В. Л. Попов, Структура замыканий орбит в пространствах конечномерных линейных представлений группы $SL(2)$, *Матем. заметки*, 1974, том 16, выпуск 6, 943–950

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 16, № 6 (1974), 943—950

УДК 519.4

СТРУКТУРА ЗАМЫКАНИЙ ОРБИТ В ПРОСТРАНСТВАХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL(2)$

В. Л. Попов

В терминах некоторых целочисленных инвариантов описывается орбитальное разложение замыкания произвольной орбиты в пространстве конечномерного линейного представления группы SL (2). Основное поле является алгебраически замкнутым и имеет нулевую характеристику. Библ. 9 назв.

Зафиксируем в качестве основного поля некоторое алгебраически замкнутое поле k характеристики нуль. Пусть $G = SL$ (2) и $G : V$ — конечномерное рациональное линейное представление группы G в векторном пространстве V.

В случае, когда указанное представление *неприводимо*, в заметке [1] была решена следующая задача:

1°. Описаны все такие точки $v \in V$, для которых орбита $G(v)$ незамкнута в V;

2°. Для каждой такой точки указаны все орбиты в многообразии $\overline{G(v)}$ (чертой обозначается замыкание множества в пространстве V).

Здесь мы решаем эту задачу для *произвольного* представления.

Прежде чем переходить к формулировке основного результата, сделаем несколько напоминаний, а также введем необходимые обозначения; см. [1] — [3].

Неприводимые представления G классифицируются целыми неотрицательными числами (числовыми отметками). G-модуль S_n, отвечающий числовой отметке n, может быть получен так: пространством представления является векторное пространство бинарных форм степени n от переменных x и y, а действие определено формулой (линейная замена переменных):

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{n-i} y^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (ax + cy)^{n-i} (bx + dy)^i. \qquad (1)$$

Всякое конечномерное рациональное линейное представление $G : V$ вполне приводимо. Пусть

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} S_{n_i} \qquad (2)$$

— разложение на неприводимые. В соответствии с (2) мы будем записывать точку $v \in V$ в виде

$$v = v_1 \oplus \ldots \oplus v_r, \qquad (3)$$

где $v_i \in S_{n_i}$ $\forall i$.

Ясно, что поставленную задачу достаточно решить для того случая, когда в V не содержится неподвижных ненулевых векторов. Поэтому мы будем считать, что

$$n_i \geqslant 1 \ \forall i. \qquad (4)$$

Условимся также считать подпространства S_{n_i} упорядоченным таким образом, что

$$n_i = 2k_i \text{ при } i \leqslant s \text{ и } n_i = 2k_i + 1 \text{ при } i > s. \qquad (5)$$

Нуль векторного пространства будем обозначать через $\{0\}$.

Кольцо $k[x, y]$ факториально и его однородные простые элементы — это линейные формы. Поэтому каждый элемент из S_n представляется в виде произведения n линейных форм от x и y. В соответствии с этим введем следующие обозначения:

M_i — *максимум кратностей линейных множителей формы* $v_i \neq 0$ (*если* $v_i = 0$, *то положим по определению* $M_i = n_i$);

$$h = \max_{i=1,\ldots,r} \frac{n_i}{M_i};$$

γ — *количество различных, попарно непропорциональных линейных форм* $w \in k[x, y]$, *обладающих следующим свойством: если* v_i — *любая ненулевая форма разложения*

(3), *то w является множителем кратности M_i формы v_i. Если $v = 0$, то положим по определению $\gamma = 0$.*

Числа M_i, h и γ являются инвариантами орбиты $G(v)$ (т. е. не зависят от выбора точки v в этой орбите), поскольку G действует *автоморфизмами* на $k[x, y]$ по правилу (1).

Оказывается, что решение поставленной задачи может быть дано в терминах только двух построенных инвариантов h и γ. Отметим, что они подчиняются естественным ограничениям (вытекающим из определения)

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \min n_i, \tag{6}$$

$$1 \leqslant h \leqslant \max n_i. \tag{7}$$

ТЕОРЕМА. *Орбита любого ненулевого вектора $v \in V$ двумерна или трехмерна и при этом:*

1°. *Орбита $G(v)$ будет двумерна и замкнута тогда и только тогда, когда $\gamma = 2$ и $h = 2$. В этом случае $G(v)$ обязательно содержит вектор вида $\alpha_1 x^{k_1} y^{k_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\}$, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$.*

2°. *Орбита $G(v)$ будет двумерна и незамкнута тогда и только тогда, когда $\gamma = 1$ и $h = 1$. В этом случае в ее замыкании лежит, кроме $G(v)$, только нуль пространства V, а в $G(v)$ обязательно найдется вектор вида $\alpha_1 x^{n_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_r x^{n_r}$, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$.*

3°. *Орбита $G(v)$ будет трехмерна и незамкнута тогда и только тогда, когда $\gamma = 1$ и $1 < h \leqslant 2$. При этом возможны два случая:*

а) *если $\gamma = 1$ и $h = 2$, то в $\overline{G(v)}$, помимо самой $G(v)$, лежит еще некоторая замкнутая двумерная орбита $G(w)$, где $w = \alpha_1 x^{k_1} y^{k_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\}$, а $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $k_i = M_i$;*

б) *если $\gamma = 1$ и $1 < h < 2$, то в $\overline{G(v)}$, помимо самой $G(v)$, лежит еще нуль пространства V, а также некоторая незамкнутая двумерная орбита $G(w)$, где $w = \alpha_1 x^{n_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_r x^{n_r}$, а $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{n_i}{M_i} < h$.*

4°. *Во всех остальных случаях $G(v)$ замкнута и трехмерна.*

З а м е ч а н и е. Способ вычисления чисел α_j в пп. 1° — 3° по коэффициентам форм v_i будет указан в доказательстве теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякая двумерная алгебраическая подгруппа в SL (2) является борелевской подгруппой и потому у SL (2) нет одномерных аффинных однородных многообразий. Значит, всякая орбита G в V, кроме нуля, либо двумерна, либо трехмерна (см. (4)). Если такая орбита $G(v)$ незамкнута, то $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ — это инвариантное замкнутое подмножество в V, [3].

1°. Пусть $\overline{G(v)} = G(v)$ и $\dim G(v) = 2$. Тогда $G(v)$ — аффинное многообразие, а потому G_v (стационарная подгруппа точки v) является одномерной редуктивной подгруппой в G (см. [4]) и, следовательно, G_v^0 (связная компонента единицы группы G_v) — это максимальный тор в G. Значит, в $G(v)$ найдется вектор нулевого веса относительно тора $T = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix};\ t \in k^*\right\}$, т. е. вектор вида $\alpha_1 x^{k_1} y^{k_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\}$, где $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $v_i = 0$ (следует учесть, что при $i > s$ в S_{n_i} нет векторов нулевого веса, см. [2]). Значит, в этом случае $\gamma = h = 2$.

Наоборот, пусть $\gamma = h = 2$. Ясно, что $v \neq 0$. Так как $\gamma = 2$, то имеются две непропорциональные линейные формы w_1 и $w_2 \in k[x, y]$, обладающие следующим свойством: если v_i — любая ненулевая форма в разложении (3), то w_1 и w_2 являются множителями кратности M_i формы v_i. Осуществляя замену точки v на точку $g(v)$ для подходящего $g \in G$, можно считать, что $w_1 = x$ и $w_2 = y$, так что для любого i будет $v_i = x^{M_i} y^{M_i} u_i$, где u_i — некоторая форма из $k[x, y]$. Но $h = 2$, а потому при всех i будет $2M_i \geqslant n_i$. Это означает, что $u_i = \alpha_i \in k$ при всех i, причем $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда либо $i > s$, либо $v_i = 0$. Значит, либо $G_v = T$, либо $G_v = N(T) = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0\end{pmatrix};\ t \in k^*\right\}$. Следовательно, G_v — редуктивная группа, $G(v)$ — аффинное многообразие [4] и $\dim G(v) = 2$. Но если бы $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ было не пусто, оно, в силу аффинности $G(v)$, должно было бы быть инвариантной аффинной кривой (см. [5]), а это бы означало, что в V содержатся ненулевые неподвижные векторы, что противоречит (4). Значит, $\overline{G(v)} = G(v)$.

2°. Пусть теперь $G(v)$ незамкнута и $\dim G(v) = 2$. То же рассуждение, что и в п. 1°, показывает, что $G(v)$ не может быть аффинным многообразием и что $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ — это в точности нуль пространства V. Подгруппа G_v, стало быть, одномерна и нередуктивна [4]. Следовательно, G_v^0 — это максимальная унипотентная подгруппа в G; заменяя v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, мы можем считать, что $G_v^0 = N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ t \in k\right\}$. Зафиксировав борелевскую подгруппу $B = TN$ и максимальный тор T, получим, что v — это сумма старших весовых векторов тора T, т. е. $v = \alpha_1 x^{n_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_r x^{n_r}$, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$. Значит, $\gamma = h = 1$.

Наоборот, пусть $\gamma = h = 1$. Ясно, что $v \neq 0$. Так как $\gamma = 1$, то существует линейная форма $w \in k[x, y]$, обладающая свойством: если v_i — любая ненулевая форма в разложении (3), то w является множителем кратности M_i формы v_i. Осуществляя замену v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, можно считать, что $w = x$ и $v_i = x^{M_i} u_i$, где $u_i \in k[x, y]$. Но $h = 1$ и потому $M_i \geqslant n_i$, откуда следует, что $u_i = \alpha_i \in k$ при всех i, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$. Значит, $G_v^0 = N$ и, следовательно, $\dim G(v) = 2$. Очевидно, орбита $T(v)$ тора T незамкнута и $\overline{T\setminus(v)}\setminus T(v)$ — это нуль пространства V. Следовательно, и $G(v)$ незамкнута.

3°. Пусть $\dim G(v) = 3$ и $G(v)$ незамкнута. Так как $\dim G_v = 0$, то G_v редуктивна, а потому $G(v)$ аффинна [4]. Значит, многообразие $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ двумерно [5].

Как следует из [6], мы можем, заменив v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, считать, что $(\overline{G(v)} \setminus G(v)) \cap \overline{T(v)} \neq \varnothing$. Значит, $\overline{T(v)} \neq T(v)$ и потому в разложении v по весовым векторам тора T присутствуют лишь веса одного знака [7]; мы можем считать, что эти веса неотрицательны, делая замену v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$. Это означает, что всякий ненулевой v_i в разложении (3) имеет вид

$$v_i = \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} x^{n_i - j} y^j, \qquad \text{где } \alpha_{i m_i} \neq 0 \tag{8}$$

и

$$m_i \leqslant \frac{n_i}{2}. \tag{9}$$

Но $n_i - m_i$ — это кратность множителя x формы v_i. Поскольку степень формы v_i равна n_i, а в силу (9), $n_i - m_i \geqslant \frac{n_i}{2}$, то $M_i = n_i - m_i$ и $1 < h \leqslant 2$. Что касается γ, то из оценки на h следует, что $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$. Однако случай $\gamma = 2$ исключен, ибо из условия $\gamma = 2$, неравенства $M_i \geqslant \frac{n_i}{2}$ и определения γ и h вытекает, что $h = 2$, а это, как показано выше, противоречит трехмерности многообразия $G(v)$. Итак, $\gamma = 1$ и $1 < h \leqslant 2$.

Легко видеть, используя (9), что $\overline{T(v)} \setminus T(v) = u$, где

$$u = \alpha_1 x^{k_1} y^{k_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\}, \tag{10}$$

причем $\alpha_i = 0$, если $m_i < k_i$, и $\alpha_i = a_{im}$, если $m_{i_i} = k_i$. Следовательно, если $h = 2$, то $u \neq \{0\}$, а если $h < 2_i$ то $u = \{0\}$.

Таким образом, при $h = 2$ в многообразии $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ содержится двумерная замкнутая (см. п. 1°) орбита $G(u)$. На самом деле $G(u) = \overline{G(v)} \setminus G(v)$. Действительно, если бы имелась точка $z \in \overline{G(v)} \setminus G(v)$, не лежащая в $G(u)$, то два замкнутых инвариантных множества $\overline{G(z)} \subset \overline{G(v)}$ и $G(u) \subset \overline{G(v)}$ не пересекались бы, а потому на $\overline{G(v)}$ нашлась бы регулярная инвариантная непостоянная функция, что, очевидно, невозможно (см. [8]).

Рассмотрим теперь случай, когда $1 < h < 2$. Пусть $\frac{p}{q} = \max\limits_{i=1,\ldots,r} \frac{m_j}{n_i} = 1 - \frac{1}{h}$, где p и q — целые положительные числа. Рассмотрим в группе G кривую $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} t^p & t^{p-q} \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix}; t \in k^* \right\}$, а в $G(v)$ — кривую $\Gamma(v)$. Точка $u = \overline{\Gamma(v)} \setminus \Gamma(v)$ лежит в $\overline{G(v)}$; мы найдем ее разложение по каноническому базису в V. Если $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^p & t^{p-q} \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix}$, то легко видеть, что

$$\gamma(t)(v_i)=\sum_{j=0}^{m_i}\gamma_{ij}(t)\,x^{n_i-j}y^j,\ \text{где}\ \gamma_{ij}(t)=\sum_{k=j}^{m_i}\alpha_{ik}\binom{k}{k-j}t^{p(n_i-2j)-q(k-j)}.$$

Учитывая, что $\frac{p}{q}\geqslant\frac{m_i}{n_i}$, а также что $p<\frac{q}{2}$ (см. (9)), получаем, что в сумме, определяющей $\gamma_{ij}(t)$, все слагаемые содержат t в неотрицательной степени, причем эта степень равна нулю тогда и только тогда, когда $\frac{m_i}{n_i}=\frac{p}{q}$ и $j=0$. Отсюда вытекает, что

$$u=\alpha_1 x^{n_1}\oplus\ldots\oplus\alpha_r x^{n_r},\tag{11}$$

где $\alpha_i=0$ тогда и только тогда, когда $\frac{m_i}{n_i}<\frac{p}{q}$ $\left(\text{т. е. } \frac{n_i}{M_i}<h\right)$ и при $\frac{n_i}{M_i}=h$ будет $\alpha_i=\alpha_{im_i}$.

Как показано выше, $\dim G(u)=2$, а $\overline{G(u)}$ является неприводимым алгебраическим многообразием, содержащим только две орбиты — нуль пространства V и орбиту $G(u)$. Это многообразие лежит в $\overline{G(v)}\setminus G(v)$, а $\overline{G(v)}\setminus G(v)$, как показано в [9], неприводимо. Поэтому

$$\overline{G(u)}=\overline{G(v)}\setminus G(v).$$

Наоборот, пусть теперь $h=2$ и $\gamma=1$. Так как $\gamma=1$, то существует линейная форма $w\in k[x,y]$, обладающая свойством: если v_i — любая ненулевая форма в разложении (3), то w является множителем кратности M_i формы v_i. Осуществляя замену v на $g(v)$ для подходящего $g\in G$, можно считать, что $w=x$. Записывая $v_i\neq 0$ в виде (8) и учитывая, что $h=2$, получаем, что $n_i-m_i\geqslant n_i/2$ (т. е. $m_i\leqslant n_i/2$), причем для некоторых i будет выполнено точное равенство $m_i=n_i/2$. Но тогда непосредственный подсчет показывает, что точка $u=\overline{T(v)}\setminus T(v)$ имеет вид (10). Поскольку для $G(u)$ мы имеем $h=2$ и $\gamma=2$, то точка v не может лежать в $G(u)$, а потому $G(u)\subset\overline{G(v)}\setminus G(v)$. Но $\dim G(u)=2$. Следовательно, $G(v)$ — незамкнутая трехмерная орбита.

Наконец, рассмотрим случай $1<h<2$ и $\gamma=1$. Рассуждая, как и выше, получаем, что можно считать v удовлетворяющим соотношению (8), в котором $m_i<n_i/2$ при всех i. Но тогда, рассматривая, как и выше, кривую Γ, мы получаем, что в $\overline{G(v)}$ содержится точка u вида (11).

Поскольку для $G(u)$ будет $\gamma = 1$ и $h = 1$, то v не может лежать в $G(u)$ и, значит, $G(u) \subset \overline{G(v)} \setminus G(v)$. Но $\dim G(u) = 2$. Следовательно, $G(v)$ — незамкнутая трехмерная орбита. Теорема доказана.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
26.III.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Хаджиев Дж., Описание замкнутых орбит и замыканий незамкнутых орбит в неприводимых представлениях группы Лоренца, Докл. АН СССР, № 12 (1966), 3—6.
[2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., 1964.
[3] Борель А., Линейные алгебраические группы, М., 1972.
[4] Bialynicki — Birula A., On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, Amer. J. Math., **85** (1963)., 572.
[5] Попов В. Л., О стабильности действия алгебраических групп на алгебраических многообразиях, Изв. АН СССР, Сер. матем., **36**, № 2 (1972), 371—385.
[6] Birkes D., Orbits of linear algebraic groups, Ann. Math., **93**, № 3 (1971), 459—475.
[7] Винберг Э. Б., Попов В. Л., Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий, Изв. АН СССР, Сер. матем., **36**, № 2 (1972), 749—763.
[8] Nagata M., Invariants of a group in an affine ring, J. Math. Kyoto Univ., **3** (1963, 1964), 369—377.
[9] Попов В. Л., Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$, Изв. АН СССР, Сер. матем., **37**, № 5 (1973), 792—832.