О. В. Попов, Приложения оценок тригонометрических сумм Г. Вейля с многочленом растущей степени,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 49–53

https://www.mathnet.ru/vmumm2034

Так как $\operatorname{char} k=0$, то $\binom{m}{m-1}=m\neq 0$ в k и поэтому из (7) вытекает, что в $H\otimes H$ элемент $e_1\otimes e_{m-1}=y\otimes y^{m-1}$ является линейной комбинацией векторов $e_s\otimes e_{s'}$, где либо s, либо s' меньше $t+m-1$. Но это невозможно, ибо тензоры $e_q\otimes e_{q'}$, q, $q'=1,\ldots,d$, образуют базис в $H\otimes H$.

Полученное противоречие показывает, что $y(A_r)=0$. Таким образом, в этом случае полагаем $A_{r+1}=A_r=\ldots=A^G$. □

Отметим, что приведенные выше рассуждения близки к используемым в [2, § 5.5, 5.6] и [8, гл. II, § 1]. Итак, справедлива

Теорема 4. *Пусть конечномерная точечная алгебра Хопфа H действует в коммутативной аффинной области A. Тогда расширение A/A^H конечно.*

Доказательство. Пусть

$$A=A_{-1}\supseteq A_0\supseteq\ldots\supseteq A_n$$

— построенная цепь подалгебр. По условию 1 расширение A/A_n конечное. По условию 2 $A_n\subseteq A^H$. □

Отметим, что если $\operatorname{char} k=0$, то $A^G=A^H$, а если $\operatorname{char} k=p>0$, то $(A^G)^{p^{\dim H}}\subseteq A^H$.

Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований РАН, грант № 96-01-00627, программой INTAS, грант № 93-2618, 93-0893, Международным научным фондом и Российским правительством, грант JBX 100.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов В. А. Строение алгебр Хопфа//Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 29. ВИНИТИ. М., 1991. 3—63.
2. Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings//CBMS. N 82. Amer. Math. Soc. 1993.
3. Cohen M. Quantum commutativity and central invariants//Lect. Notes Pure and Appl. Math. 1994. 158. 25—38.
4. Ferrer Santos Walter R. Finite generation of the invariants of finite dimensional Hopf algebras//J. Algebra. 1994. 165, N 3. May 1. 543—549.
5. Masuoka A. Cleft extensions for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element//Communs Algebra. 1994. 22, N 1. 4537—4559.
6. Taft E., Wilson R. On antipodes in pointed Hopf algebras//J. Algebra. 1974. 29. 27—32.
7. Milinski A. Actions of pointed Hopf algebras on prime algebras//Communs Algebra. 1995. 23, N 1. 313—333.
8. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., 1971.

Поступила в редакцию
14.06.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 511

О. В. Попов

ПРИЛОЖЕНИЯ ОЦЕНОК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ Г. ВЕЙЛЯ С МНОГОЧЛЕНОМ РАСТУЩЕЙ СТЕПЕНИ

Первым среди многочисленных возможных приложений оценок сумм Г. Вейля [1, 2] с многочленом растущей степени в экспоненте явился результат Дж. Литтлвуда [3] в асимптотическом законе распределения простых чисел [4—6]. Наилучшие результаты в этой проблеме были получены методом И. М. Виноградова [7—14] Н. Д. Чудаковым [15, 16], И. М. Виноградовым [17—19], Н. М. Коробовым [20].

Перейдем теперь к общей постановке проблемы.

Аналитический смысл широкого круга задач теории чисел заключается в правильном учете вклада больших и малых значений функций в общую сумму. Техника рядов и интегралов Фурье позволяет свести подобные вопросы к учету осцилляций экспоненциальных функций мнимого аргумента. Таким образом, возникает аналитическая проблема оценок экспоненциальных сумм с аналитической функцией в экспоненте. Но поскольку аналитическая функция как угодно точно приближается многочленом растущей степени, то становится ясным, что сколько-нибудь полное решение проблемы оценок экспоненциальных сумм от многочлена растущей степени с чисто мнимыми коэффициентами дает ключ к решению необозримого круга аналитических проблем. Данное направление исследований — одно из основных в теории чисел. Но в столь общей постановке задачи современные исследования представляются достаточно скромными. В то же время сам факт наличия подобного рода результатов является крупным достижением математики. Эту мысль подтверждает пример асимптотического закона распределения простых чисел в натуральном ряде.

Отметим, что чем быстрее растет аналитическая функция, тем хуже она приближается многочленом фиксированной степени. Другими словами, при одинаковой точности приближения для быстро растущей функции требуется, чтобы степень приближающего многочлена тоже росла быстро. Это обстоятельство определяет актуальность задачи оценок тригонометрических сумм от быстро растущих функций в экспоненте.

Современные представления в данной проблематике и методы ее исследования разработаны А. А. Карацубой [8, 9, 21] (см. также [22, 23]). В частности, ему принадлежит пример быстро растущей функции

$$f(x)=e^{(\log x)^{\gamma}},\quad 1<\gamma<\frac{3}{2},$$

для которой он получил [21] нетривиальную оценку тригонометрической суммы.

Приведем теперь основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть A, B, P, P_1, β, γ — вещественные числа, причем* $A\geqslant 1$, $1<\gamma<\frac{3}{2}$, $\frac{P}{2}<P_1\leqslant P$,

$$-\frac{A}{2}(\log P+B)^{\gamma}<\log|\beta|<(\log P)^{3-2\gamma},$$

$$f(x)=\beta e^{A(\log x+B)^{\gamma}},$$

$$T=T(P;\ \beta)=\sum_{P_1\leqslant x<P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T|\ll P^{1-\rho},\ \textit{где}\ \rho=2^{-10}A^{-2}(\log 2P+B)^{2-2\gamma}.$$

Теорема 2. *Пусть A, B, P, P_1, γ — вещественные числа,* $A\geqslant 1$, $1<\gamma<\frac{3}{2}$, $\frac{P}{2}<P_1\leqslant P$, $P\geqslant 1$,

$$S(\alpha)=\sum_{P_1<n\leqslant P} e^{2\pi i\alpha[f(n)]},\quad f(x)=e^{A(\log x+B)^\gamma},$$

и вещественное число α *удовлетворяет неравенству*

$$-\frac{A}{2}(\log P+B)^\gamma\leqslant\log|\alpha|\leqslant-\log 2.$$

Тогда справедлива оценка

$$|S(\alpha)|\ll|\alpha|\,P^{1-\rho}\log^2 P,$$

где $\rho=2^{-10}A^{-2}(\log 2P+B)^{2-2\gamma}$.

Теорема 3. *Пусть* A, B, P, P_1, β, γ — *вещественные числа*, $A>1$, $1<\gamma<\frac{3}{2}$, $\frac{P}{2}<P_1\leqslant P$,

$$-\frac{A}{2}(\log P+B_1)^\gamma<\log|\beta|<(\log P)^{3-2\gamma},\quad f(x)=\beta e^{A(\log x)^\gamma},$$

переменная p *пробегает последовательные значения простых чисел,*

$$S_0=S_0(P,\beta)=\sum_{P_1<p\leqslant P} e^{2\pi i f(p)}.$$

Тогда справедлива оценка

$S_0\ll P^{1-\rho_0}$, *где* $\rho_0=2^{-11}A^{-2}(\log 2P)^{2-2\gamma}$.

Теорема 4. *Пусть* A, B, N, N_1, γ — *вещественные числа*, $A\geqslant 1$, $1<\gamma<\frac{3}{2}$, $\frac{N}{2}<N_1\leqslant N$, $N\geqslant 1$,

$$S_0(\alpha)=\sum_{N<p\leqslant N_1} e^{2\pi i\alpha[f(p)]},\quad f(x)=e^{A(\log x+B)^\gamma},$$

переменная суммирования p *пробегает значения простых чисел и величина числа* α *удовлетворяет неравенству*

$$-\frac{A}{2}(\log N+B)^\gamma\leqslant\log|\alpha|\leqslant-\log 2.$$

Тогда справедлива оценка

$$|S_0(\alpha)|\ll|\alpha|\,N^{1-\rho_0}\log^2 N,\quad \rho_0=2^{-13}A^{-2}(\log 2N+B)^{2-2\gamma}.$$

Рассмотрим задачу о представлении натурального числа N в виде

$$N=p+f(n)\quad (N=p+f(q)),\tag{1}$$

где неизвестные p, q и n принимают значения простых и натуральных чисел соответственно, функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x)=[g(x)],\ g(x)=e^{\nu(\log x)^\gamma},\quad 1<\gamma<\frac{3}{2},$$

ν — постоянная, $\varphi(x)$ — функция, обратная к $g(x)$.

Обозначим через $E(x)$ (соответственно $E_0(x)$) количество натуральных чисел N, не превосходящих x и непредставимых в виде (1).

Теорема 5. *Справедлива оценка*

$$E(x)\ll x(\varphi(4x))^{-2\rho}\log x,$$

где $\rho=c_0(\log\varphi(4x))^{2-2\gamma}$, $c_0>0$ — *некоторая постоянная.*

Теорема 6. *Справедлива оценка*

$$E_0(x) \ll x(\varphi(4x))^{-2\rho_0}\log x, \text{ где } \rho_0 = c(\log\varphi(4x))^{2-2\gamma},$$

$c>0$ — некоторая постоянная.

Теорема 7. *Пусть $I=I(N)$ — число представлений натурального числа N в следующем виде:*

$$N = p_1 + p_2 + f(n).$$

Тогда для величины I справедлива асимптотическая формула при $N\to\infty$

$$I = \log^{-2} N \int_2^N \varphi(t)\,dt + O\left(N\varphi(N)e^{-\frac{c}{2}\gamma(N)}\right) +$$

$$+ O\left(N(\varphi(N))^{1-\rho(N)}\right) + O\left(\log^{-3} N \int_2^N \varphi(t)\,dt\right),$$

где $\varphi(t)$ — функция, обратная к функции $g(x) = e^{\lambda(\log x)^\gamma}$, $1<\gamma<\frac{3}{2}$, $\lambda>0$, $x\geqslant 2$, функция $f(n)$ имеет вид $f(n)=[g(n)]$, $\gamma(N) = \left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{0,6}$, $\rho(N) = (\log\varphi(N))^{2-2\gamma}$, *а $c>0$ — некоторая постоянная.*

Теорема 8. *Пусть $I=I(N)$ — число представлений натурального числа N в следующем виде:*

$$N = p_1 + p_2 + f(p_3).$$

Тогда для величины I справедлива асимптотическая формула при $N\to\infty$

$$I = \frac{1}{\log^3 N}\int_1^N \varphi(t)\,dt + O\left(N\varphi(N)e^{-\frac{c}{2}\gamma(N)}\right) +$$

$$+ O\left(N(\varphi(N))^{1-\rho_0}\right) + O\left(\frac{1}{\log^4 N}\int_1^N \varphi(t)\,dt\right),$$

где функции $\varphi(t)$, $\gamma(N)$ определены в теореме 7, $\rho_0=\rho_0(N)$ — постоянная из теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins//Math. Ann. 1916. **77.** 313—352.
2. Weyl H. Zur Abschatzung von $\zeta(1+it)$//Math. Z. **1921. 10.** 88—101.
3. Littlewood J. E. Researches in the theory of Riemann ζ-function//Proc. London Math. Soc. 1922. 2, N 20.
4. Hadamard J. Sur la distribution des zeros de la fonction $\zeta(s)$ et des consequences arithmetiques//Bull. Soc. Math. France. 1896. **24.**
5. Vallee Poussin C. J. de la. Recherches analytiques sur la theorie des nombres. Premiere partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers general//Ann. Soc. sci. Bruxelles. 1896. **20.** 183—256.
6. Vallee Poussin C. J. de la. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inferieurs a une limite donnie//Mem. couronnes Acad. Roy. Sci. Belgique. 1899—1900. **59,** N 1.
7. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М., 1953.
8. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М., 1983.
9. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М., 1994.

10. Karatsuba A. A. Complex analysis in number theory, N. Y., 1995.
11. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М., 1972.
12. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм. М., 1980.
13. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М., 1976.
14. Виноградов И. М. Избранные труды. М., 1952.
15. Чудаков Н. Г. О нулях L-функций Дирихле//Матем. сб. 1936. **1** (43). 591—602.
16. Чудаков Н. Г. О нулях функции $\zeta(s)$//Докл. АН СССР. 1936. 187—201.
17. Виноградов И. М. Об оценках тригонометрических сумм//Докл. АН СССР. 1942. **34**. 199—200.
18. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1958.
19. Виноградов И. М. К вопросу об оценке тригонометрических сумм//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1965. **29**, № 3. 493—504.
20. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения//Успехи матем. наук. 1958. **13**, вып. 4. 185—192.
21. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их приложения//Тр. Матем. ин-та. АН СССР. 1971. **112**. 241—255.
22. Richert H.-E. Zur Abschatzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma=1$//Math. Ann. 1967. **169**, N 2. 97—101.
23. Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neighbourhood of the line Re $(s)=1$//Integral transforms and special functions. 1993. **1**. 1—7.

Поступила в редакцию
07.07.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 511.36

А. Б. Шидловский

К ЗАДАЧЕ О ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ E-ФУНКЦИЙ

Будем рассматривать совокупность E-функций

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), \tag{1}$$

составляющую решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y_k'=\sum_{k=1}^{m} Q_{k,i}y_i, \quad k=1, \ldots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbf{C}(z). \tag{2}$$

Пусть $T(z)\in\mathbf{C}[z]$ и обозначает общий наименьший знаменатель всех функций $Q_{k,i}$ в системе (2).

Пусть ξ — любое фиксированное алгебраическое число, такое, что $\xi T(\xi)\neq 0$, а $\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\theta)$ — алгебраическое поле над $\mathbf{Q}$, содержащее все коэффициенты степенных рядов по степеням z всех функций (1) и число ξ, $h=[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]$.

Будем также рассматривать значения функций (1)

$$f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi). \tag{3}$$

Обозначим через $\mathscr{L}$ линейное пространство, порожденное числами (3) над полем $\mathbf{K}$. Установлено, что числа (3) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) тогда и только тогда, когда функции (1) однородны алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbf{C}(z)$. В ряде важных случаев доказана однородная алгебраическая независимость (алгебраическая независимость) подсовокупностей чисел (3). С историей вопроса и основными результатами об алгебраической независимости чисел (3) можно ознакомиться в книге [1].