место формула

$$\frac{df(H(\tau))}{d\tau} = \sum_{i,k=1}^n \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} E_i \frac{dH}{d\tau} E_k \quad (1)$$

при условии, что $f'(\lambda)$ непрерывна в окрестности точек $\lambda_k(\tau)$. Эта формула без изменений переносится на случай, когда $H(\tau)$ — оператор с дискретным спектром, а $\frac{dH}{d\tau}$ имеет конечную абсолютную норму. Можно обобщить ее и на случай неэрмитовых матриц.

2. Пусть $H(\tau)$ — эрмитов ограниченный оператор в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , обладающий при $A \leq \tau \leq B$ непрерывной по τ в смысле нормы операторов производной $\frac{dH}{d\tau}$. Естественно искать обобщение формулы (1) в виде

$$\frac{df(H(\tau))}{d\tau} = \int_S \left[\int_S \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda(\tau) \frac{dH}{d\tau} \right] dE_\mu(\tau), \quad (2)$$

где S — спектр оператора H , а E_λ — соответствующее ему разложение единицы.

При обосновании этой формулы появляются трудности, связанные с выяснением смысла правой части, имеющей вид

$$\int_S F(\mu) dE_\mu(\tau), \quad (3)$$

где $F(\mu)$ — оператор, не коммутирующий, вообще говоря, с E_μ .

Можно показать, что интеграл (3), понимаемый как равномерный предел соответствующих интегральных сумм, существует, если оператор $F(\mu)$ обладает интегрируемой по Бохнеру производной.

После этого справедливость формулы (2) устанавливается для случая, когда $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция, вторая производная которой по λ непрерывна на некотором сегменте $[a, b]$, содержащем спектр оператора $H(\tau)$ при $\tau \in [A, B]$.

При этом справедлива оценка

$$\left\| \frac{df(H(\tau))}{d\tau} \right\| \leq \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\| \left[\max_{\lambda} |f'(\lambda)| + \frac{b-a}{2} \max_{\lambda} |f''(\lambda)| \right]. \quad (4)$$

В некоторых случаях удобнее оценка

$$\left\| \frac{df(H(\tau))}{d\tau} \right\| \leq \left[|f'(a)| + (b-a) |f''(a)| + \int_a^b (b-\lambda) |f'''(\lambda)| d\lambda \right] \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\|, \quad (5)$$

для справедливости которой требуется абсолютная интегрируемость $f'''(\lambda)$ ($f(\lambda)$ здесь вещественнозначна).

3. Формула (2) сохраняется и при дифференцировании выражений типа

$$\int F(\lambda) dE_{\lambda}(\tau),$$

где $F(\lambda)$ — операторная функция. Пользуясь этим, можно найти выражения и для производных высшего порядка функции $f(H(\tau))$.

Если $f(\lambda)$ обладает непрерывной производной $f^{(2n)}(\lambda)$ и оператор $\frac{d^n H}{d\tau^n}$ непрерывен по норме, то

$$\frac{d^n f(H(\tau))}{d\tau^n} = n! \int \dots \int_{n+1} \Delta^{(n)}(f; \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) dE_{\lambda_1} \frac{dH}{d\tau} dE_{\lambda_2} \frac{dH}{d\tau} \dots dE_{\lambda_{n+1}} + \dots, \quad (6)$$

где $\Delta^{(n)}(f; \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ есть разделенная разность функции $f(\lambda)$ порядка n , взятая в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$.

Невыписанные слагаемые содержат интегралы более низкого порядка и производные $\frac{d^k H}{d\tau^k}$ ($k > 1$).

Если $H(\tau)$ линейно зависит от параметра $H(\tau) = H_0 + \tau H_1$, то в формуле (6) остается лишь первое слагаемое. В этом случае можно указать простые оценки типа (4), (5). Например,

$$\left\| \frac{d^n f(H(\tau))}{d\tau^n} \right\| \leq \left[\sum_{j=n}^{2n} \frac{|f^{(j)}(a)|}{(j-n)!} (b-a)^{j-n} + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-\lambda)^n |f^{(2n+1)}(\lambda)| d\lambda \right] \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\|^n. \quad (7)$$

4. Приведенные результаты можно обобщить при некоторых предположениях на случай, когда $H(\tau)$ — неограниченный самосопряженный оператор с областью определения, не зависящей от τ .

Если спектр $H(\tau)$ имеет люк, то при этом можно воспользоваться дробно-линейным преобразованием, приводящим к ограниченному оператору. Затем рассматривается случай, когда спектр сплошной. Указанные выше формулы остаются справедливыми во всяком случае, если производные $f(\lambda)$ достаточно быстро убывают на бесконечности.

Эти результаты можно уточнить, если, в частности, оператор $H(\tau)$ положителен (вообще полуограничен), а $\frac{dH}{d\tau}$ ограничен.

В случае, когда $H(\tau)$ линейно зависит от τ , а $f(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} \lambda^k |f^{(k+1)}(\lambda)| d\lambda \leq M \quad (k=0, 1, \dots, 2n),$$

имеем:

$$\left\| \frac{d^n f(H(\tau))}{d\tau^n} \right\| \leq \int_0^{\infty} \lambda^n |f^{(2n+1)}(\lambda)| d\lambda. \quad (8)$$

5. Пусть $H(\tau)$ и $f(\lambda)$ удовлетворяют условиям, при которых существуют производные оператора $f(H(\tau))$ до достаточно высокого порядка. Обычным

путем, интегрируя по частям, получим формулу Тейлора

$$f(H(\tau)) = f(H(\tau)) + (t - \tau) \frac{df(H(\tau))}{d\tau} + \dots + \frac{(t - \tau)^n}{n!} \frac{d^n f(H(\tau))}{d\tau^n} + R_n(t, \tau),$$

где

$$R_n(t, \tau) = \frac{1}{n!} \int_{\tau}^t \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(H(x)) (t - x)^n dx. \tag{9}$$

Исходя из (9), можно получать оценки для остаточного члена в конкретных случаях.

В качестве примера можно привести разложение в ряд по степеням параметра

$$e^{-(H_0 + \varepsilon H_1)} = e^{-H_0} + \varepsilon \int_0^{\infty} \int \frac{e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} dE_{\lambda_1} H_1 dE_{\lambda_2} + \dots$$

$$\dots + \varepsilon^n \underbrace{\int \dots \int}_{n+1} \Delta^{(n)}(e^{-\lambda}; \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) dE_{\lambda_1} H_1 \dots dE_{\lambda_{n+1}} + \dots,$$

сходящееся равномерно при тех ε , для которых оператор $H_0 + \varepsilon H_1$ остается положительным. Из этого разложения легко выводятся формулы термодинамической теории возмущений [2].

После некоторого преобразования получим известную формулу, используемую в квантовой электродинамике (см. [3], [4]):

$$e^{-(H_0 + \varepsilon H_1)} = e^{-H_0} - \varepsilon \int_0^1 e^{-H_0(1-s)} H_1 e^{-H_0 s} ds +$$

$$+ \varepsilon^2 \int_0^1 s_1 ds_1 \int_0^1 e^{-H_0(1-s_1)} H_1 e^{-H_0 s_1(1-s_2)} H_1 e^{-H_0 s_1 s_2} ds_2 - \dots$$

Формулы такого рода выводятся обычно различными способами. Приведенные выше соображения дают общий метод получения разложений для операторов вида $f(H_0 + \varepsilon H_1)$.

Заметим, что в обозначениях Фейнмана [4] формула (2) имеет вид

$$\frac{df(H)}{d\tau} = \int_0^1 f' [H_1(1-s) + H_3 s] \left(\frac{dH}{d\tau} \right)_2 ds.$$

6. Приведенные выше результаты позволяют следующим образом трактовать теорию возмущений самосопряженных операторов (см. [5]). Оператор ортогонального проектирования на некоторое инвариантное подпространство оператора $H(t)$ может быть представлен в виде функции $f(H(t))$, где $f(\lambda)$ — числовая функция, равная единице на соответствующей этому подпространству части спектра оператора $H(t)$ и нулю на остальной части спектра. Если при этом обе части спектра замкнуты, то функцию $f(\lambda)$ можно считать дифференцируемой достаточное число раз. Представляя оператор $f(H(t))$ в виде разложения по степеням параметра с помощью формулы Тейлора, мы сможем изучать изменение инвариантного подпространства оператора $H(t)$.

Рассмотрим простейший случай. Пусть $H(\varepsilon) = H_0 + \varepsilon H_1$, где H_0 и H_1 — самосопряженные операторы, возможно и неограниченные, но с общей областью определения. Пусть λ_0 — изолированная точка спектра оператора H_0 . При малом изменении ε та часть $\Lambda_0(\varepsilon)$ спектра $H(\varepsilon)$, в которую перейдет точка λ_0 , будет оставаться в достаточно малой окрестности этой точки. Поэтому, если $f(\lambda)$ равна единице в указанной окрестности λ_0 и нулю в окрестности остальной части спектра, то при достаточно малых ε для оператора ортогонального проектирования на инвариантное подпространство оператора $H(\varepsilon)$, соответствующее части $\Lambda_0(\varepsilon)$ его спектра, получим представление

$$P(\varepsilon) = f(H(\varepsilon)).$$

Так как $f(\lambda)$ имеет производные любого порядка в окрестности спектра S_{H_0} , то можно разложить $P(\varepsilon)$ в формальный ряд

$$P(\varepsilon) = P(0) + \varepsilon \int \int \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda H_1 dE_\mu + \dots \quad (10)$$

Отсюда легко получаются известные формулы, применяемые в квантовой механике.

В случае, когда H_0 — положительный оператор, а H_1 ограничен, для остаточного члена разложения (10) можно получить оценку

$$\|R_{n-1}(\varepsilon)\| \leq 2 \left[\frac{64(\lambda_0 + l)\varepsilon \|H_1\|}{l^2(1-2\alpha)^2} \right]^n,$$

справедливую при условии $\varepsilon \|H_1\| \leq \alpha l$ (l — число, не большее расстояния от λ_0 до ее дополнения в спектре, и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$).

Между прочим, из этой оценки легко вытекают известные результаты Реллиха относительно аналитичности собственных векторов.

7. Формулы дифференцирования могут быть применены к исследованию операторно-монотонных функций и их обобщений (см. [6], [7]) (на этот факт нам указал М. Г. Крейн).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю. Л. Далецкий и С. Г. Крейн, Формулы дифференцирования по параметру функций эрмитовых операторов, ДАН 76, 1 (1951).
- [2] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1951, 112—115.
- [3] И. Швингер, О калибровочной инвариантности и поляризации вакуума сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики» (1954), 272.
- [4] Р. П. Фейнман, Операторное исчисление, имеющее приложения в квантовой электродинамике; сб. «Проблемы современной физики», 3 (1955), 41.
- [5] Ю. Л. Далецкий, Про оцінку залишкового члену у формулі Тейлора для функцій ермітових операторів, ДАН УРСР 4 (1951).
- [6] F. Kraus, Ueber konvexe Matrixfunktionen, Math. Zeitschr. 41 (1936), 18—42;
- [7] K. Löwner, Ueber montone Matrixfunktionen, Math. Zeitschr. 38 (1933), 177—216.