И. Б. Фесенко, Теория полей классов многомерных локальных полей нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 3, 165–196

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 3

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ КЛАССОВ МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ С ПОЛЕМ ВЫЧЕТОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

И. Б. Фесенко

Указанная в заглавии теория строится в отличие от теории Като с ограниченным использованием групп когомологий и с акцентом на явные вычисления в K- и K^{top}-группах Милнора многомерных локальных полей. Обобщается аксиоматический метод построения теории полей классов Нойкирха, большую роль играет символьное отображение Востокова. Основная теорема устанавливает взаимно-однозначное соответствие между открытыми подгруппами конечного индекса в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ и конечными абелевыми расширениями разнохарактеристического n-мерного локального поля F. Другие типы многомерных локальных полей будут рассмотрены в следующей статье.

Теория полей классов дает описание абелевых расширений исходного поля в терминах объектов, связанных с этим полем. Локальная теория полей классов появилась, как следствие, глобальной в работах Х.Хассе, и затем Ф.К.Шмидт и К.Шевалле систематически развили локальную теорию независимо от глобальной.

Современное общепринятое изложение локальной теории полей классов технично и опирается на вычисления в группах когомологий (например, [1,2]). Но, как отмечал в свое время Хассе, „четкий контур и яркие детали этого замечательного здания теряют что-то от их блеска и гибкости при проникновении в теорию полей классов когомологических понятий и методов ... “ ([2], с.412).

Имеются другие подходы к построению теории полей классов. А.Вейль использовал интегрирование на локально-компактных группах [3]. Нестандартный подход был предложен М.Хазевинкелем (1975, [4]), который сумел обойтись без когомологических групп, используя то обстоятельство, что реально требуются лишь когомологии в малых размерностях, а они допускают простое описание. Следующий большой шаг был сделан Ю.Нойкирхом (1984, [5]). Ему удалось получить очень простую теоретико-групповую конструкцию, частными случаями которой оказались локальная и глобальная теории полей классов.

Пусть K — локальное поле, $\tilde{K}/K$ — максимальное неразветвленное расширение, L/K — конечное расширение Галуа. Для $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ через $\tilde{\sigma}$ обозначим любой подъем σ на $L\tilde{K}$, который на $\tilde{K}$ действует как положительная

Ключевые слова: теория полей классов, многомерные локальные поля, K-группы Милнора полей, топологические K-группы Милнора, отображение взаимности, теорема Гильберта 90 в K-теории, гомоморфизм норменного вычета, кручение в K-группах.

целая степень автоморфизма Фробениуса. Пусть Σ — поле неподвижных элементов относительно действия $\tilde{\sigma}$, π_Σ — простой элемент Σ, тогда отображение $\mathrm{Gal}(L/K) \to K^*/N_{L/K}L^*$, $\sigma \to N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma)$ корректно определено и является изоморфизмом между $\mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}}$ и $K^*/N_{L/K}L^*$.

С другой стороны, на рубеже 70-х и 80-х годов возникла теория полей классов многомерных локальных полей (К.Като [6–8]; А.Паршин [9,10]). Поле F называется n-мерным локальным, если имеется цепочка полей $F = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(0)} = \mathbb{F}_q$, в которой каждое из первых n полей — полное дискретно нормированное, а его поле вычетов — следующее поле в цепочке. Отображение взаимности у Като действует из K-группы Милнора $K_n(F)$ в группу максимального абелева расширения $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$. В своих работах Като использовал глубокие результаты алгебраической K-теории и вычисления в когомологических группах. Для полей положительной характеристики Паршин предложил удивительно простое построение, основанное на двойственности Куммера, а также Артина–Шрайера. При этом выяснилось, что более подходящим объектом в теории полей классов являются топологические K-группы.

В настоящей работе предлагается новый способ построения теории полей классов многомерных локальных полей с ограничением $\mathrm{char}k^{(n)} \neq \mathrm{char}k^{(n-1)} = p$; будем называть такие поля разнохарактеристическими, они ближе всего к обычным числовым локальным полям. Развиваемый подход в какой-то мере воскрешает тенденции теории полей классов „докогомологического“ периода. Одна из основных идей состоит в сведении вычисления индекса норменной подгруппы и проверки обобщенной теоремы Гильберта 90 к случаю простого циклического расширения. А здесь уже проводятся явные вычисления, основывающиеся на знании структуры фактор-группы $K_m(F)/pK_m(F)$.

В разнохарактеристических локальных полях вводятся топологические K-группы $K_m^{\mathrm{top}}(F) = K_m(F)/\Lambda_m(F)$, где $\Lambda_m(F)$ — пересечение всех окрестностей нуля в некоторой топологии на $K_m(F)$, связанной с топологией n-мерного локального поля. Оказывается, что $\Lambda_m(F)$ совпадает с пересечением всех подгрупп $uK_m(F)$, $u \geqslant 1$, что позволяет во многих вопросах вместо K-групп использовать K^{top}-группы.

Для изучения $K_m(F)/pK_m(F)$ привлекается символьное отображение С.Востокова [11], которое появилось как обобщение формулы для символа Гильберта.

Построение теории полей классов проводится на основе нетривиального обобщения метода Нойкирха. В рассматриваемых полях многие конструкции метода Нойкирха оказываются полезными, однако имеются и большие особенности. В частности, доказательство гомоморфных свойств отображения $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ (5.2) требует большой аккуратности и проводится одновременно с доказательством других результатов по индукции. Возникающие трудности отчасти объяснимы тем обстоятельством, что гомоморфизм $i_{F/L} : K_n^{\mathrm{top}}(F) \to K_n^{\mathrm{top}}(L)$, индуцированный вложением полей, не является при $n > 1$ инъективным даже для чисто неразветвленных (т.е. получающихся присоединением корня из единицы степени взаимно простой с p) расширений.

Своеобразием избранного подхода оказывается необходимость работы с типичными K-теоремами для многомерных полей, при этом доказательства достаточно элементарны. Основная теорема 5.2 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между открытыми подгруппами конечного индекса в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ и абелевыми расширениями конечной степени поля F.

В шестом разделе содержится доказательство стандартности p-кручения в

$K_m^{\mathrm{top}}(F)$. Это единственный результат, проверить который не удается без привлечения групп когомологий при $n > 1$. Описание кручения немедленно следует из изоморфизма норменного вычета (теорема 6.1).

Об обозначениях. Для записи элементов полей в основном употребляются греческие буквы, для элементов K-групп — латинские. Фактор-группа A/nA абелевой группы A часто обозначается через A/n. Элементы множеств заключаются в скобки $\langle , \rangle$. В суммах многоточием обозначаются элементы более высокого порядка, чем выписанные. Через μ_N обозначается группа корней N-й степени из единицы в сепарабельном замыкании F^{sep} поля F, $G_F = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$. Элементы группы Галуа обозначаются буквами σ, τ; запись $\sigma\tau$ обозначает композицию $\sigma \circ \tau$.

§ 1. Многомерные локальные поля

Подъем в F простых элементов полей вычетов $k^{(i)}$ из цепочки, определяющей n-мерное локальное поле F, дает локальные параметры $t_n, \dots, t_1$ (t_n является простым элементом F относительно дискретного нормирования ранга 1). Выбранным локальным параметрам соответствует нормирование $\mathbf{v}_F = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) : F^* \to (\mathbb{Z})^n$ ранга n, где $v^{(i)}(\alpha)$ для $\alpha \in F^*$ есть наибольшая степень простого элемента $k^{(i)}$, делящая образ $\alpha(t_n^{v^{(n)}(\alpha)} \cdot \ldots \cdot t_{i+1}^{v^{(i+1)}(\alpha)})^{-1}$ в кольце целых поля вычетов $k^{(i)}$. Группа $(\mathbb{Z})^n$ здесь упорядочена так: $(m_1, \dots, m_n) < (m_1', \dots, m_n')$, если $m_i < m_i'$ для наибольшего индекса i, для которого $m_i \neq m_i'$. Кольцо целых и максимальный идеал нормирования $\mathbf{v}_F$ (которые не зависят от выбора локальных параметров) обозначаются $\mathfrak{O}_F$ и $\mathfrak{M}_F$. Введем также обозначения $\mathfrak{p}_F(m_i, \dots, m_n)$ для множества элементов $\alpha \in F$, для которых $(v^{(i)}(\alpha), \dots, v^{(n)}(\alpha)) \geqslant (m_i, \dots, m_n)$,$U_{m_i,\dots,m_n,F} = 1 + \mathfrak{p}_F(m_i, \dots, m_n)$ — подгруппа в группе единиц U_F кольца $\mathfrak{O}_F$, если $(m_i, \dots, m_n) > (0, \dots, 0)$. Представители Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_q = k^{(0)}$ в поле F образуют группу μ_{q-1} корней $(q-1)$-й степени из единицы, причем $U_F \simeq V_F \times \mu_{q-1}$, где $V_F = U_{1,0,\dots,0}$ — группа главных единиц $\mathfrak{O}_F$. Иногда индекс F будет опускаться.

Используя описание полных локальных колец ([12], § 31) можно проверить следующее утверждение:

Лемма 1.1 (Паршин, [13]). *Пусть F — n-мерное локальное поле. Тогда имеются следующие изоморфизмы, сохраняющие локальную структуру. Если* $\mathrm{char}F = p$, *то* $F \simeq \mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_n))$. *Если* $\mathrm{char}F = 0$ *и* $\mathrm{char}k^{(i)} = 0$, $\mathrm{char}k^{(i-1)} = p$, *то для* $i = 1$ *и некоторого числового локального поля* k $F \simeq k((t_2)) \dots ((t_n))$; *для* $i > 1$ F *изоморфно промежуточному подполю с индуцированной топологией в конечном расширении полей вида* $k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{i-1}\}\}((t_{i+1})) \dots ((t_n))$. (*Если l — поле с нормированием, через $l\{\{t\}\}$ обозначается поле рядов $\sum c_m t_n^m$,$c_m \in l$, с условиями: значение нормирования на $\{c_m\}$ стремится к $+\infty$, если m стремится к $-\infty$, значения нормирования на $\{c_m\}$ ограничены снизу, и с простым элементом из l. Тогда поле вычетов $\overline{l\{\{t\}\}}$ изоморфно $\bar{l}((\bar{t}))$*).

Большое значение имеет топология, учитывающая топологию поля вычетов. Она определяется сначала на аддитивной группе поля. В поле $l((t))$ в качестве базы окрестностей нуля берутся подгруппы вида $U = \{\sum c_m t^m, c_m \in U_m\}$, где $(U_m)_{-\infty}^{+\infty}$ — система открытых подгрупп в l такая, что $U_{m-1} \subseteq U_m$ и $U_m = l$, начиная с некоторого m_0. В n-мерном локальном поле характеристики 0 с полем вычетов $\bar{F}$ характеристики p (такие поля назовем разнохарактеристическими) зафиксируем подъем элементов $\mathbb{F}_q^*$,0 переходит в 0, и локальные параметры, тогда в качестве базы окрестностей нуля берутся подгруппы вида $U = \{\sum c_m t_n^m, c_m \in U_m\}$, где

$(U_m)_{-\infty}^{+\infty}$ — система множеств поля F, являющихся подъемом открытых подгрупп $\tilde{U}_m$ поля $\overline{F}$, таких, что $\tilde{U}_{m-1} \subseteq \tilde{U}_m$ и $\tilde{U}_m = \overline{F}$, начиная с некоторого m_0. Введенная топология не зависит от выбора локальных параметров в случае $\operatorname{char} l((t)) = p$ [10], а также от выбора подъема $\mathbb{F}_q^*$ в поле F в случае разнохарактеристического поля (см. предложение 6, гл.III,§ 4, [13]).

Если же $\operatorname{char} l((t)) = 0$, то топология уже зависит от выбора вложения поля вычетов в $l((t))$ (см. [7], § 3.5).

В введенной топологии, которая слабее топологии дискретного нормирования ранга 1, аддитивная группа поля будет полной отделимой группой с секвенциально непрерывным умножением (по аналогии с [10], § 1). На мультипликативной группе поля $F^* \simeq \mathbb{Z}^n \times \mu_{q-1} \times V_F$ вводится топология произведения индуцированной с F на V_F и дискретных на остальных компонентах. F^* является топологической группой в этой топологии только при $n \leqslant 2$, а при $n > 2$ база окрестностей единицы несчетна (Паршин [10]).

Любой элемент $\alpha \in F$ допускает однозначное разложение в сходящийся ряд с коэффициентами из подъема $\mathbb{F}_q$ в поле F:

$$\alpha = \sum_{i_n \geqslant I_n} \sum_{i_{n-1} \geqslant I_{n-1}(i_n)} \cdots \sum_{i_1 \geqslant I_1(i_n,\ldots,i_2)} (\theta_{i_n,\ldots,i_1} t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}), \tag{1.1}$$

а любой элемент $\varepsilon \in V_F$ допускает однозначное разложение в сходящееся произведение

$$\varepsilon = \prod_{i_n \geqslant 0} \prod_{i_{n-1} \geqslant I_{n-1}(i_n)} \cdots \prod_{i_1 \geqslant I_1(i_n,\ldots,i_2)} (1 + \theta_{i_n,\ldots,i_1} t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}),$$

где $I_{n-1}(0) \geqslant 0, \ldots, I_1(0,\ldots,0) > 0$.

Ниже пойдет речь о многомерных локальных разнохарактеристических полях.

Лемма 1.2. *Пусть S — множество подъемов элементов базиса $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$ в поле F, $\mathbf{v}_F(p) = (e_1,\ldots,e_n)$, $e_i' = e_i/(p-1)$. Пусть I — множество индексов $(i_1,\ldots,i_n) \in (\mathbb{Z})^n$ с условиями $(0,\ldots,0) < (i_1,\ldots,i_n) < (pe_1',\ldots,pe_n')$ и не все $i_1,\ldots,i_n$ делятся на p. Если $\mu_p \subset F^*$, то положим $\omega_* = 1+\theta_* t_n^{pe_n'} \ldots t_1^{pe_1'}$, где θ_* является подъемом элемента из $\mathbb{F}_q$ и выбран так, что $\omega_* \notin F^{*p}$, а если $\mu_p \not\subset F^*$, то положим $\omega_* = 1$. Тогда любой элемент $\varepsilon \in V_F$ допускает разложение в сходящееся произведение*

$$\varepsilon = \prod_{i_n \geqslant 0} \prod_{i_{n-1} \geqslant I_{n-1}(i_n)} \cdots \prod_{i_1 \geqslant I_1(i_n,\ldots,i_2)} (1 + \theta_{i_n,\ldots,i_1} t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1})^{a(i_n,\ldots,i_1)} \cdot \omega_*^a,$$

где $(i_1,\ldots,i_n) \in I, i$, $\theta_{i_n,\ldots,i_1} \in S$; $a(i_n,\ldots,i_1) \in \mathbb{Z}_p$; $a \in \mathbb{Z}_p$, если $\omega_* \neq 1$, и $a = 0$, если $\omega_* = 1$.

Доказательство. Заметим, что $(1+\beta)^p = 1 + \beta^p + p\beta + \ldots$ для $\beta \in \mathfrak{M}_F$. Значит, $U_{pi_1,\ldots,pi_n} \subset V_F^p U_{pi_1+1,\ldots,pi_n}$, если $(pi_1,\ldots,pi_n) < (pe_1',\ldots,pe_n')$, $U_{pe_1'+1,\ldots,pe_n'} \subset V_F^p$, и гомоморфизм $U_{e_1',\ldots,e_n'} \xrightarrow{\uparrow p} U_{pe_1',\ldots,pe_n'}$ имеет коядро порядка p, если $\mu_p \subset F^*$, так как в этом случае первообразный корень $\xi_p \in \mu_p$ лежит в $U_{e_1',\ldots,e_n'}$, но не в $U_{e_1'+1,\ldots,e_n'}$. Кроме того, $(1+\beta)^l = 1 + l\beta + \ldots$ для $\beta \in \mathfrak{M}_F$, если l взаимно-просто с p.

Из доказательства леммы 1.2 следует

Лемма 1.3. *В разложении $U_F \simeq V_F \times \mu_{q-1}$ группа μ_{q-1} однозначно p-делима, а группа V_F однозначно l-делима для любого l взаимно-простого с p.*

§ 2. Топологические K-группы

Пусть $K_m(F)$ — m-я группа Милгора n-мерного локального разнохарактеристического поля F, обозначим через $U_iK_m(F)$, $VK_m(F)$,$UK_m(F)$,$U_{i_1,\dots,i_n}K_m(F)$ подгруппы в $K_m(F)$, порожденные элементами вида $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, где соответственно $\alpha_1 \in 1+\mathfrak{p}_F(i)$,$\alpha_1 \in V_F$,$\alpha_1 \in U_F$,$\alpha_1 \in U_{i_1,\dots,i_m,F}$.

Лемма 2.1. *Для $\{1-\alpha,1-\beta\} \in K_2(F)$ выполняется соотношение*

$$\{1-\alpha,1-\beta\} = -\{1+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha},1-\beta\} - \{1+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha},\alpha\}.$$

Лемма 2.2. $\{\alpha,\alpha\} = \{-1,\alpha\}$ *для* $\alpha \in F^*$; $\{\theta,\eta\} = 0$ *для* $\theta,\eta \in \mu_{q-1}$; $\{\theta,\varepsilon\} = 0$ *для* $\theta \in \mu_{q-1}$,$\varepsilon \in V_F$.

Предложение 2.1. *Пусть $r \geqslant 1$,$m \geqslant 2$, $t_n,\dots,t_1$ — локальные параметры F, B — множество всех $(m-1)$-элементных подмножеств J в множестве $\langle 1,\dots,n\rangle$, $d = \binom{n}{m-1}$ — число элементов в B. Тогда существуют отображения*

$$\varphi_r : V_F \times (F^*)^{m-1} \to (V_F)^d, \quad \varphi_r(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = (\beta_J)_{J\in B},$$

секвенциально непрерывные по каждому аргументу такие, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} V_F \times (F^*)^{m-1} \arrow[rr, "\varphi_r"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & (V_F)^d \arrow[dl, "\psi_r"] \\ & VK_m(F)/p^r & \end{tikzcd}$$

коммутативны, где $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = \{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\psi_r(\beta_J) = \sum\{\beta_J,t_{j_1},\dots,t_{j_{m-1}}\}$, *сумма берется по всем $j_1 < \dots < j_{m-1}$, образующим множества J из B. Отображения Ψ_r являются сюрьективными, и если* $\mathrm{pr} : VK_m(F)/p^{r+1} \to VK_m(F)/p^r$ — *естественная проекция, то* $\mathrm{pr}\circ\psi_{r+1}\circ\varphi_{r+1} = \psi_r\circ\varphi_r$. *Кроме того,* $\varphi_r(\varepsilon,t_{j_1},\dots,t_{j_{m-1}}) = (1,\dots,\varepsilon,\dots,1)$, *где $\varepsilon \in V_F$ стоит на J-м месте.*

Доказательство. Проводится в духе доказательства предложения 1, § 7, [6]. Благодаря лемме 2.1 достаточно проверить утверждение при $m=2$.

Рассмотрим два случая.

Первый: $\{\alpha_1,\alpha_2\} \in U_1K_2(F)$. Покажем, что для $\alpha_1 \in 1+\mathfrak{p}_F(i)$,$\alpha_2 \in V_F$ существуют $\beta_1,\dots,\beta_n \in 1+\mathfrak{p}_F(i)$ и $\gamma_1,\dots,\gamma_N \in 1+\mathfrak{p}_F(i+1)$, $\delta_1,\dots,\delta_N \in F^*$, секвенциально непрерывно зависящие от α_1 и α_2, и $x \in K_2(F)$, что

$$\{\alpha_1,\alpha_2\} = \{\beta_1,t_1\} + \dots + \{\beta_n,t_n\} + \{\gamma_1,\delta_1\} + \dots + \{\gamma_N,\delta_N\} + p^r x. \qquad (2.1)$$

Если это будет проверено, то индукцией по i в этом случае будет получено отображение φ_r, так как из леммы 1.2 имеем $1+\mathfrak{p}_F(i) \subset V_F^{p^r}$ при больших i. Для проверки (2.1) пусть $\alpha_1-(1-at_n^i) \in \mathfrak{p}_F(i+1)$ и для образа $\bar a$ элемента $a \in \mathfrak{O}_F$, $a \notin \mathfrak{p}_F(1)$ в поле вычетов $k^{(n-1)}$ выполняется разложение

$$\bar a = \sum \bar a^{p^r}_{i_{n-1},\dots,i_1}\bar t_{n-1}^{i_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\bar t_1^{i_1},$$

где $0 \leqslant i_1,\dots,i_{n-1} < p^r$,$a_{i_{n-1},\dots,i_1} \in \mathfrak{O}^*$. Тогда

$$\{\alpha_1,\alpha_2\} = \sum\{1-a^{p^r}_{i_{n-1},\dots,i_1}t_n^i t_{n-1}^{i_{n-1}}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1},\alpha_2\} + \{\gamma_1,\delta_1\} + \dots + \{\gamma_N,\delta_N\}, \qquad (2.2)$$

где $\{\gamma_1,\delta_1\},\dots,\{\gamma_N,\delta_N\}\in U_{i+1}K_2(F)$. Положим $\nu=a^{p^r}_{i_{n-1},\dots,i_1}t_n^i t_{n-1}^{i_{n-1}}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1}$, тогда из леммы 2.1 имеем

$$\{1-\nu,\alpha_2\}=\{1-\frac{\nu(\alpha_2-1)}{1-\nu},\alpha_2\}+i\{1-\frac{\nu(\alpha_2-1)}{1-\nu},t_n\}+\dots+i_1\{1-\frac{\nu(\alpha_2-1)}{1-\nu},t_1\}+p^n y,$$

где $\frac{\nu(\alpha_2-1)}{1-\nu}\in\mathfrak{p}_F(i+1)$. Первый случай рассмотрен.

Второй случай: $\{\alpha_1,\alpha_2\}\notin U_1K_2(F)$. Можно считать, что в разложении (1.1)

$$\alpha_1=1+\sum\theta_{i,i_{n-1},\dots,i_1}t_{n-1}^{i_{n-1}}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1},\quad \alpha_2=1+\sum\eta_{0,i_{n-1},\dots,i_1}t_{n-1}^{i_{n-1}}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1},$$

и все коэффициенты принадлежат $\mu_{q-1}\cup\langle 0\rangle$. Пусть $L=\bigcup\limits_{s=1}^{s=n}F(t_s^{1/p^r})$ и $t'_s=t_s^{1/p^r}$. Положим

$$\alpha'_1=1+\sum\theta^{1/p^r}_{0,i_{n-1},\dots,i_1}t'^{i_{n-1}}_{n-1}\cdot\ldots\cdot t'^{i_1}_1,\alpha'_2=1+\sum\eta^{1/p^r}_{0,i_{n-1},\dots,i_1}t'^{i_{n-1}}_{n-1}\cdot\ldots\cdot t'^{i_1}_1.$$

Тогда $\alpha_1-N_{L/F}\alpha'_1\in\mathfrak{p}_F(1)$ и $\alpha_2-\alpha_2'^{p^r}\in\mathfrak{p}_L(1)$, поэтому

$$\{\alpha_1,\alpha_2\}=p^rN_{L/F}\{\alpha'_1,\alpha'_2\}+N_{L/F}\{\alpha'_1,\varepsilon\}+\{\gamma_1,\delta_1\}+\dots+\{\gamma_N,\delta_N\},$$

где $\{\gamma_1,\delta_1\},\dots,\{\gamma_N,\delta_N\}$ принадлежат $U_1K_2(F)$, $\varepsilon\in 1+\mathfrak{p}_L(1)$ и секвенциально непрерывно зависят от α_1,α_2, так как отображение нормы в расширении полей секвенциально непрерывно. Для завершения рассмотрения второго случая остается проверить, что если $M=F(t_s^{1/p})$,$1\leqslant s\leqslant n-1$,$\alpha'_1\in 1+\mathfrak{p}_M(1)$,$\alpha'_2\in V_M$, то

$$N_{M/F}\{\alpha'_1,\alpha'_2\}=\{\alpha_1,\beta_1\}+\dots+\{\alpha_{N'},\beta_{N'}\}+p^rx$$

при некоторых $\alpha_1,\dots,\alpha_{N'}$,$\beta_1,\dots,\beta_{N'}\in F^*$ секвенциально непрерывно зависящих от α'_1,α'_2. Ввиду (2.1) в $K_2(M)$ имеем разложение ($t'_s=t_s^{1/p}$)

$$\{\alpha'_1,\alpha'_2\}=\{\beta'_1,t_1\}+\dots+\{\beta'_s,t'_s\}+\dots+\{\beta'_n,t_n\}+p^rx',$$

где $\beta'_1,\dots,\beta'_n\in 1+\mathfrak{p}_M(1)$. Но $N_{M/F}\{\beta'_u,t_u\}=\{N_{M/F}\beta'_u,t_u\}$ при $u\neq s$, а для $\{\beta'_s,t'_s\}$, используя аналог записи (2.2), имеем для $\beta'_s\in 1+\mathfrak{p}_M(i)$,$a_j\in F$

$$\{\beta'_s,t'_s\}-\sum\{1-a_jt'^j_s,t'_s\}\in U_{i+1}K_2(M)$$

и $N_{M/F}\{1-a_jt'^j_s,t'_s\}=\{1-a_jt^j_s,(-1)^pt_s\}$, если j делится на p, $N_{M/F}\{1-a_j,t'^j_s,t'_s\}=j'\{N_{M/F}(1-a_jt'^j_s),a_j\}+p^rx''$, если j не делится на p, где $jj'-1$ делится на p^r.

Второй случай рассмотрен и предложение доказано.

Следствие предложения 2.1. *Следующие две топологии на $VK_m(F)$ эквивалентны:*

1) *подъем с $VK_m(F)/\cap p^rVK_m(F)$, индуцированной с помощью сюръективных отображений φ_r топологии $(V_F)^d$;*

2) *сильнейшая топология на $VK_m(F)$, для которой отображение $\Phi : V_F\times(F^*)^{m-1}\to VK_m(F)$ секвенциально непрерывно и пересечение всех окрестностей 0 содержит $\cap p^rVK_m(F)$.*

Первая топология, следовательно, не зависит от выбора локальных параметров поля F.

Доказательство. Обозначим топологии на $VK_m(F)/\cap p^rVK_m(F)$ через τ_1 и τ_2. Из предожения 2.1 вытекает, что топология τ_1 слабее топологии τ_2. Индукцией по размерности поля можно показать, что для любого множества Y в V_F, не содержащего окрестностей единицы в V_F, существует последовательность $x_u\in V_F$

такая, что $x_u \to 1$ в топологии V_F и $x_u \notin Y$ для всех $u \geqslant 1$. Поэтому прообраз топологии τ_2 на $(V_F)^d$ не сильнее топологии $(V_F)^d$. Таким образом, $\tau_1 = \tau_2$.

Топологические K-группы $VK_m^{\mathrm{top}}(F)$ определяются как

$$VK_m^{\mathrm{top}}(F) = VK_m(F)/\Lambda_m(F),$$

где $\Lambda_m(F) = \cap p^r VK_m(F)$ с введенной на них топологией следствия предложения 2.1.

§ 3. Символьные отображения

Для дискретно нормированного поля F с полем вычетов $\overline{F}$ и простым элементом t определен гомоморфизм [14]

$$\partial_t : K_m(F) \to K_m(\overline{F}) \oplus K_{m-1}(\overline{F})$$

формулой $\partial_t(\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \{\beta_1, \dots, \beta_{m-1}, t\}) = (\{\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_m}\}, \{\overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta}_{m-1}\})$, где $\alpha_i, \beta_i \in U_F$. Вторую компоненту этого не зависящего от выбора t гомоморфизма обозначим через ∂, это — сюръективный гомоморфизм. Ядро ∂ совпадает с $U_1K_m(F)$.

Пусть F — произвольное n-мерное локальное поле, тогда определена композиция

$$v_F : K_n(F) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(\overline{F}) \to \dots \to K_0(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

для которой $v_F(\{t_1, \dots, t_n\}) = 1$ и ядро v_F равно $UK_n(F)$. v_F индуцирует изоморфизм

$$K_n(F)/UK_n(F) \simeq \mathbb{Z}.$$

Определим также композицию отображений

$$K_{n+1}(F) \xrightarrow{\partial} K_n(\overline{F}) \to \dots \to K_1(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q^*, \tag{3.2}$$

которая называется *ручным символом*. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in F^*$ и

$$A = \begin{pmatrix} v^{(1)}(\alpha_1) & \dots & v^{(1)}(\alpha_{n+1}) \\ v^{(2)}(\alpha_1) & \dots & v^{(2)}(\alpha_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ v^{(n)}(\alpha_1) & \dots & v^{(n)}(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Через A_i обозначим определитель матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-го столбца со знаком $(-1)^{i-1}$, через $A_{i,j}^k$ — определитель матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-го и j-го столбцов и k-й строчки.

Лемма 3.1. *Пусть $c_F : (F^*)^{n+1} \to (\mathfrak{O}_F/\mathfrak{M}_F)^* \simeq \mathbb{F}_q^*$ — отображение, задаваемое формулой*

$$c_F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \equiv \alpha_1^{A_1} \dots \alpha_{n+1}^{A_{n+1}}(-1)^C \bmod \mathfrak{M}_F,$$

где $C = \sum_{k,i<j} v^{(k)}(\alpha_j)A_{i,j}^k$. Тогда c_F не зависит от v_F, полилинейно и является символьным, поэтому продолжается до гомоморфизма

$$c_F : K_{n+1}(F) \to \mathbb{F}_q^*,$$

который совпадает с ручным символом. Кроме того, $c_F(\theta, t_1, \dots, t_n) \equiv \theta \bmod \mathfrak{M}_F$ для $\theta \in \mu_{q-1}$.

Доказательство. Линейность и корректность проверяются непосредственно. Покажем, что для $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$

$$c_F(\alpha, 1-\alpha, \dots, \alpha_{n+1}) = 1. \tag{3.3}$$

Пусть s — наибольшее число, для которого $v^{(n)}(\alpha) = \dots = v^{(n-s+1)}(\alpha) = 0$, $v^{(n)}(1-\alpha) = \dots = v^{(n-s+1)}(1-\alpha) = 0$. Если $s = n$, то (3.3) очевидно. Если $s < n$, $v^{(n-s)}(\alpha) > 0$, то $v^{(n-s)}(1-\alpha) = \dots = v^{(1)}(1-\alpha) = 0$, и (3.3) выполняется. Если $v^{(n-s)}(\alpha) < 0$, то $v^{(n-s)}(\alpha) = v^{(n-s)}(1-\alpha), \dots, v^{(1)}(\alpha) = v^{(1)}(1-\alpha)$, поэтому $A_1 = -A_2$, $A_3 = \dots = A_{n+1} = 0$, и $C - A_1$ — четно, следовательно, опять имеем (3.3).

Лемма 3.2. *Пусть* $g = \binom{n}{m}$, *если* $m \leqslant n$, *и* $g = 0$, *если* $m > n$; $d = \binom{n}{m-1}$, *если* $m - 1 \leqslant n$, *и* $d = 0$, *если* $m > n + 1$. *Тогда*

$$K_m(F) \simeq (\mathbb{Z})^g \oplus UK_m(F),$$
$$UK_m(F) \simeq (\mathbb{F}_q^*)^d \oplus VK_m(F).$$

Доказательство. Надо воспользоваться гомоморфизмами v_F и c_F, леммами 2.2, 3.1 и умножением в K-теории: $K_{m_1}(F) \times K_{m_2}(F) \to K_{m_1+m_2}(F)$.

Введем теперь для разнохарактеристического n-мерного локального поля F на $K_m(F)$ топологию произведения дискретных на $(\mathbb{Z})^g$ и $(\mathbb{F}_q^*)^d$ и определенной выше топологии на $VK_m(F)$. Положим

$$K_m^{\mathrm{top}}(F) = K_m(F)/\Lambda_m(F), \tag{3.4}$$

где $\Lambda_m(F) = \cap p^r VK_m(F) = \cap uK_m(F)$, *тогда*

$$K_m^{\mathrm{top}}(F) \simeq (\mathbb{Z})^g \oplus (\mathbb{F}_q^*)^d \oplus VK_m^{\mathrm{top}}(F)$$

и определены гомоморфизмы, индуцированные (3.1) *и* (3.2),

$$v_F : K_n^{\mathrm{top}}(F) \to \mathbb{Z}, \quad c_F : K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F) \to \mathbb{F}_q^*. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *Если L/F — конечное расширение многомерных разнохарактеристических локальных полей, то $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ — открытая подгруппа в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$, $N_{L/F}^{-1}(D)$ — открытая подгруппа в $K_n^{\mathrm{top}}(L)$, если D — открытая подгруппа в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$.*

Доказательство. Следует из непрерывности отображения нормы для полей и предложения 2.1.

Другое символьное отображение для разнохарактеристических полей было введено Востоковым [11]. Пусть F — n-мерное локальное поле характеристики 0 с полем вычетов характеристики p, $t_n, \dots, t_1$ — локальные параметры, μ_p содержится в F^*. Пусть T — максимальное числовое локальное поле, содержащееся в F и являющееся неразветвленным расширением $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{o}$ — его кольцо целых, тогда любой элемент $\alpha = t_n^{a_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{a_1}\theta\varepsilon$, $\theta \in \mu_{q-1}$, разлагая $\varepsilon - 1 \in \mathfrak{M}_F$ в ряд (1.1) с коэффициентами из $\mathfrak{o}$, можно записать в виде

$$\alpha = t_n^{a_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{a_1}\theta(1 + \sum \theta_{i_n,\dots,i_1} t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}), \quad \theta_{i_n,\dots,i_1} \in \mathfrak{o}.$$

Поставим в соответствие элементу α ряд Лорана от n переменных $\alpha \to \alpha(X_n, \dots, X_1) = X_n^{a_n} \cdot \ldots \cdot X_1^{a_1}\theta(1 + \sum \theta_{i_n,\dots,i_1} X_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot X_1^{i_1})$. Зафиксируем первообразный корень p-й степени из единицы ζ_p в поле F и обозначим $z(X_n, \dots, X_1) = \zeta_p(X_n, \dots, X_1)$, $s(X_n, \dots, X_1) = z(X_n, \dots, X_1)^p - 1$. Кроме того, пусть Δ действует на элементы из

$\mathfrak{o}$ как автоморфизм Фробениуса, а на $X_n, \ldots, X_1$ — возведением в степень p. Для $\alpha \in F^*$ определим

$$l(\alpha) = \frac{1}{p}\log \alpha(X_n, \ldots, X_1)^{p-\Delta}, \quad \delta_i(\alpha) = \alpha^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial X_i},$$

$$\eta_i(\alpha) = \delta_i(\alpha) - \frac{\partial l(\alpha)}{\partial X_i}.$$

Введем для $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in F^*$ ряд

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = l(\alpha_{n+1})D_{n+1} - l(\alpha_n)D_n + \cdots + (-1)^n l(\alpha_1)D_1,$$

где D_i — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \ldots & \delta_n(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \ldots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \eta_1(\alpha_{i+1}) & \ldots & \eta_n(\alpha_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_1(\alpha_{n+1}) & \ldots & \eta_n(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Отображение Востокова $\Gamma : (F^*)^{n+1} \to \mu_p (p \neq 2)$ задается так:

$$\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \xi_p^{\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})/s(X_n,\ldots,X_1)},$$

где tr — след из T в поле $\mathbb{Q}_p$. Доказывается [11], что Γ корректно определено, не зависит от выбора локальных параметров и ξ_p, не зависит от способа разложения элементов α_i в ряды, мультипликативно, кососимметрично и символьно. Значит, Γ может быть продолжено на

$$\Gamma : K_{n+1}^{\text{top}}(F) \to \mu_p. \tag{3.6}$$

(Если $p = 2$, то отображение Γ также может быть задано, но формулы становятся слишком громоздкими, в одномерном случае см. [15, 16]).

Предложение 3.1. *Если μ_p не содержится в F^*, то $K_{n+1}^{\text{top}}(F) = pK_{n+1}^{\text{top}}(F)$, $K_{n+1}(F) = pK_{n+1}(F)$. Если μ_p содержится в F^*, то символьное отображение Γ задает изоморфизм*

$$K_{n+1}(F)/p \simeq K_{n+1}^{\text{top}}(F)/p \simeq \mu_p.$$

Доказательство. Используя определение топологии на $K_{n+1}(F)$, предложение 2.1, лемму 1.2 и соотношение

$$i_1\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_1, \ldots, t_n\} = -\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, -\theta(-1)^{i_2+\cdots+i_n}, t_2, \ldots, t_n\},$$

которое следует из леммы 2.2, получаем первую часть утверждения предложения. Если $\mu_p \subset F^*$ и $\omega = 1 + \theta t_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{pe'_1}$, $\xi_p = 1 + \theta_p t_n^{e'_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{e'_1} + \ldots$, то

$$l(\omega) = \theta X_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot X_1^{pe'_1} + \ldots, s(X_n, \ldots, X_1) = \theta_p^p X_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot X_1^{pe'_1} + \cdots + pf(X_n, \ldots, X_1),$$

где f — с коэффициентами из $\mathfrak{o}$. Тогда

$$\Phi(\omega, t_1, \ldots, t_n) = (-1)^n \theta X_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot X_1^{pe'_1} \cdot X_1^{-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-1} + \ldots$$

и

$$\Gamma(\omega, t_1, \ldots, t_n) = \xi_p^{(-1)^n \operatorname{Tr}(\theta\theta_p^{-p})}.$$

Ввиду сюръективности отображения следа для конечных полей получаем для некоторого θ значение символьного отображения Γ, не равное единице. Но тогда для элемента ω_*, определенного в лемме 1.2,

$$\Gamma(\omega_*, t_n, \dots, t_1) \neq 1, \tag{3.7}$$

и предложение доказано.

С помощью отображения Γ можно выяснить структуру фактор–группы $K_m(F)/p \simeq K_m^{\mathrm{top}}(F)/p$. Будем говорить, что топологический $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$–модуль M имеет топологические образующие (базис) $\{x_u\}$, если любой элемент x из M может быть представлен (соответственно с однозначно определенными коэффициентами $c_u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) в виде сходящегося ряда

$$x = \sum c_u x_u.$$

Ввиду леммы 3.2 имеем

$$K_m(F)/p \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g \oplus VK_m(F)/p.$$

Предложение 3.2. *Если $m > n+1$, то $VK_m(F) = pVK_m(F)$. Если $m \leqslant n+1$, то пусть S и I определены, как в лемме 1.2, B — как в предложении 2.1. Тогда $VK_m(F)/p$ имеет топологический базис, состоящий из $\{1+\theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\}$, где $\theta \in S$, $(i_1, \dots, i_n) \in I$, $j_1 < \dots < j_{m-1}$ образуют все $(m-1)$-элементные подмножества J из B, для которых $k \notin J$, где k — наименьшее число от 1 до n, для которого i_k не делится на p. Если $\mu_p \subset F^*$, то к описанным символам надо добавить еще все символы вида $\{\omega_*, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\}$, где $j_1 < \dots < j_{m-1}$ дают все подмножества J из B.*

Доказательство. Из лемм 1.2, 2.2 следует, что перечисленные символы являются топологическими образующими для $VK_m^{\mathrm{top}}(F)/p$. Для проверки того, что они являются топологическим базисом, заметим, что можно считать $\mu_p \subset F^*$. Действительно, степень расширения L/F, где $L = F(\mu_p)$, взаимно-проста с p, поэтому индуцированный вложением полей гомоморфизм $i_{F/L} : K_m^{\mathrm{top}}(F)/p \to K_m^{\mathrm{top}}(L)/p$ инъективен, так как $N_{L/F} \circ i_{F/L} = |L : F|$.

Пусть $x = \sum c_u x_u$, где $c_u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, x_u — символы описанного вида. Пусть $(i'_1, \dots, i'_n)$ — наименьший индекс из $I \cup (pe'_1, \dots, pe'_n)$, для которого $c_{u'} \neq 0$. Если $(i'_1, \dots, i'_n) = (pe'_1, \dots, pe'_n)$, то возьмем $j_m, \dots, j_n$ так, чтобы множества $\langle j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, \dots, j_n\rangle$ и $\langle 1, \dots, n\rangle$ совпадали, где $x_{u'} = \{\omega_*, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\}$. Тогда ввиду (3.7) имеем $\Gamma(x, t_{j_m}, \dots, t_{j_n}) \neq 1$, следовательно, $x \notin pKm^{\mathrm{top}}(F)$.

Если $(i'_1, \dots, i'_n) \in I$, то положим $\varepsilon = 1 + \theta_* \theta_{u'}^{-1} t_n^{pe'_n - i'_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{pe'_1 - i'_1}$, где $x_{u'} = \{1 + \theta_{u'} t_n^{i'_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i'_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\}$. Тогда благодаря лемме 2.1 и включению $U_{pe'_1+1,\dots,pe'_n} \subset V_F^p$ имеем

$$\pm\{x_{u'}, \varepsilon\} = \{1 + \theta_* t_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{pe'_1}, t_n^{i'_n} \cdot \ldots \cdot t_1^{i'_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} + py$$

для некоторого $y \in K_{m+1}^{\mathrm{top}}(F)$. Пусть i_k определяется для $i'_1, \dots, i'_n$ как в условии предложения. Тогда возьмем $j_{m+1}, \dots, j_n$ так, чтобы множества $\langle j_1, \dots, j_{m-1}, k, j_{m+1}, \dots, j_n\rangle$ и $\langle 1, \dots, n\rangle$ совпадали. Из (3.7) заключаем

$$\Gamma(x, \varepsilon, t_{j_{m+1}}, \dots, t_{j_n}) \neq 1,$$

следовательно, $x \notin pK_m^{\mathrm{top}}(F)$.

Замечание. Другое описание для $U_iK_m(F)+pK_m(F)/U_{i+1}K_m(F)+pK_m(F)$ с использованием модулей дифференциалов содержится в работах [6] и [7].

Предложение 3.3. *Пусть D — открытая подгруппа индекса l, где l — простое число, в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$. Пусть поле F содержит μ_l. Тогда найдется $\alpha\in F^*$, что D является ортогональным дополнением элемента α относительно $(q-1/l)$-й степени ручного символа, если $l\neq p$, и символьного отображения Γ, если $l=p$.*

Доказательство. Если $l\neq p$, то $D\supset VK_n^{\mathrm{top}}(F)$, ввиду леммы 1.3 и из доказательства леммы 3.2 следует утверждение предложения. Если $l=p$, то используем топологический базис, построенный в предложении 3.2. Доказательство проводится в следующем ключе. Для элемента

$$x=\{1+\theta t_n^{i_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1},t_{j_1},\ldots,t_{j_{m-1}}\},\quad (i_1,\ldots,i_n)<(pe_1',\ldots,pe_n')$$

обозначим через $\hat{x}$ элемент из $U_{pe_1'-i_1,\ldots,pe_n'-i_n}$, для которого, в частности, $\Gamma(\hat{x},x)=\xi_p$.

Если $D\supset VK_n^{\mathrm{top}}(F)$, то положим $\alpha=\omega_*$.

Если $x_0=\{\omega_*,t_{j_1},\ldots,t_{j_{n-1}}\}$ не содержится в D, то положим $\alpha_0=t_j$, где множества $\langle j_1,\ldots,j_{n-1},j\rangle$ и $\langle 1,\ldots,n\rangle$ совпадают. Если $\{\omega_*,t_{j_1},\ldots,t_{j_{n-1}}\}$ содержится в D для любого набора $j_1,\ldots,j_{n-1}$, то пусть $(i_1',\ldots,i_n')$ — наибольший индекс, для которого существует элемент топологического базиса $x_0=\{1+\theta_0t_n^{i_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1},t_{j_1},\ldots,t_{j_{n-1}}\}$, не содержащийся в D (такой индекс существует благодаря открытости D). Положим $\alpha_0=\hat{x}_0$. Если $x_1=\{1+\theta_1t_n^{i_n'}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1'},t_{j_1'},\ldots,t_{j_{n-1}'}\}$ — следующий элемент топологического базиса с наибольшим $(i_1',\ldots,i_n')\leqslant(i_1,\ldots,i_n)$ такой, что или $\Gamma(\alpha_0,x_1)\neq 1$, или $x_1\notin D$, то положим $\alpha_1=\hat{x}_1$. Если x_2 — следующий элемент топологического базиса с наибольшим индексом $\leqslant(i_1',\ldots,i_n')$ такой, что или $\Gamma(\alpha_0,x_2)\neq 1$, или $\Gamma(\alpha_1,x_2)\neq 1$, или $x_2\notin D$, то положим $\alpha_2=\hat{x}_2$ и т.д. При этом $\mathrm{v}_F(\alpha_i-1)$ возрастает с ростом i, и можно подобрать целые $a_1,a_2,\ldots$ так, что элемент $\alpha=\alpha_0\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2}\cdot\ldots\in F^*$ будет удовлетворять условиям $\Gamma(\alpha,x_0)\neq 1$; а когда $x_i+d_ix_0\in D, i\geqslant 1$, выполняется $\Gamma(\alpha,x_i+d_ix_0)=1$. Если теперь $x=\sum c_ux_u$ — разложение произвольного элемента $x\in D\cap VK_n^{\mathrm{top}}(F)$ по топологическому базису, и

$$x=\sum{}' c_u(x_u+d_ux_0)+(c_0-\sum{}' c_ud_u)x_0+\sum{}'' c_ux_u,$$

где первая и вторая суммы берутся по тем u, для которых строился элемент α_i, третья сумма — по всем остальным u, причем d_u подбираются так, чтобы $x_u+d_ux_0\in D$, то в сумме $\sum' c_ud_u$ имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых и $c_0-\sum' c_ud_u=0$, поэтому $\Gamma(\alpha,x)=1$. Тогда α является искомым.

§ 4. Вычисления в многомерных полях

Расширение n-мерных разнохарактеристических локальных полей L/F назовем чисто неразветвленным, если расширение полей вычетов $k_L^{(0)}/k_F^{(0)}$ имеет ту же степень, что и L/F. Тогда чисто неразветвленное расширение степени l поля F получается присоединением корней $\mu_{q^l-1}: L=F(\mu_{q-1}^l)$.

Пусть L/F — циклическое расширение степени p, не являющееся чисто неразветвленным. Можно выбрать локальные параметры $t_n,\ldots,t_{s,L},\ldots,t_1$ поля L так, что $L=F(t_{s,L})$ для некоторого $s, 1\leqslant s\leqslant n$, и $t_i\in F$, если $i\neq s$. В поле F возьмем локальные параметры t_i для $i\neq s$, и $t_{s,F}=N_{L/F}t_{s,L}$.

Пусть σ — образующая $\mathrm{Gal}(L/F)$, тогда $\sigma(t_{s,L})t_{s,L}^{-1} \in V_L$ и

$$\sigma t_{s,L} = t_{s,L}(1 + \theta_0 t_n^{r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1} + \ldots). \tag{4.1}$$

Пусть $f(X)$ — неприводимый многочлен для $t_{s,L}$ над F, тогда $(-1)^{p-1}f'_{(t_s,L)} = (\sigma t_{s,L} - t_{s,L}) \cdot \ldots \cdot (\sigma^{p-1}t_{s,L} - t_{s,L})$, следовательно,

$$f'(t_{s,L}) = (p-1)'(-\theta_0)^{p-1} t_n^{(p-1)r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{(p-1)(r_s+1)} \cdot \ldots \cdot t_1^{(p-1)r_1}\varepsilon_1, \tag{4.2}$$

где $\varepsilon_1 \in V_L$. Кроме того, хорошо известно (см. [17], гл.III, предложение 2), что

$$\mathrm{Tr}_{L/F}(\frac{t_{s,L}^i}{f'(t_{s,L})}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant i \leqslant p-2, \\ 1, & \text{если} \quad i = p-1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Если* $\alpha \in t_n^{a_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{a_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{a_1}\mathfrak{O}_L$, *то*

$$\mathrm{Tr}_{L/F}\alpha \in t_n^{a_n + r_n(p-1)} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{[(a_s-1-r_s)/p]+r_s+1}\mathfrak{O}_{s,F},$$

где $\mathfrak{O}_{s,F} = \langle \beta \in F^* : v^{(n)}(\beta) \geqslant 0, \ldots, v^{(s)}(\beta) \geqslant 0\rangle$, *квадратные скобки означают целую часть рационального числа.*

Доказательство. Используя (4.3), индукцией по i можно показать, что для $i \geqslant 0$

$$\mathrm{Tr}_{L/F}(t_{s,L}^i / f'(t_{s,L})) \in \mathfrak{O}_F,$$

следовательно, с учетом (4.2)

$$t_{s,L}^{r_s(p-1)}\mathrm{Tr}_{L/F}(t_{s,L}^{i-(r_s+1)(p-1)}\varepsilon_1^{-1}) \in t_n^{r_n(p-1)} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{r_s(p-1)} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1(p-1)}\mathfrak{O}_L.$$

Пусть $t_{s,L} = t_{s,L}^p\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 \in V_L$, тогда для любого j

$$\mathrm{Tr}_{L/F}(t_{s,L}^{i+1+r_s} t_{s,F}^j \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{r_s+1}) \in t_n^{r_n(p-1)} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{1+r_s+j} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1(p-1)}\mathfrak{O}_F.$$

Поэтому для любого целого i существует $\eta_i \in V_L$ такой, что

$$\mathrm{Tr}_{L/F}(t_{s,L}^i\eta_i) \in t_n^{r_n(p-1)} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{r_s+1+[(i-1-r_s)/p]} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1(p-1)}\mathfrak{O}_F.$$

Если теперь $\alpha = \sum \theta_{i_n,\ldots,i_1} t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}$, $(i_1, \ldots, i_n) \geqslant (a_1, \ldots, a_n)$, то можно записать разложение $\alpha = \sum \theta'_{j_n,\ldots,j_1} t_n^{j_n} \cdot \ldots \cdot (t_{s,L}^{j_s}\eta_{j_s}) \cdot \ldots \cdot t_1^{j_1}$ при этом $(j_s, \ldots, j_n) \geqslant (a_s, \ldots, a_n)$. Отсюда

$$\mathrm{Tr}_{L/F}\alpha \in t_n^{a_n+r_n(p-1)} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{[(a_s-1-r_s)/p]+r_s+1}\mathfrak{O}_{s,F}.$$

Лемма 4.2. *Если* $\gamma \in \mathfrak{M}_L$, *то для некоторого* $\beta \in \mathfrak{O}_L$

$$N_{L/F}(1+\gamma) = 1 + N_{L/F}^{\gamma} + \mathrm{Tr}_{L/F}^{\gamma} + \mathrm{Tr}_{L/F}(\gamma^2\beta).$$

Доказательство.

$$N_{L/F}(1+\gamma) = (1+\gamma)(1+\sigma\gamma) \cdot \ldots \cdot (1+\sigma^{p-1}\gamma).$$

Предложение 4.1. *Обозначим через* $\hat U_{i_1,\dots,i_n,L}$ *фактор-группу* $U_{i_1,\dots,i_n,L}/U_{i_1+1,\dots,i_nL}$, *изоморфную* $k_L^{(0)} = \mathbb{F}_q : 1+\theta t_n^{i_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1}$ *переходит в вычет* $\overline{\theta}$. *Тогда если* L/F *— циклическое расширение степени* p, *не являющееся чисто неразветвленным, с условием* (4.1), *то*

1) *если* $(i_1,\dots,i_n) < (r_1,\dots,r_n)$, *то коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc}
\hat U_{i_1,\dots,i_n,L} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q & & \overline{\theta} \\
{\scriptstyle N_{L/F}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow \\
\hat U_{pi_1,\dots,i_s,\dots,pi_n,F} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q & & \overline{\theta}^p
\end{array}$$

2) *если* $(i_1,\dots,i_n) = (r_1,\dots,r_n)$, *то коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc}
\hat U_{r_1,\dots,r_n,L} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q & & \overline{\theta} \\
{\scriptstyle N_{L/F}}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\hat U_{pr_1,\dots,r_s,\dots,pr_n,L} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q & & \overline{\theta}^p - \overline{\theta}\,\overline{\theta}_0^{p-1}
\end{array}$$

3) *если* $(i_1,\dots,i_n) > (0,\dots,0)$, *то коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc}
\hat U_{r_1+i_1,\dots,r_s+pi_s,\dots,r_n+i_n,L} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q & & \overline{\theta} \\
{\scriptstyle N_{L/F}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow \\
\hat U_{pr_1+i_1,\dots,r_s+i_s,\dots,pr_n+i_n,F} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}_q & & -\overline{\theta}\,\overline{\theta}_0^{p-1}
\end{array}$$

Доказательство. Если $f(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$, где $a_0 = (-1)^p N_{L/F}t_{s,L} = (-1)^p t_{s,F}$, то из (4.3) вытекает, что

$$t_{s,F}\mathrm{Tr}_{L/F}\left(\frac{1}{t_{s,L}f'(t_{s,L})}\right) = (-1)^p\mathrm{Tr}_{L/F}\left(\frac{a_0}{t_{s,L}f'(t_{s,L})}\right) = (-1)^{p+1},$$

поэтому, учитывая (4.2), получаем

$$\mathrm{Tr}_{L/F}(t_{s,L}^{-1-(r_s+1)(p-1)}\varepsilon_1^{-1}) = (p-1)!\,\theta_0^{p-1}t_n^{(p-1)r_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{-1}\cdot\ldots\cdot t_1^{(p-1)r_1}.$$

Пусть $t_{s,F} = t_{s,L}^p\varepsilon_2$, тогда

$$\mathrm{Tr}_{L/F}(t_{s,L}^{r_s}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{r_s+1}) = (p-1)!\,\theta_0^{p-1}t_n^{(p-1)r_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{(p-1)r_1}.$$

Пользуясь (4.1), можно записать

$$1 = N_{L/F}(1+\theta_0 t_n^{r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{r_1}+\dots) = N_{L/F}(1+\theta_0 t_n^{r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{r_1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{r_s+1}+\beta),$$

где β состоит из слагаемых более высоких порядков, чем предыдущие. Согласно лемме 4.1, если $\alpha\in t_n^{2r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{2r_1}\mathfrak{O}_L$, то

$$\mathrm{Tr}_{L/F}\alpha \in t_n^{r_n(p+1)}\cdot\ldots\cdot t_{sF}^{r_s+1+[(r_s-1)/p]}\mathfrak{O}_{s,F},$$

поэтому благодаря лемме 4.2

$$1 = 1 + N_{L/F}(\theta_0 t_n^{r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{r_1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{r_s+1}+\beta) + \mathrm{Tr}_{L/F}(\theta_0 t_n^{r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{r_1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{r_s+1}+\beta)+\dots =$$
$$= (1+\theta_0^p t_n^{pr_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{pr_1}+\dots) + \theta_0^p(p-1)!\,t_n^{pr_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{pr_1} + \mathrm{Tr}_{L/F}\beta.$$

Таким образом, $\mathrm{Tr}_{L/F}\beta \in t_n^{pr_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pr_1}\mathfrak{M}_F$, значит, для произвольного $\eta \in \mathfrak{O}_F$ имеем

$$N_{L/F}(1+\eta(t_{s,L}^{-1}\sigma(t_{s,L})-1)) = N_{L/F}(1+\eta(\theta_0 t_n^{r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{r_1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{r_s+1}+\beta)) =$$
$$= 1+\theta_0^p(\eta^p-\eta)t_n^{pr_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{pr_1}+\ldots$$

Отсюда получаем вторую и третью диаграммы и первую диаграмму в случае $(i_s,\ldots,i_n)=(r_s,\ldots,r_n)$.

Наконец, при $(i_s,\ldots,i_n)<(r_s,\ldots,r_n)$ из лемм 4.1 и 4.2 следует для $\eta\in U_F$

$$N_{L/F}(1+\eta t_n^{i_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1}) = 1+\eta^p t_n^{pi_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{i_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{pi_1}+$$
$$+\eta t_n^{i_n+r_n(p-1)}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{r_s+1+[(i_s-1-r_s)/p]}\beta,$$

где $\beta\in\mathfrak{O}_{s,F}$.

Следствие 1 предложения 4.1.

$$U_{pr_1+1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n,F}\subset N_{L/F}U_L;\quad U_{pr_1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n,F}\not\subset N_{L/F}U_L.$$

Следствие 2 предложения 4.1. *Если r_s не делится на p, то $(pr_1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n)<(pe'_1,\ldots,pe'_n)$, где $v_F(p)=(e_1,\ldots,e_n)$, $e'_i=e_i/(p-1)$. Если r_s делится на p, то $\mu_p\subset F^*$, $(pr_1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n)=(pe'_1,\ldots,pe'_n)$, и $L=F(\sqrt[p]{\alpha})$ для некоторого $\alpha\notin V_F F^{*p}$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 1.2 и следствия 1, предложения 4.1 получаем $(pr_1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n)\leqslant(pe'_1,\ldots,pe'_n)$. Если r_s делится на p, то

$$U_{pr_1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n}\subset V_F^p U_{pr_1+1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n}\subset N_{L/F}V_L,$$

значит, $\mu_p\subset F^*$ и $(pr_1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n)=(pe'_1,\ldots,pe'_n)$. Пусть $L=F(\sqrt[p]{\alpha})$, $\alpha=t_{s,F}^i\varepsilon$; $\varepsilon,\varepsilon^{-1}\in\mathfrak{O}_{s,F}$. Если i делится на p, то $\xi_p=\alpha^{-1/p}\sigma(\alpha^{1/p})$, но из (4.1) следует $\alpha^{-1/p}\sigma(\alpha^{1/p})\in U_{r_1+1,\ldots,r_n,L}$, что приводит к противоречию.

Теорема 4.1. *Пусть L/F — циклическое расширение простой степени или чисто неразветвленное расширение. Тогда индекс $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ равен степени расширения, и в случае чисто неразветвленного расширения $\{t_1,\ldots,t_n\}$ порождает фактор-группу $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ по $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$.*

Доказательство. Будем использовать предложение 3.2 и лемму 3.2. Рассмотрим несколько случаев.

1. L/F — чисто неразветвленное расширение степени l , $L=F(\mu_{q^l-1})$, локальные параметры $t_n,\ldots,t_1$ поля F будут локальными параметрами поля L. Для $\theta\in\mu_{q^l-1}$ имеем

$$N_{L/F}(1+\theta t_n^{i_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1}) = 1+(\mathrm{Tr}_{L/F}\theta)t_n^{i_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1}+\ldots$$

Но след и норма в конечных полях сюръективны, поэтому

$$N_{L/F}U_L=U_F,\quad N_{L/F}UK_n^{\mathrm{top}}(L)=UK_n^{\mathrm{top}}(F). \tag{4.4}$$

Далее, $N_{L/F}\{t_1,\ldots,t_n\}=l\{t_1,\ldots,t_n\}$, значит, $K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)\simeq\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ и $\{t_1,\ldots,t_n\}$ переходит в 1.

2. L/F — нечисто не разветвленное расширение степени l, l — простое число, $l \neq p$. Тогда $L = F(\sqrt[l]{t_{s,F}})$ для некоторого s, $1 \leqslant s \leqslant n$, и $VK_n^{\rm top}(F) \subset lK_n^{\rm top}(F) \subset N_{L/F}K_n^{\rm top}(L)$,

$$N_{L/F}\{t_n, \ldots, \sqrt[l]{t_s, F}, \ldots, t_1\} = \{t_n, \ldots, (-1)^l t_{s,F}, \ldots, t_1\}, \tag{4.5}$$

$$N_{L/F}\{\theta, \sqrt[l]{t_s, F}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n-1}}\} = \{\theta, (-1)^l t_{s,F}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}, \tag{4.6}$$

$$N_{L/F}\{\theta, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\} = l\{\theta, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}, \tag{4.7}$$

где $\theta \in \mu_{q-1}$ и множества $\langle j_1, \ldots, j_{n-1}, s\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают. Таким образом, $K_n^{\rm top}(F)/N_{L/F}K_n^{\rm top}(L) \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, и $\{\theta, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$ переходит при этом в образ $\overline{\theta}$ в $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*l} \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

3. L/F — нечисто не разветвленное расширение степени p. Тогда $L = F(t_{s,L})$, и возьмем в F локальные параметры t_i, $i \neq s$, и $t_{s,F} = N_{L/F}t_{s,L}$, а в L — t_i, $i \neq s$, и $t_{s,L}$. Используя предложение 3.2, выберем в $VK_n^{\rm top}(F)/p$ топологический базис, содержащий символы $\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$, $j_1 < \cdots < j_{n-1}$, если множества $\langle j_1, \ldots, j_{n-1}, s\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают, i_s не делится на p; $\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{s,L}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$, $j_2 < \cdots < j_{n-1}$, если k — наименьшее число, неравное s такое, что i_k не делится на p, то множества $\langle k, s, j_2, \ldots, j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают; если $\mu_p \subset L^*$, то $\{1 + \theta_* t_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot t_1^{pe'_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$, где $\mathrm{v}_L(p) = (e_1, \ldots, e_n), e'_i = e_i/p - 1$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{n-1} \leqslant n$. Тогда

$$N_{L/F}\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\} =$$
$$= \{N_{L/F}(1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}), t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\},$$
$$N_{L/F}\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{s,L}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n-1}}\} =$$
$$= \{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{s,F}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}.$$

Далее, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in N_{L/F}K_n^{\rm top}(L)$, если $\alpha_1 = t_{s,F}$ или $\alpha_1 \in \mu_{q-1}$, или $\alpha_1 \in U_{pr_1+1, \ldots, pr_n, F}$ (ввиду следствия 1 предложения 4.1). Кроме того, из первой диаграммы предложения 4.1 следует, что

$$\{1 + \theta t_n^{pi_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pi_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\} \in N_{L/F}K_n^{\rm top}(L) + U_{pi_1+1, \ldots, pi_n}K_n^{\rm top}(F).$$

Значит, $K_n^{\rm top}(F)/N_{L/F}K_n^{\rm top}(L)$ — циклическая группа порядка p и порождается символом $\{1 + \theta_* t_n^{pr_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pr_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$, где множества $\langle s, j_1, \ldots, j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают, и образ $\overline{\theta}_*$ в $\mathbb{F}_q$ не принадлежит образу правого вертикального гомоморфизма во второй диаграмме предложения 4.1.

Следствие 1 теоремы 4.1. *Если $\mu_p \subset F^*, L/F$ — расширение степени p, не являющееся чисто не разветвленным, то*

$$\{\omega_*\}K_{n-1}^{\rm top}(F) \subset N_{L/F}K_n^{\rm top}(L)$$

тогда и только тогда, когда $L = F(\sqrt[p]{\varepsilon})$ для $\varepsilon \in V_F$.

Следствие 2 теоремы 4.1. *Пусть Σ/F — конечное расширение Галуа, не содержащее промежуточных подрасширений, являющихся чисто не разветвленными, Σ'/F — циклическое подрасширение, Σ/Σ' — циклическое расширение p, M^0/F — чисто не разветвленное расширение, $M' = M^0\Sigma'$, $M = M^0\Sigma$, σ — образующая* $\mathrm{Gal}(M'/M^0)$. *Пусть $\{\omega_{*,\Sigma'}\} \cdot K_{n-1}^{\rm top}(\Sigma') \subset N_{\Sigma/\Sigma'}K_n^{\rm top}(\Sigma)$. Тогда из*

$$i_{\Sigma'/M'}x \in (1-\sigma)K_n^{\rm top}(M') + pK_n^{\rm top}(M')$$

для $x \in K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma')$ *следует* $x \in N_{\Sigma/\Sigma'} K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$.

Доказательство. Из предложения 3.2 вытекает, что

$$\{\omega_{*,\Sigma'}\} \cdot K_{n-1}^{\mathrm{top}}(\Sigma')/p \supset \ker(K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma')/p \to K_n^{\mathrm{top}}(M')/p).$$

Из теоремы 4.1 получаем, что $(1-\sigma)K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma') \subset N_{\Sigma/\Sigma'}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$. Но если x удовлетворяет условию следствия, то $x \in (1-\sigma)K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma') + pK_n^{\mathrm{top}}(\Sigma')$.

Теорема 4.2. *Пусть* L/F *— циклическое расширение простой степени,* σ *— образующая* $\mathrm{Gal}(L/F)$, $1 \leqslant m \leqslant n+1$. *Тогда последовательность*

$$K_m^{\mathrm{top}}(L) \overset{1-\sigma}{\to} K_m^{\mathrm{top}}(L) \overset{N_{L/F}}{\to} K_m^{\mathrm{top}}(F)$$

точна.

Доказательство. Пусть $|L : F| = l$. Заметим, что если $N_{L/F}x = 0$, то $lx = lx - i_{F/L}N_{L/F}x = (1-\sigma)y$. Поэтому можно считать $\mu_l \subset F^*$, так как $F(\mu_l)/F$ — расширение степени взаимно-простой с l. Предположим, что последовательность

$$K_m^{\mathrm{top}}(F)/l \oplus K_m^{\mathrm{top}}(L)/l \xrightarrow{i_{F/L}\oplus(1-\sigma)} K_m^{\mathrm{top}}(L)/l \xrightarrow{N_{L/F}} K_m^{\mathrm{top}}(F)/l \qquad (4.8)$$

точная. Далее в теореме 6.2 будет показано, что если $lx = 0$ для $x \in K_m^{\mathrm{top}}(F)$, то $x = \{\xi_l, x'\}$ для некоторых $x' \in K_{m-1}^{\mathrm{top}}(F)$, $\xi_l \in \mu_l$. Тогда если $N_{L/F}x = 0$, то из (4.8) следует $x = i_{F/L}y + (1-\sigma)z_1 + lz_2$, где $y \in K_m^{\mathrm{top}}(F)$; $z_1, z_2 \in K_m^{\mathrm{top}}(L)$. Имеем $0 = N_{L/F}x = l(y + N_{L/F}z_2)$, следовательно, $y + N_{L/F}z_2 = \{\xi_l, x'\}$ для некоторого $x' \in K_{m-1}^{\mathrm{top}}(F)$, и если $L = F(\sqrt[l]{\alpha})$, $\sigma(\alpha) = \xi_l\alpha$, то $i_{F/L}(y + N_{L/F}z_2) = i_{F/L}y + (1 + \dots + \sigma^{l-1})z_2 = (\sigma - 1)\{\alpha, x'\}$ и $x = (1-\sigma)w$, где $w \in K_m^{\mathrm{top}}(L)$. Это доказывает теорему.

Для проверки (4.8) рассмотрим несколько случаев. При этом используем предложение 3.2 и лемму 3.2.

1. L/F — чисто не разветвленное расширение простой степени l, $L = F(\theta')$, $\theta' \in \mu_{q^l-1}$, $t_n, \dots, t_1$ — локальные параметры, которые будут локальными параметрами L. Тогда $VK_m^{\mathrm{top}}(F) \subset lK_m^{\mathrm{top}}(F)$,

$$N_{L/F}\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \dots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} = \{1 + (\mathrm{Tr}_{L/F}\theta)t_n^{i_n} \cdot \dots \cdot t_1^{i_1} + \dots, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\},$$
$$N_{L/F}\{\theta, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} = \{N_{L/F}\theta, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\},$$
$$N_{L/F}\{\omega_{*,L}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} = \{\omega_{*,F}\varepsilon^p, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\},$$

где $\varepsilon \in V_F$, если $l = p$. Поэтому (4.8) является точной последовательностью.

2. L/F — нечисто не разветвленное расширение степени l, $l \neq p$. Тогда ввиду леммы 1.3 $L = F(\sqrt[l]{t_{s,F}})$ для некоторого s и аналоги соотношений (4.5), (4.6), (4.7) с учетом $\sigma(t_{s,F}^{1/l}) \in t_{s,F}^{1/l}\mu_l$ дают (4.8).

3. L/F — нечисто не разветвленное расширение степени p. Пусть $L = F(t_{s,L})$, возьмем в F локальные параметры t_i, $i \neq s$, и $t_{s,F} = N_{L/F}t_{s,L}$, в L — локальные параметры t_i, $i \neq s$ и $t_{s,L}$. Возьмем в $VK_m^{\mathrm{top}}(L)/p$ следующий топологический базис: (S и I — как в лемме 1.2, B — как в предложении 2.1)

$$\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \dots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \dots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\},$$

$\theta \in S$, i_s не делится на p, $(i_1, \dots, i_n) \in I$, $j_1 < \dots < j_{m-1}$ образуют все $(m-1)$-элементные подмножества J из B, для которых $s \notin J$;

$$\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \dots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \dots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\},$$

$\theta \in S$, $(i_1, \dots, pi_s, \dots, i_n) \in I$, $j_1, \dots, j_{m-1}$ образуют все $(m-1)$-элементные подмножества J из B, для которых $k \notin J$, где k — наименьшее число от 1 до n, неравное s, для которого i_k не делится на p, причем если $s \in J$, то $j_1 = s, j_2 < \dots < j_{m-1}$, а если $s \notin J$, то $j_1 < \dots < j_{m-1}$; так как $\mu_p \subset F^*$, то к описанным символам добавляются еще

$$\{1 + \theta_* t_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{e'_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pe'_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\},$$

где $\mathbf{v}_L(p) = (e_1, \dots, e_n)$, значит, e_s делится на $e'_i = e_i/(p-1)$, θ_* выбирается так, что $1 + \theta_* t_n^{pe'_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{e'_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pe'_1} \notin L^{*p}$, множества $\langle j_1, \dots, j_{m-1}\rangle$ дают все подмножества J из B, причем если $s \in J$, то $j_1 = s, j_2 < \dots < j_{m-1}$, а если $s \notin J$, то $j_1 < \dots < j_{m-1}$.

Сделаем предварительно два замечания. Во-первых, если i_s не делится на p и s не принадлежит множеству $\langle j_1, \dots, j_{m-1}\rangle$, то из (4.1) имеем

$$\begin{aligned}(1-\sigma)\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &= \\ = \{1 - i_s\theta_0\theta t_n^{i_n+r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s+r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1+r_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &+ y,\end{aligned}$$

где $y \in U_{i_1+r_1+1,\dots,i_n+r_n} K_m^{\mathrm{top}}(L) + pK_m^{\mathrm{top}}(L)$, поэтому

$$\begin{aligned}\{1 + \theta t_n^{i_n+r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s+r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1+r_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &\in \\ \in (1-\sigma)K_m^{\mathrm{top}}(L) + pK_m^{\mathrm{top}}(L) + U_{i_1+r_1+1,\dots,i_n+r_n} K_m^{\mathrm{top}}(L),&\end{aligned} \tag{4.9}$$

если i_s не делится на p, $s \notin \langle j_1, \dots, j_{m-1}\rangle$. Во-вторых, из (4.1) и леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned}(1-\sigma)\{1 + \theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{s,L}, t_{j_2}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &= \\ = -\{1 + \theta\theta_0 t_n^{i_n+r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{pi_s+r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1+r_1}, t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{pi_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, \dots\} &+ y,\end{aligned}$$

где $y \in U_{i_1+r_1+1,\dots,pi_s+r_s,\dots,i_1+r_1} K_m^{\mathrm{top}}(L) + pK_m^{\mathrm{top}}(L)$, поэтому

$$\begin{aligned}\{1 + \theta t_n^{i_n+r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{pi_s+r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1+r_1}, t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{pi_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &\in \\ \in (1-\sigma)K_m^{\mathrm{top}}(L) + pK_m^{\mathrm{top}}(L) + U_{i_1+r_1+1,\dots,i_n+r_n} K_m^{\mathrm{top}}(L).&\end{aligned} \tag{4.10}$$

Перейдем к проверке точности (4.8). Отметим, что

$$\begin{aligned}N_{L/F}\{t_{s,L}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &= \{t_{s,F}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\}, \\ N_{L/F}\{\theta, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\} &= \{\theta^p, t_{j_1}, \dots, t_{j_{m-1}}\}.\end{aligned}$$

Пусть $x = \sum c_u x_u$, где $c_u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, x_u — символы описанного вида и $N_{L/F}x \in pK_m^{\mathrm{top}}(F)$. Пусть $(i'_1, \dots, i'_n)$ — наименьший индекс, для которого $c_{u'} \neq 0$, обозначим через x' сумму всех слагаемых вида $c_u x_u$, для которых элемент из группы единиц, стоящий на первом месте символа x_u тоже не принадлежит $U_{i'_1+1,\dots,i'_n,L}$. Рассмотрим несколько вариантов.

a) $x' = \sum c_u\{1 + \theta_u t_n^{i'_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i'_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i'_1}, t_{j_1(u)}, \dots, t_{j_{m-1}(u)}\}$. Если s не принадлежит множеству $\langle j_1(u), \dots, j_{m-1}(u)\rangle$, то $x_u \in i_{F/L}K_m^{\mathrm{top}}(F)$. Пусть x'' — это сумма тех слагаемых в рассматриваемой сумме, для которых s принадлежит $\langle j_1(u), \dots, j_{m-1}(u)\rangle$. Тогда (если $y \in K_m^{\mathrm{top}}(F)$, $z \in U_{i'_1+1,\dots,i'_n} K_m^{\mathrm{top}}(F)$)

$$N_{L/F}x'' = \sum c_u\{1 + \theta_u t_n^{i'_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i'_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i'_1}, t_{s,F}, t_{j_2(u)}, \dots, t_{j_{m-1}(u)}\} = py + z.$$

Если $(i'_1, \dots, pi'_s, \dots, i'_n) = (pe'_1, \dots, pe'_n)$, то из предложения 3.2 следует, что в выражении для $N_{L/F}x''$ все $c_u = 0$. Если $(i'_1, \dots, pi'_s, \dots, i'_n) < (pe'_1, \dots, pe'_s, \dots, pe'_n)$, то опять ввиду предложений 3.2 и 4.1 получаем, что $c_u = 0$.

б) $x' = \sum c_u\{1+\theta_u t_n^{i'_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,L}^{i'_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{i'_1}, t_{j_1(u)},\ldots,t_{j_{m-1}(u)}\}$ и i'_s не делится на p, s не принадлежит множествам $\langle j_1(u),\ldots,j_{m-1}(u)\rangle$ и $(i'_1,\ldots,i'_n) < (pe'_1,\ldots,pe'_n)$.

б.1) Если $(i'_1,\ldots,i'_n) < (r_1,\ldots,r_n)$, то из первой диаграммы предложения 4.1 имеем

$$N_{L/F}x' = \sum c_u\{1+\theta_u^p t_n^{pi'_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{i'_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{pi'_1}, t_{j_1(u)},\ldots,t_{j_{m-1}(u)}\} + y,$$

где $y \in U_{pi'_1},+1,\ldots,i'_s,\ldots,pi'_n K_m^{\mathrm{top}}(F)$, поэтому все $c_u = 0$.

б.2) Если $(i'_1,\ldots,i'_n) = (r_1,\ldots,r_n)$, то из второй диаграммы предложения 4.1 имеем

$$N_{L/F}x' = \sum c_u\{1+\theta_u^p - \theta_u\theta_0^{p-1} t_n^{pr_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{pr_1}, t_{j_1(u)},\ldots,t_{j_{m-1}}(u)\} + y,$$

где $y \in U_{pr_1+1,\ldots,r_s,\ldots,pr_n}K_m^{\mathrm{top}}(F)$. Тогда $c_u = 0$, если только вычет $\theta_u^p - \theta_u\theta_0^{p-1}$ в $\mathbb{F}_q$ не равен 0. Но из $\overline{\theta}_u^p - \overline{\theta}_u\overline{\theta}_0^{p-1} = 0$ следует $\overline{\theta}_u \in \overline{\theta}_0\mathbb{F}_p$, значит, из (4.1) получаем, что $1+\theta_u t_n^{r_n}\cdot\ldots\cdot t_1^{r_1} = (t_{s,L}^{-1}\sigma(t_{s,L}))^a\varepsilon$ для некоторого целого a и $\varepsilon \in U_{r_1+1,\ldots,r_n}K_m^{\mathrm{top}}(L)$. А это влечет

$$x' \in (1-\sigma)K_m^{\mathrm{top}}(L) + pK_m^{\mathrm{top}}(L) + U_{r_1+1,\ldots,r_n}K_m^{\mathrm{top}}(L).$$

б.3) Если $(i'_1,\ldots,i'_n) > (r_1,\ldots,r_n)$, то благодаря (4.9) можно считать, что (для $(i_1,\ldots,i_n) > (0,\ldots,0)$)

$$x' = \sum c_u\{1+\theta_u t_n^{i_n+r_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,L}^{pi_s+r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1+r_1}, t_{j_1(u)},\ldots,t_{j_{m-1}(u)}\},$$

поэтому r_s не делится на p. Из третьей диаграммы предложения 4.1 имеем

$$N_{L/F}x' = \sum c_u\{1-\theta_u\theta_0^{p-1} t_n^{i_n+pr_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,F}^{i_s+r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1+pr_1}, t_{j_1(u)},\ldots,t_{j_{m-1}(u)}\} + y,$$

где $y \in U_{i_1+pr_1+1,\ldots,i_s+r_s,\ldots,i_n+pr_n}K_m^{\mathrm{top}}(F)$. Из предложения 3.2 теперь следует, что если $c_u \neq 0$, то i_k делится на p для всех k, не принадлежащих $\langle s, j_1(u),\ldots,j_{m-1}(u)\rangle$, и $i_s + r_s$ делится на p. Для тех u, для которых $c_u \neq 0$, ввиду (4.10) можно считать, что все индексы $i_{j_1(u)},\ldots,i_{j_{m-1}(u)}$ делятся на p. Тогда получаем

$$N_{L/F}(1+\theta_u t_n^{i_n+r_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,L}^{i_s+r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1+r_1}) = \varepsilon_1^p\varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1 \in U_{i_1/p+r_1,\ldots,(i_s+r_s)/p,\ldots,i_n/p+r_n,F}, \varepsilon_2 \in U_{i_1+pr_1+1,\ldots,i_s+r_s,\ldots,i_n+pr_n,F}$. Предложение 4.1 и теорема Гильберта 90 для полей дают теперь

$$1+\theta_u t_n^{i_n+r_n}\cdot\ldots\cdot t_{s,L}^{pi_s+r_s}\cdot\ldots\cdot t_1^{i_1+r_1} = \varepsilon_1\varepsilon'_2\cdot(1-\sigma)\alpha,$$

где $\varepsilon'_2 \in U_{i_1+r_1+1,\ldots,pi_s+r_s,\ldots,i_n+r_n,L}$, $\alpha \in L^*$, значит,

$$x^1 \in (1-\sigma)K_m^{\mathrm{top}}(L) + i_{F/L}K_m^{\mathrm{top}}(F) + U_{i_1+r_1+1,\ldots,pi_s+r_s,\ldots,i_n+r_n}K_m^{\mathrm{top}}(L).$$

Теорема доказана.

Предложение 4.2. *Если L/F — чисто не разветвленное расширение, σ — образующая* $\mathrm{Gal}(L/F)$, *то $K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ является циклической группой порядка $|L:F|$ и порождается $\{t_1,\ldots,t_n\}$, и последовательность*

$$K_n^{\mathrm{top}}(L) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^{\mathrm{top}}(L) \xrightarrow{N_{L/F}} K_n^{\mathrm{top}}(F)$$

точна.

Доказательство. Первое утверждение следует из доказательства теоремы 4.1. Второе докажем индукцией по числу делителей $|L:F|$. База индукции содержится в теореме 4.1. Инд. переход. Пусть $L \supset L' \supset F$, $|L:L'|$ — простое число и $N_{L/F}x = 0$, тогда $N_{L'/L}(N_{L/L'}x) = 0$, следовательно, $N_{L/L'}x = (1-\sigma)y$ для $y \in K_n^{\mathrm{top}}(L')$, но $i_{F/L'}K_n^{\mathrm{top}}(F) \not\subseteq N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, так как в противном случае $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) \supseteq |L' : F|K_n^{\mathrm{top}}(F)$, что противоречит первому утверждению предложения. Но $N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ имеет простой индекс в $K_n^{\mathrm{top}}(L')$ ввиду теоремы 4.1, значит,

$$N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L) + i_{F/L'}K_n^{\mathrm{top}}(F) = K_n^{\mathrm{top}}(L'),$$

поэтому $N_{L/L'}x = N_{L/L'}(1-\sigma)z$ для $z \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $x = (1-\sigma)z + (1-\sigma^l)w$, где $l = |L' : F|$.

Предложение 4.3. *Пусть $\mu_p \subset F^*, L = F(\sqrt[p]{t_s})$, где t_s — локальный параметр поля F, $G = \mathrm{Gal}(L/F)$. Тогда для $1 \leqslant m \leqslant n+1$ последовательность*

$$K_m^{\mathrm{top}}(F)/p \to (K_m^{\mathrm{top}}(L)/p)^G \xrightarrow{N_{L/F}} K_m^{\mathrm{top}}(F)/p$$

точная.

Доказательство. Положим $\sqrt[p]{t_s} = t_{s,L}, (-1)^p t_s = t_{s,F}$ и рассмотрим в $VK_m^{\mathrm{top}}(L)/p$ топологический базис, описанный в части 3 доказательства теоремы 4.2. Ввиду точности последовательности (4.8), если $N_{L/F}x \in pK_m^{\mathrm{top}}(F), x \in VK_m^{\mathrm{top}}(L)$, то $x = (1-\sigma)y + i_{F/L}z + pw$, где σ — образующая $\mathrm{Gal}(L/F)$, $y,w \in K_m^{\mathrm{top}}(L), z \in K_m^{\mathrm{top}}(F)$.

Заметим, что $(1-\sigma)\{1+\theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{s,L}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{m-1}}\}$ принадлежит $i_{F/L}K_m^{\mathrm{top}}(F)$, если s не принадлежит $< j_2, \ldots, j_{m-1} >$. Значит, $x \equiv \sum c_u(\sigma - 1)x_u \mod pK_m^{\mathrm{top}}(L) + i_{F/L}K_m^{\mathrm{top}}(F)$, где x_u — элемент топологического базиса вида $\{1+\theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{m-1}}\}$, причем i_s не делится на p, множество $< j_1, \ldots, j_{m-1} >$ не содержит s. При этом имеем $(\sigma-1)(1+\theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}) = 1 + i_s\theta_0\theta t_n^{i_n+e'_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s+e'_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1+e'_1} + \ldots$, где $\mathbf{v}_L(p) = (e_1, \ldots, e_n)$, $e'_i = e_i/(p-1)$, e'_s делится на p. Так как $(\sigma-1)x \in pK_m^{\mathrm{top}}(L)$, то $(i_1, \ldots, i_n) + (e'_1, \ldots, e'_n) > (pe'_1, \ldots pe'_n) - (e'_1, \ldots, e'_n)$. Наконец, из формулы

$$(1+\theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1})^p = 1 + \theta^p t_n^{pi_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pi_1} + p\theta t_n^{i_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{i_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1} + \ldots$$

следует, что $U_{e_1+1,\ldots,e_n} \subset V_L^p V_F$, значит, $x \in pK_m^{\mathrm{top}}(L) + i_{F/L}K_m^{\mathrm{top}}(F)$.

Предложение 4.4. *В условиях обозначений части 1 доказательства теоремы 5.1 пусть L/F — расширение простой степени l, не являющееся чисто не разветвленным, Π_Σ — простой элемент $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, Σ — поле неподвижных элементов относительно действия $\varphi_L\tilde{\sigma}$, где $\tilde{\sigma}$ — не единичный элемент $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/\tilde{F})$, φ_L — автоморфизм Фробениуса $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/L)$. Тогда*

$$N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma) \not\subseteq N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L).$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1 достаточно показать, что $N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma) \neq N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$. Пусть M — композит полей Σ и L, тогда $M \subset \tilde{L}$ и M/M^0 — расширение Галуа степени l. Рассмотрим несколько случаев.

1. $l \neq p$. Тогда, так же как в доказательстве теоремы 4.1, части 2, $\mu_l \subset F^*$, $L = F(\sqrt[l]{t_{s,F}})$, $\Sigma = F(\sqrt[l]{t'_{s',F}})$. Если $s' \neq s$, то $\{\theta, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$ принадлежит $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, но не принадлежит $N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, где θ — образующая μ_{q-1}, множества $\langle s', j_1, \ldots, j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают.

Если $s' = s$, то так как $\Sigma \neq L$ и группа V_F — l-делима (лемма 1.3), то можно считать $t_{s,F} = t'_{s,F} t_{s-1}^{i_{s-1}} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}\theta$, где $\overline{\theta}$ — некоторая образующая $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*l}$. Но тогда $\{t_1, \ldots, (-1)^l t_{s,F}, \ldots, t_n\}$ принадлежит $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, но не принадлежит $N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$.

2. $l = p$. Пусть $L = F(t_{s,L}), \Sigma = F(t_{s',\Sigma})$. Если $s' \neq s$, то из части 3 доказательства теоремы 4.1 следует, что $\{1 + \theta_* t_n^{pr_n} \cdot \ldots \cdot t_{s',F}^{r_{s'}} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{pr_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1}, t_{s,F}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$ принадлежит $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и не принадлежит $N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, где $t_{s',F} = N_{\Sigma/F}t_{s',\Sigma}$, $t_{s,F} = N_{L/F}t_{s,L}$, множества $\langle s, s', j_2, \ldots, j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают, и образ θ_* в $\mathbb{F}_q$ не принадлежит образу правого вертикального гомоморфизма во второй диаграмме предложения 4.1.

Если $s' = s$, то пусть $t_{s,\Sigma} = t_{s,L}\varepsilon\theta$, где $\varepsilon \in V_M$, $\theta \in U_M$ принадлежит группе корней из единицы степени взаимно-простой с p в поле M. Но $N_{M/M^0}t_{s,L}$, $N_{M/M^0}t_{s,\Sigma}$ принадлежат F, следовательно, $\theta \in F^*$ и можно (изменив, если нужно $t_{s,L}$) считать, что $t_{s,\Sigma} = t_{s,L}\varepsilon$, $\varepsilon \in V_M$. Пусть

$$\frac{\tilde{\sigma} t_{s,L}}{t_{s,L}} = 1 + \theta_0 t_n^{r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1} + \ldots$$

— аналог формулы (4.1). Имеем

$$1 = \frac{(\varphi_L\tilde{\sigma})t_{s,\Sigma}}{t_{s,\Sigma}} = \frac{\tilde{\sigma}(t_{s,L})}{t_{s,L}} \frac{(\varphi_L\tilde{\sigma})\varepsilon}{\varepsilon},$$

поэтому

$$\varepsilon = 1 + \theta_1 t_n^{r_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,L}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{r_1} + \ldots; \qquad \theta_1 \in M, \varphi_L\theta_1 - \theta_1 + \theta_0 \in \mathfrak{M}_M. \tag{4.11}$$

Если $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) = N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, то $\{N_{M/M^0}\varepsilon, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{m-1}}\} \in i_{F/M^0}N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, где множества $\langle s, j_1, \ldots, j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают. Из предложения 4.1 следует, что

$$N_{M/M^0}\varepsilon = 1 + (\theta_1^p - \theta_1\theta_0^{p-1})t_n^{pr_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pr_1} + \ldots,$$

где $t_{s,F} = N_{L/F}t_{s,L}$. Кроме того, $N_{M/M^0}\varepsilon = N_{M/M^0}t_{s,\Sigma}(N_{M/M^0}t_{s,L})^{-1} \in V_F$, поэтому из следствия 1 предложения 4.1 получаем

$$i_{F/M^0}\{1 + (\theta_1^p - \theta_1\theta_0^{p-1})t_n^{pr_n} \cdot \ldots \cdot t_{s,F}^{r_s} \cdot \ldots \cdot t_1^{pr_1}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\} \in i_{F/M^0}N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L).$$

Если r_s не делится на p, то из следствия 2 предложений 4.1 и 3.2 вытекает, что для некоторого $\theta_2 \in U_F$ $(\theta_1^p - \theta_1\theta_0^{p-1}) - (\theta_2^p - \theta_2\theta_0^{p-1}) \in \mathfrak{M}_F$. Тогда в последнем поле вычетов цепочки полей, определяющей поле M, $\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1 \in \overline{\theta}_0\mathbb{F}_p$, что противоречит (4.11). Если r_s делится на p, то ввиду следствия 2 предложения 4.1 можно считать, что $\mu_p \subset F^*$. Возьмем $(-1)^p t_{s,L} = \sqrt[p]{t_{s,F}}$, $(-1)^p t_{s,\Sigma} = \sqrt[p]{t'_{s,F}}$. Пусть $t_{s,\Sigma} = t_{s,F}t_{s-1}^{i_{s-1}} \cdot \ldots \cdot t_1^{i_1}\varepsilon$, где $\varepsilon \in V_M$, тогда $t'_{s,F} = t_{s,F}t_{s-1}^{pi_{s-1}} \cdot \ldots \cdot t_1^{pi_1}\varepsilon^p, \varepsilon^p \notin V_F^p$, но $\varepsilon^p \in V_{M^0}^p$. Значит, $\varepsilon^p = \omega_{*,F}^i\varepsilon'^p$ для некоторого $i, 0 < i < p, \varepsilon' \in V_F$. Следовательно, ввиду (3.7) и следствия 1 теоремы 4.1 $\{t_{s,F}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-1}}\}$ принадлежит $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, но не принадлежит $N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, где множества $\langle s, j_1, \ldots, j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1, \ldots, n\rangle$ совпадают. Предложение доказано.

с

ш

§ 5. Построение теории полей классов

Максимальное чисто не разветвленное расширение поля F обозначим через $\tilde F$, тогда $\tilde F = \cup F(\mu_N)$ по всем N взаимно-простым с p, $\mathrm{Gal}(\tilde F/F)$ изоморфна $\hat{\mathbb Z}$. Элемент $\mathrm{Gal}(\tilde F/F)$, переходящий в единицу (подъем автоморфизма Фробениуса с $G_{\mathbb F_q} = \mathrm{Gal}(\mathbb F_q^{\mathrm{sep}}/\mathbb F_q)$, назовем автоморфизмом Фробениуса φ_F. $\tilde F$ определяет сюръективный гомоморфизм $\deg_F : G_F \to \hat{\mathbb Z}$. Для конечного расширения полей L/F положим $\tilde L = L\tilde F$ и $f_{L/F} = |L^0 : F|$, где $L^0 = L\cap \tilde F$, тогда $\deg_F$ индуцирует сюръективный гомоморфизм $\deg_L = \frac{1}{f_{L/F}}\deg_F : G_L \to \mathbb Z$ с ядром $G_{\tilde L}$.

Если L/F — конечное расширение Галуа, то $\deg_F$ индуцирует также сюръективный гомоморфизм $\deg_F : \mathrm{Gal}(\tilde L/F) \to \hat{\mathbb Z}$. Введем обозначение $\varnothing(\tilde L/F)$ для множества тех автоморфизмов $\tilde\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde L/F)$, для которых $\deg_F(\tilde\sigma)$ — положительное целое число. Тогда для $\tilde\sigma \in \varnothing(\tilde L/F)$ выполняется $\tilde\sigma|_{\tilde F} = \varphi_F^{\deg_F(\tilde\sigma)}$.

Предложение 5.1. 1) *Отображение* $\varnothing(\tilde L/F) \to \mathrm{Gal}(L/F), \tilde\sigma \to \tilde\sigma|_L$ *сюръективно*; 2) *если* $\sum$ *— поле неподвижных элементов* $\tilde\sigma \in \varnothing(\tilde L/F)$, *то* $\deg_F(\tilde\sigma) = f_{\Sigma/F}$; 3) *степень расширения* Σ/F *конечна*; 4) $\tilde\Sigma = \tilde L$; 5) $\tilde\sigma = \varphi_\Sigma$.

Доказательство. 1) Если $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$, то пусть $\sigma|_{L^0} = \varphi_F^m|_{L^0}$ для некоторого $m > 0$, $\tilde\varphi$ — расширение φ_F на $\tilde L$. Тогда $\sigma\tilde\varphi^{-m}|_L \in \mathrm{Gal}(L/F)$, следовательно, $\sigma\tilde\varphi^{-m}|_L = \tau|_L$ для некоторого $\tau \in \mathrm{Gal}(\tilde L/\tilde F)$ и $\tilde\sigma = \tau\tilde\varphi^m$ переходит в σ. 2) $f_{\Sigma/F} = |\Sigma^0 : F|$, но $\Sigma^0 = \Sigma \cap \tilde F$ — поле неподвижных элементов $\tilde\sigma|_{\tilde F} = \varphi_F^{\deg_F(\tilde\sigma)}$. 3) $|\Sigma : F| = |\Sigma : \Sigma^0| \cdot |\Sigma^0 \cdot F|$ и $|\Sigma : \Sigma^0| = |\Sigma\tilde F : \tilde F| \leqslant |\tilde L : \tilde F|$. 4) Сюръективный гомоморфизм $\mathrm{Gal}(\tilde L/\Sigma) \to \mathrm{Gal}(\tilde\Sigma/\Sigma)$ является изоморфизмом. 5) $f_{\Sigma/F} = \deg_F(\tilde\sigma) = f_{\Sigma/F}\deg_\Sigma(\tilde\sigma)$, значит, $\deg_\Sigma$ переводит $\tilde\sigma$ в единицу, т.е. $\tilde\sigma = \varphi_\Sigma$.

Лемма 5.1. *Если* $v_F : K_n^{\mathrm{top}}(F) \to \mathbb Z$ *— сюръективный гомоморфизм, определенный в* (3.5) *и* L/F *— конечное расширение полей, то* $v_L = \frac{1}{f_{L/F}} v_F \circ N_{L/F}$ *и для* $\sigma \in G_F$ *имеем* $v_L = v_{\sigma L} \circ \sigma$.

Доказательство. Следует из свойств ∂, N [14].

Любой элемент $\Pi_F \in K_n^{\mathrm{top}}(F)$, *для которого* $v_F(\Pi_F) = 1$, *будем называть простым элементом* $K_n^{\mathrm{top}}(F)$. Если $t_n, \dots, t_1$ — локальные параметры, то

$$\Pi_F - \{t_n, \dots, t_1\} \in UK_n^{\mathrm{top}}(F). \tag{5.1}$$

Определение. *Пусть* L/F *— конечное расширение Галуа. Отображение*

$$\mathbf r_{L/F} : \varnothing(\tilde L/F) \to K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) \tag{5.2}$$

зададим формулой $\mathbf r_{\tilde L/F}(\tilde\sigma) \equiv N_{\Sigma/F}\Pi_\Sigma \bmod N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, *где* Π_Σ *— любой простой элемент* $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma), \Sigma$ *— поле неподвижных элементов* $\tilde\sigma \in \varnothing(\tilde L/F)$.

Лемма 5.2. *Отображение* $\mathbf r_{\tilde L/F}$ *корректно определено.*

Доказательство. Если Π_1, Π_2 — два простых элемента $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, то $\Pi_1 - \Pi_2 \in UK_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$. Пусть M — композит полей L,Σ, тогда $M \subset \tilde L$. Из (4.4) следует, что $\Pi_1 - \Pi_2 = N_{M/\Sigma}x$ для $x \in K_n^{\mathrm{top}}(M)$, значит, $N_{\Sigma/F}(\Pi_1 - \Pi_2) = N_{M/F}x = N_{L/F}(N_{M/L}x)$.

Лемма 5.3. *Если L/F и L_1/F_1 — конечные расширения Галуа, $F \subseteq F_1, L \subseteq L_1$, то диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\varnothing(\tilde L_1/F_1) \arrow[r, "\mathrm{r}_{\tilde L_1/F_1}"] \arrow[d] & K_n^{\mathrm{top}}(F_1)/N_{L_1/F_1}K_n^{\mathrm{top}}(L_1) \arrow[d, "N^*_{F_1/F}"] \\
\varnothing(\tilde L/F) \arrow[r, "\mathrm{r}_{\tilde L/F}"] & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, где левое вертикальное отображение — ограничение автоморфизма из $\varnothing(\tilde L_1/F_1)$ на $\tilde L$, правое вертикальное отображение индуцировано отображением нормы $N_{F_1/F}$.

Доказательство. Пусть Σ_1 — поле неподвижных элементов $\tilde\sigma \in \varnothing(\tilde L_1/F_1)$, тогда $\Sigma = \Sigma_1 \cap \tilde L = \Sigma_1 \cap \tilde\Sigma$ — поле неподвижных элементов $\tilde\sigma|_{\tilde L} \in \varnothing(\tilde L/F)$ и $f_{\Sigma_1/\Sigma} = 1$, поэтому $N_{\Sigma_1/\Sigma}\Pi_{\Sigma_1}$ — простой элемент в $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$ и $N_{\Sigma/F}(N_{\Sigma_1/\Sigma}\Pi_{\Sigma_1}) = N_{F_1/F}(N_{\Sigma_1/F_1}\Pi_{\Sigma_1})$.

Лемма 5.4. *Пусть L/F — конечное расширение Галуа, $\tilde\sigma_1, \tilde\sigma_2, \tilde\sigma_3, \in \varnothing(\tilde L/F)$, $\tilde\sigma_3 = \tilde\sigma_2\tilde\sigma_1$, $\sum_i$ — поле неподвижных элементов $\tilde\sigma_i$, Π_i — простой элемент $K_n^{\mathrm{top}}(\sum_i)$, $\sum$ — поле неподвижных элементов подъема $\varphi \in \mathrm{Gal}(\tilde L/F)$ для φ_F. Пусть P/F — расширение Галуа, P содержит $\sum, \sum_i, L$, поле M содержит P и $P \subseteq M \subset \tilde L$, $|M:P| = r$. Тогда найдутся $w \in K_n^{\mathrm{top}}(M^0)$, $u \in UK_n^{\mathrm{top}}(L)$ такие, что*

$$i_{F/M^0}(N_{\sum_3/F}\Pi_3 - N_{\sum_1/F}\Pi_1 - N_{\sum_2/F}\Pi_2 - N_{L/F}u) = rw.$$

Доказательство. Имеем следующие включения:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rrr, dash] \arrow[dd, dash] & & & P \arrow[r, dash] & M \arrow[r, dash] & L \arrow[dd, dash] \\
& \Sigma_i \arrow[urr, dash] \arrow[d, dash] & L \arrow[ur, dash] & & & \\
F \arrow[r, dash] & \Sigma_i^0 \arrow[rr, dash] & & P^0 \arrow[r, dash] & M^0 \arrow[r, dash] & \tilde F
\end{tikzcd}$$

Пусть $m_i = \deg_F(\tilde\sigma_i) = |\sum_i^0 : F|$. Положим $\tilde\sigma_4 = \varphi^{m_2}\tilde\sigma_1\varphi^{-m_2}$, тогда $\deg_F\tilde\sigma_4 = m_4 = m_1$ и $\sum_4 = \varphi^{m_2}\sum_1$ — поле неподвижных элементов $\tilde\sigma_4$. Пусть $\tilde\sigma_i = \tau_1^{-1}\varphi^{m_i}$, где $\tau_i \in \mathrm{Gal}(\tilde L/\tilde F)$, тогда $\tau_3 = \tau_4\tau_2$, и надо проверить существование $w \in K_n^{\mathrm{top}}(M^0)$, $u \in UK_n^{\mathrm{top}}(L)$ таких, что

$$i_{F/M^0}(N_{\Sigma_3/F}\Pi_3 - N_{\Sigma_2/F}\Pi_2 - N_{\Sigma_4/F}\Pi_4) = i_{F/M^0}N_{L/F}u + rw.$$

Пусть $\hat\Pi_i = (1 + \dots + \varphi^{m_i-1})i_{\Sigma_i/F}\Pi_i$, тогда $E = \hat\Pi_3 - \hat\Pi_2 - \hat\Pi_4$ принадлежит $VK_n^{\mathrm{top}}(P)$ и

$$N_{P/P^0}E = i_{F/P^0}(N_{\Sigma_3/F}\Pi_3 - N_{\Sigma_2/F}\Pi_2 - N_{\Sigma_4/F}\Pi_4). \tag{5.3}$$

Но

$$(\varphi-1)E = (\varphi^{m_3}-1)i_{\Sigma_3/P}\Pi_3 - (\varphi^{m_2}-1)i_{\Sigma_2/P}\Pi_2 - (\varphi^{m_4}-1)i_{\Sigma_4/P}\Pi_4 = (\tau_2-1)u_2 + (\tau_4-1)u_4,$$

где

$$u_2, u_4 \in U_nK_n^{\mathrm{top}}(F), u_4 = (\tau_2-1)i_{\Sigma_3/P}\Pi_3 + i_{\Sigma_3/P}\Pi_3 - i_{\Sigma_4/P}\Pi_4, \quad u_2 = i_{\Sigma_3/P}\Pi_3 - i_{\Sigma_2/P}\Pi_2.$$

Пусть, согласно (4.4), $\tilde{E}, \tilde{U}_i \in UK_n^{\mathrm{top}}(M)$ такие, что $N_{M/P}\tilde{E} = E$, $N_{M/P}\tilde{u}_i = u_i$, тогда $N_{M/P}((\varphi-1)\tilde{E} - (\tau_2-1)\tilde{u}_2 - (\tau_4-1)\tilde{u}_4) = 0$, поэтому из предложения 4.2 получаем $(\varphi-1)\tilde{E} - (\tau_2-1)\tilde{u}_2 - (\tau_4-1)\tilde{u}_4 = (\varphi^f-1)\hat{u}$, где $f = |P^0 \cdot F|, \tilde{u} \in K_n^{\mathrm{top}}(M^0)$. Тогда $(\varphi-1)N_{M/M^0}\tilde{E} = (\varphi^f-1)N_{M/M^0}\tilde{u}$ и $N_{M/M^0}\tilde{E} = (1+\dots+\varphi^{f-1})N_{M/M^0}\tilde{u} + w$, где $w \in UK_n^{\mathrm{top}}(M^0)$, $\varphi(w) = w$. Значит,

$$i_{P^0/M^0}N_{P/P^0}E = i_{P^0/M^0}N_{M^0/P^0}(N_{M/M^0}\tilde{E}) = i_{F/M^0}N_{L/F}(N_{M/L}\tilde{u}) + rw$$

и с учетом (5.3) лемма доказана.

Лемма 5.5. *Пусть L/F — конечное расширение Галуа, $\tilde{\sigma}_i \in \varnothing(\tilde{L}/F)$, Σ_i — их поля неподвижных элементов, Π_i — простые элементы в $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma_i)$. Если*

$$N_{\Sigma_3/F}\Pi_3 \equiv N_{\Sigma_1/F}\Pi_1 + N_{\Sigma_2/F}\Pi_2 \bmod N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) \tag{5.4}$$

для любых $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$, связанных соотношением $\tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1$, то $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ индуцирует гомоморфизм $\mathbf{r}_{L/F} : \mathrm{Gal}(L/F) \to K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ — подъемы $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$, Σ, Σ' — поля неподвижных элементов $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$; Π, Π' — простые элементы $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$ и $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma')$, $m = \deg_F(\tilde{\sigma}) - \deg_F(\tilde{\sigma}') \geqslant 0$. Если $m = 0$, то $\tilde{\sigma}|_{\tilde{F}} = \tilde{\sigma}'|_{\tilde{F}}$ и $\tilde{\sigma}|_L = \tilde{\sigma}'|_L$, значит, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}'$. Если $m > 0$, то $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}'^{-1}\tilde{\sigma}$ является подъемом единицы группы $\mathrm{Gal}(L/F)$ и $\deg_F(\tilde{\tau}) = m$. Пусть $M \supseteq L$ — поле неподвижных элементов $\tilde{\tau}$, Π_M — простой элемент $K_n^{\mathrm{top}}(M)$, тогда

$$N_{\Sigma'/F}\Pi \equiv N_{\Sigma'/F}\Pi' + N_{M/F}\Pi_M \equiv N_{\Sigma'/F}\Pi' \mathrm{mod} N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L).$$

Лемма 5.6. *Если L/F является чисто неразветвленным расширением, то $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{r}_{L/F} : \mathrm{Gal}(L/F) \to K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$.*

Доказательство. Вытекает из леммы 5.5 и предложения 4.2.

Лемма 5.7. *Пусть L/L^0 — расширение степени $p^k, \mu_p \subset F^*$ и локальный параметр $t_{s,F}$ поля F имеет ветвление в $L/F : t_{s,F} = t_{s,L}^{p^m} t_{s-1,L}^{b_{s-1}} \cdot \dots \cdot t_{1,L}^{b_1}\theta\eta$, где θ принадлежит группе корней из единицы в поле L^0 степени взаимно-простой с $p, \eta \in V_L$. Тогда $t_{s,F}\varepsilon \notin \Omega_L L^{*p}$ для некоторой единицы $\varepsilon \in V_F$, где Ω_L — циклическая подгруппа в L^*, порожденная $\omega_{*,L}$.*

Доказательство. Если $t_{s,F} \notin \Omega_L L^{*p}$, то положим $\varepsilon = 1$. В противном случае пусть $\mathbf{v}_L(p) = (e_1, \dots, e_n)$, $e_i' = e_i/(p-1)$. Положим $\varepsilon = 1 + \theta t_{n,L}^{pe_n'} \cdot \dots \cdot t_{s+1,L}^{pe_{s+1}'} t_{s,L}^{pe_s'-p^m} t_{s-1,L}^{pe_{s-1}'} \cdot \dots \cdot t_{1,L}^{pe_1'} + \dots$ так, чтобы $\varepsilon \in V_F$. Тогда $\varepsilon = (1 - p\theta^{1/p} t_{n,L}^{e_n'} \cdot \dots \cdot t_{s+1,L}^{e_{s+1}'} t_{s,L}^{e_s'-p^{m-1}} t_{s-1,L}^{e_{s-1}'} \cdot \dots \cdot t_{1,L}^{e_1'} + \dots)^p \varepsilon_1^p$, $\varepsilon_1 \in L^*$. Заметим, что $e_s' - p^{m-1}$ делится на p^{m-1} и не делится на p^m. Повторяя этот процесс, в итоге получим $\varepsilon \notin \Omega_L L^{*p}$.

Лемма 5.8. *Пусть L/L^0 — абелево расширение степени p^k, $\mu_p \subset F^*$. Пусть $L^0 \subset L_1 \subset L$ и $L = L_1(\sqrt[p]{t_{s,L_1}})$. Тогда существует расширение Q/F степени p^k, $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset \dots \supset Q_k = F, Q_{j-1} = Q_j(\sqrt[p]{t_{s_j,Q_j}})$ такое, что QL/L — расширение степени p^k, $Q \cap \tilde{L} = F$ и $t_{s,L_1} \in (L_1, Q)^{*p}V_{L_1Q}$.*

Доказательство. Пусть $L = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_k = L^0$, где L_{j-1}/L_j — расширение степени p. Если $L_{k-1} = L_k(t_{s_{k-1},L_{k-1}})$, то найдем $\varepsilon \in V_F$ ввиду леммы 5.7, чтобы $t_{s_{k-1},F}\varepsilon \notin \Omega_L L^{*p}$, и положим $Q_{k-1} = F(\sqrt[p]{t_{s_{k-1},F}\varepsilon})$. Тогда LQ_{k-1}/L не является чисто неразветвленным расширением и можно выбрать локальный параметр

$t_{s_{k-1},Q_{k-1}}$ так, чтобы $t_{s_{k-1},Q_{k-1}}t^{-1}_{s_{k-1},L_{k-1}} \in U_{Q_{k-1}L_{k-1}}$. Повторяя это построение, мы найдем поля $Q_{k-1},\dots,Q_1$ так, что LQ_{j-1}/LQ_j не является чисто неразветвленным и для некоторых локальных параметров t_{i,Q_1} поля Q_1 $t_{i,Q_1}t^{-1}_{i,L_1} \in U_{L_1Q_1}$. Применим лемму 5.7 для Q_1L/Q_1L^0 и t_{s,Q_1}. Тогда найдется $\varepsilon \in V_{Q_1}$ такой, что $t_{s,Q_1}\varepsilon \notin (Q_1L)^{*p}\langle\omega^a_{*,Q_1L}\rangle$. Поэтому $Q = Q_1(\sqrt[p]{t_{s,Q_1}\varepsilon})$ будет обладать всеми нужными свойствами.

Лемма 5.9. *Пусть L/L_1 — конечное расширение Галуа, $L_1 \supseteq F$, $\sigma \in G_F$. Тогда коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\varnothing(\tilde L/L_1) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{\tilde L/L_1}} & K_n^{\mathrm{top}}(L_1)/N_{L/L_1}K_n^{\mathrm{top}}(L) \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\
\varnothing(\widetilde{\sigma L}/\sigma L_1) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{\widetilde{\sigma L}/\sigma L_1}} & K_n^{\mathrm{top}}(\sigma L_1)/N_{\sigma L/\sigma L_1}K_n^{\mathrm{top}}(\sigma L)
\end{array}$$

где $\sigma^*(\tilde\tau) = \sigma\hat\tau\sigma^{-1}|_{\widetilde{\sigma L}}$, $\hat\tau$ — продолжение $\tilde\tau \in \varnothing(\tilde L/L_1)$ на G_{L_1}.

Доказательство. Пусть Σ — поле неподвижных элементов относительно действия $\tilde\tau$, тогда $\sigma\,\Sigma$ будет полем неподвижных элементов относительно действия $\sigma^*(\tilde\tau)$, и если Π — простой элемент $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, то $\sigma\Pi$ — простой элемент $K_n^{\mathrm{top}}(\sigma\Sigma)$ ввиду леммы 5.1. Тогда $N_{\sigma\Sigma/\sigma L_1}(\sigma\Pi) = \sigma N_{\Sigma/L_1}(\Pi)$.

Теорема 5.1. *Пусть L/F — конечное расширение Галуа, тогда $\mathbf{r}_{\tilde L/F}$ индуцирует изоморфизм*

$$\mathbf{r}_{L/F} : \mathrm{Gal}(L/F)^{\mathrm{ab}} \to K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L).$$

Доказательство. 1. Пусть сначала L/F — расширение простой степени l. Если L/F — чисто неразветвлено, то утверждение теоремы является частным случаем леммы 5.6. Если L/F — не чисто неразветвлено, то пусть $L = F(t_{s,L})$, где $t_{s,L}$ — локальный параметр $L, \Sigma_i = F(t_{s,\Sigma_i})$, где t_{s,Σ_i} — локальный параметр Σ_i. В качестве Π_i можно взять $\pm\{t_{s,\Sigma_i}, t_{j_1},\dots,t_{j_{n-1}}\}$, где множества $\langle s, j_1,\dots,j_{n-1}\rangle$ и $\langle 1,\dots,n\rangle$ совпадают. В этом случае, рассуждая так же, как в лемме 5.4, и положив $r = |L:F|$, можно показать, что $N_{\Sigma_3/F}t_{s,\Sigma_3}(N_{\Sigma_1/F}t_{s,\Sigma_1})^{-1}(N_{\Sigma_2/F}t_{s,\Sigma_2})^{-1} \in N_{L/F}U_L$, поэтому (5.4) выполняется, а тогда лемма 5.5 дает гомоморфизм $\mathbf{r}_{L/F}$. Имеем $f_{L/F} = 1$, и пусть $\tilde\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde L/\tilde F)$ выбран так, что $\sigma = \tilde\sigma|_L$ является образующей $\mathrm{Gal}(L/F)$. Тогда $\varphi_L\tilde\sigma \in \varnothing(\tilde L/F)$ — подъем σ и $\deg_F(\varphi_L\tilde\sigma) = 1$. Если Σ — поле неподвижных элементов для $\varphi_L\tilde\sigma$, то $f_{\Sigma/F} = 1$ и Σ/F — расширение степени l. Теперь из $\mathbf{r}_{L/F}(\sigma^i) \in N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L), 0 < i < l$ следует, что $N_{\Sigma/F}\Pi_\Sigma \in N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ для всех простых элементов Π_Σ, поэтому $N_{\Sigma/F}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma) \subseteq N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, а это противоречит предложению 4.4. Следовательно, $\mathbf{r}_{L/F}$ инъективно, но ввиду теоремы 4.1 $N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ имеет индекс l в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$, значит, $\mathbf{r}_{L/F}$ — изоморфизм.

2. Докажем утверждение теоремы для циклических расширений L/F степени l^N , где l — простое число. Будем проверять индукцией по $N \geqslant 1$, что если L/F — циклическое расширение степени l^N, то $\mathbf{r}_{\tilde L/F}$ определяет изоморфизм $\mathbf{r}_{L/F}$ и точна последовательность

$$K_n^{\mathrm{top}}(L) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^{\mathrm{top}}(L) \xrightarrow{N_{L/F}} K_n^{\mathrm{top}}(F),$$

где σ — образующая $\mathrm{Gal}(L/F)$.

При $N=1$ это проверено в первой части доказательства теоремы и в теореме 4.2.

Индуктивный переход. Если L/F — чисто неразветвленное расширение степени l^N, то все вытекает из предложения 4.2 и леммы 5.6. В противном случае пусть $\tilde{\sigma}_i, \Sigma_i, \Pi_i$ определены, как в лемме 5.5, Σ — поле неподвижных элементов подъема $\varphi \in \mathrm{Gal}(\tilde{L}/F)$ для φ_F, P — композит полей Σ, Σ_i, L, $P^0 \subset P' \subset P$, где P/P' –расширение степени l, $\Sigma_i' = \Sigma_i \cap P'$, $\Sigma' = \Sigma \cap P'$, $L' = L \cap P'$. Тогда если $P = P'(t_{s,\Sigma})$, где $t_{s,\Sigma}$ — локальный параметр Σ, то $\Sigma_i = \Sigma_i'(t_{s,\Sigma_i})$. По индукционному предположению, так как простые элементы $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$ переходят при взятии нормы в простые элементы $K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma')$, имеем $N_{\Sigma_3/F}\Pi_3 - N_{\Sigma_2/F}\Pi_2 - N_{\Sigma_1/F}\Pi_1 = N_{L'/F}z = N_{\Sigma'/F}z_1$, где $z_1 = N_{P'/\Sigma'}z_2$, $z = N_{P'/L'}z_2$, z_2 существует ввиду (4.4), причем можно считать, что $z_1 \in VK_n^{\mathrm{top}}(\Sigma')$. Если $l \neq p$, то ввиду леммы 1.3 $VK_n^{\mathrm{top}}(\Sigma') \subset N_{\Sigma/\Sigma'}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, (5.4) выполняется. Если $l=p$, то из леммы 5.4, полагая $r = |L:L^0|$, имеем

$$i_{F/M^0}N_{\Sigma'/F}z_1 = i_{F/M^0}(N_{\Sigma_3/F}\Pi_3 - N_{\Sigma_2/F}\Pi_2 - N_{\Sigma_1/F}\Pi_1) = i_{F/M^0}N_{\Sigma/F}u_1 + rw,$$

где $w \in K_n^{\mathrm{top}}(M^0)$, $u_1 = N_{P/\Sigma}u_2$, $u = N_{P/L}u_2$. Тогда $i_{F/M^0}N_{\Sigma'/F}(z_1 - N_{\Sigma/\Sigma'}u_1) = rw$ и

$$N_{M'/M^0}i_{F/M'}(z_1 - N_{\Sigma/\Sigma'}u_1) = N_{M'/M^0}(i_{M^0/M'}pw).$$

Теперь по индукционному предположению $i_{\Sigma'/M'}(z_1 - N_{\Sigma/\Sigma'}u_1) = pi_{M^0/M'}w + (1-\sigma)y$, где $y \in K_n^{\mathrm{top}}(M'), \sigma$ — образующая $\mathrm{Gal}(\hat{L}'/\tilde{F})$. Покажем, что в этом случае $z_1 - N_{\Sigma/\Sigma'}u_1 \in N_{\Sigma/\Sigma'}VK_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$. Можно считать, что $\mu_p \subset F^*$, так как $|F(\mu_p):F|$ взаимно-просто с p. Если $\Sigma = \Sigma'(\sqrt[p]{\varepsilon})$, где $\varepsilon \in V_{\Sigma'}$, то ввиду следствий 1.2 теоремы 4.1 имеем $z_1 - N_{\Sigma/\Sigma'}u_1 \in N_{\Sigma/\Sigma'}K_n^{\mathrm{top}}(\Sigma)$, и (5.4) проверено. В противном случае воспользуемся леммой 5.8 и найдем поле Q такое, что $Q \cap \tilde{L} = F$ и $Q\Sigma/Q\Sigma'$ является расширением с присоединением $\sqrt[p]{\alpha}$, $\alpha \in V_{Q\Sigma'}$. Теперь из леммы 5.3, полагая $L_1 = LQ$, $F_1 = Q$, получаем (5.4). Таким образом, $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ определяет гомоморфизм $\mathbf{r}_{L/F}$.

Пусть $L \supset L' \supset F$, тогда из леммы 5.3 диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(L/L') \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{r}_{L/L'}"] & \mathrm{Gal}(L/F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{r}_{L/F}"] & \mathrm{Gal}(L'/F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{r}_{L'/F}"] & 1 \\
0 \arrow[r] & K_n^{\mathrm{top}}(L')/N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L) \arrow[r, "N^*_{L'/F}"] & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) \arrow[r] & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L'F}K_n^{\mathrm{top}}(L') &
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

коммутативна. Пусть $|L:L'| = l$. Проверим, что $N^*_{L'/F}$ — инъективный гомоморфизм. Если бы это было не так, то для любого $x \in K_n^{\mathrm{top}}(L')$, $x \notin N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ нашелся бы $y \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$, что $N_{L'/F}x = N_{L/F}y$, т.е. $N_{L'/F}(x - N_{L/L'}y) = 0$. Если σ — образующая $\mathrm{Gal}(L/F)$, то по индукционному предположению $x = N_{L/L'}y + (1-\sigma)x_1$, где $x_1 \in K_n^{\mathrm{top}}(L')$, $x_1 \notin N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$. Продолжая этот процесс, получим $x = N_{L/L'}y' + (1-\sigma)^{l^{N-1}}x'$, где $y' \in K_n^{\mathrm{top}}(L')$, $x' \in K_n^{\mathrm{top}}(L')$. Но $(1-X)^{l^{N-1}} = 1 - X^{l^{N-1}} + lg(X)$ в кольце $\mathbb{Z}[X]$, поэтому $x \in N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ — противоречие, которое доказывает инъективность $N^*_{L'/F}$. Тогда из диаграммы (5.5) получаем, что $\mathbf{r}_{L/F}$ — инъективный, а ввиду точности нижней последовательности в (5.5) $\mathbf{r}_{L/F}$ является изоморфизмом.

Далее, пусть $N_{L/F}x = 0$, тогда по индукционному предположению $N_{L/L'}x = (1-\sigma)y$ для $y \in K_n^{\mathrm{top}}(L')$. Но $i_{F/L'}K_n^{\mathrm{top}}(F) \not\subseteq N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, так как иначе $l^{N-1}K_n^{\mathrm{top}}(F) \subseteq N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, что противоречит цикличности $K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$.

Так как $K_n^{\mathrm{top}}(L')/N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ имеет порядок l, то $K_n^{\mathrm{top}}(L') = N_{L/L'}K_n^{\mathrm{top}}(L) + i_{F/L'}K_n^{\mathrm{top}}(F)$, в частности, $y = i_{F/L'}y_1 + N_{L/L'}y_2$, где $y_1 \in K_n^{\mathrm{top}}(F)$, $y_2 \in K_n^{\mathrm{top}}(L)$. Тогда $N_{L/L'}x = N_{L/L'}(1-\sigma)y_2$ и $x = (1-\sigma)y_2+(1-\sigma^{l^{N-1}})y_3$ принадлежит $(1-\sigma)K_n^{\mathrm{top}}(L)$.

3. Пусть L/F — конечное абелево расширение, не являющееся циклическим расширением рассмотренного выше типа. Проверим индукцией по степени расширения $|L:F|$, что $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{r}_{L/F}$.

Благодаря лемме 5.3 имеем

$$\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1) \equiv \mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}_2) + \mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}_1) \mod N_{M/F}K_n^{\mathrm{top}}(M),$$

где M/F — циклическое подрасширение в L/F, $|M:F| = l^N$, где l — простое, $N \geqslant 1$; $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in \varnothing(\tilde{L}/F)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \longrightarrow & \varnothing(\tilde{L}/M) & \longrightarrow & \varnothing(\tilde{L}/F) & \longrightarrow & \varnothing(\tilde{M}/F) & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow{\scriptstyle \mathbf{r}_{\tilde{L}/M}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{r}_{\tilde{L}/F}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{r}_{\tilde{M}/F}} & \\
& K_n^{\mathrm{top}}(M)/N_{L/M}K_n^{\mathrm{top}}(L) & \xrightarrow{N^*_{M/F}} & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) & \longrightarrow & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{M/F}K_n^{\mathrm{top}}(M) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

в которой точные строки. Ввиду индукционного предположения $\mathbf{r}_{\tilde{L}/M}$ и $\mathbf{r}_{\tilde{M}/F}$ сюръективны, значит, $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ сюръективный. Из правого квадрата диаграммы получаем, что если $x \in N_{M/F}K_n^{\mathrm{top}}(M)$, то $x = \mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma})$ и $\tilde{\sigma} \in \varnothing(\tilde{L}/F)$ неподвижно действует на M. Поэтому если x принадлежит пересечению норменных подгрупп $N_{M/F}K_n^{\mathrm{top}}(M)$ по всем циклическим подрасширениям M/F, где $|M:F| = l^N$, l — простое, $N \geqslant 1$, то $x = \mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma})$ и $\tilde{\sigma}$ неподвижно действует на L, так как гомоморфизм $\mathrm{Gal}(L/F) \to \prod_M \mathrm{Gal}(M/F)$ является инъективным. Тогда $x = \mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}) \in N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$. Таким образом, $\cap_M N_{M/F}K_n^{\mathrm{top}}(M) = N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, поэтому $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ индуцирует гомоморфизм $\mathbf{r}_{L/F}$. Из диаграммы (5.5) следует тогда, что $\mathbf{r}_{L/F}$ — изоморфизм.

4. Пусть L/F — конечное расширение Галуа. Докажем, что $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}$ индуцирует изоморфизм $\mathbf{r}_{L/F} : \mathrm{Gal}(L/F)^{ab} \to \to K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L)$ индукцией по степени $|L:F|$. Группа $\mathrm{Gal}(L/F)$ является разрешимой, поэтому $M = L \cap F^{ab}$ не совпадает с L и F, если L/F — неабелево расширение. Проверим, что $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\varnothing(\tilde{L}/M)) = 0$, тогда ввиду сюръективности $\mathbf{r}_{\tilde{L}/M}$ получим, что $N^*_{M/F}$ — нулевой гомоморфизм, и изоморфизм $\mathbf{r}_{M/F}$ определяет изоморфизм $\mathbf{r}_{L/F}$. Так как $\mathbf{r}_{\tilde{L}/M}$ — гомоморфизм, достаточно проверить, что $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}) = 0$ для $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} \in \varnothing(\tilde{L}/F)$. Если нормальная подгруппа $\mathrm{Gal}(L/M)\langle\sigma^i\rangle = \mathrm{Gal}(L/L_1)$, где $\sigma = \tilde{\sigma}|_L$, не совпадает с $\mathrm{Gal}(L/F)$, то по индукционному предположению и ввиду леммы 5.9 $\mathbf{r}_{L/L_1}(\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}) = \mathbf{r}_{L/L_1}(\sigma^{-1}) + \mathbf{r}_{L/L_1}(\tau^{-1}\sigma\tau) = 0$ в $K_n^{\mathrm{top}}(L_1)/N_{L/L_1}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, поэтому $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}) = 0$. В случае, когда M/F не является циклическим расширением, это верно. Если же M/F — циклическое расширение и $\mathrm{Gal}(L/M)\langle\sigma^i\rangle = \mathrm{Gal}(L/F)$, то имеем $\tau = \sigma_1\sigma^j, \tau = \tilde{\tau}|_L$, где $\sigma_1 \in \mathrm{Gal}(L/M)$. Тогда $\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}|_L = \sigma^{-j}(\sigma^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma\sigma_1)\sigma^j$, и по индукционному предположению и ввиду леммы 5.9 $\mathbf{r}_{\tilde{L}/M}(\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}) = \mathbf{r}_{L/M}(\sigma^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma\sigma_1) = 0$ в $K_n^{\mathrm{top}}(M)/N_{L/M}K_n^{\mathrm{top}}(L)$, значит, $\mathbf{r}_{\tilde{L}/F}(\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau} = 0$. Теорема доказана.

Предложение 5.2. 1. *Пусть L/F и L_1/F_1 — конечные расширения Галуа. Тогда* *коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(L_1/F_1) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{L_1/F_1}} & K_n^{\mathrm{top}}(F_1)/N_{L_1/F_1}K_n^{\mathrm{top}}(L_1) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N^*_{F_1/F}} \\ \mathrm{Gal}(L/F) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{L/F}} & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) \end{array}$$

2. *Пусть L/L_1 — конечное расширение Галуа, $L_1 \supseteq F$, $\sigma \in G_F$. Тогда коммутативна диаграмма (где $\sigma^*(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$)*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(L/L_1) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{L/L_1}} & K_n^{\mathrm{top}}(L_1)/N_{L/L_1}K_n^{\mathrm{top}}(L) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathrm{Gal}(\sigma L/\sigma L_1) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{\sigma L/\sigma L_1}} & K_n^{\mathrm{top}}(\sigma L_1)/N_{\sigma L/\sigma L_1}K_n^{\mathrm{top}}(\sigma L) \end{array}$$

3. *Пусть L/F — конечное расширение Галуа, $F \subset F_1 \subset L$. Тогда коммутативна диаграмма (где* Ver *— отображение переноса)*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(L/F)^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow{\mathbf{r}_{L/F}} & K_n^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_n^{\mathrm{top}}(L) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ver}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{F/F_1}} \\ \mathrm{Gal}(L/F_1)^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow{\mathbf{r}_{L/F_1}} & K_n^{\mathrm{top}}(F_1)/N_{L/F_1}K_n^{\mathrm{top}}(L) \end{array}$$

Доказательство. Коммутативность первой и второй диаграмм следует из лемм 5.3, 5.9 и теоремы 5.1. Коммутативность третьей доказывается так же, как предложение 2.9 работы [18].

Обратный к гомоморфизму $\mathbf{r}_{L/F}$ дает сюрьективный гомоморфизм $K_n^{\mathrm{top}}(F) \to \mathrm{Gal}(L/F)^{\mathrm{ab}}$. Переходя к проективному пределу, с учетом предложения 5.3, получаем отображение взаимности

$$\Psi_F : K_n^{\mathrm{top}}(F) \to \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F),$$

образ которого всюду плотен в $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$, а ядро совпадает с пересечением всех норменных подгрупп конечных расширений Галуа.

Из леммы 5.6 вытекает, что для $x \in K_n^{\mathrm{top}}(F)$

$$\Psi_F(x)|_{\tilde{F}} = \varphi_F^{v_F(x)}. \tag{5.6}$$

Пусть $\mu_N \subset F^*$, тогда символ Гильберта $H : F^* \times K_n^{\mathrm{top}}(F) \to \mu_N$ задается формулой $H(\alpha, x)_N = (\sigma - 1)\sqrt[N]{\alpha}$, где $\sigma = \Psi_F(x), x \in K_n^{\mathrm{top}}(F)$, $\alpha \in F^*$.

Лемма 5.10. *Символ Гильберта:*

1) *линеен по двум аргументам;*

2) $H(\alpha, x)_N = 1$ *тогда и только тогда, когда* $x \in N_{F\sqrt[N]{\alpha}/F}K_n^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[N]{\alpha}))$;

3) $H(\alpha, x)_N = 1$, *если* $x = \{1 - \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F^*$.

Значит, символ Гильберта продолжается на

$$H : K_{n+1}^{\mathrm{top}}(F) \to \mu_N.$$

Доказательство. Равенство $H(\alpha, x)_N = 1$ означает, что $\Psi_F(x)$ тождественно действует на поле $F(\sqrt[N]{\alpha})$, поэтому из теоремы 5.1 выводим, что

$$x \in N_{F(\sqrt[N]{\alpha})/F} K_n^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[N]{\alpha})).$$

Свойство 3) следует из хорошо известного факта, что $1-\alpha$ является нормой в расширении $F(\sqrt[N]{\alpha})/F$.

Предложение 5.3. *Если N взаимно-просто с p, то значения символа Гильберта в поле вычетов $\mathbb{F}_q$ совпадают с $((q-1)/N)$-й степенью ручного символа, определенного в (3.5); если $n = p$, то символ Гильберта является k-й степенью символьного отображения Γ, определенного в (3.6), $0 < k < p$.*

Доказательство. Из (5.1), (5.6) вытекает, что если $F(\sqrt[N]{\alpha})/F$ — чисто не разветвленное расширение, то

$$H(\alpha, t_1, \ldots, t_n)_N = (\varphi_F - 1)\sqrt[N]{\alpha}.$$

Если N взаимно-просто с p , то из лемм 1.3 и 3.2 получаем, что символ Гильберта определяется своими значениями на $\{\theta, t_1, \ldots, t_n\}$, где $\theta \in \mu_{q-1}$, $t_1, \ldots, t_n$ — локальные параметры F. Но $H(\theta, t_1, \ldots, t_n)_N = \theta^{(q-1)/N}$, и лемма 3.1 приводит к утверждению предложения.

Если $N = p$, то предложение 3.2 влечет, что символ Гильберта определяется своими значениями на $\{\omega_{*,F}, t_1, \ldots, t_n\}$. Но $H(\omega_{*,F}, t_1, \ldots, t_n) = (\varphi_F - 1)\sqrt[p]{\omega_{*,F}} \neq 1$, а согласно (3.7), $\Gamma(\omega_{*,F}, t_1, \ldots, t_n) \neq 1$, поэтому символ Гильберта является k-й степенью Γ для некоторого $k, 0 < k < p$.

Следствие предложения 5.3. $c_F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}\} \in N_{F(\sqrt[q-1]{\alpha_1})/F} K_n^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[q-1]{\alpha_1}))$; $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}\} \in N_{F(\sqrt[p]{\alpha_1})/F} K_n^{\mathrm{top}}(F(\sqrt[p]{\alpha_1}))$.

Замечание. *На самом деле* $\Gamma(x) = H(x)_p^{(-1)^n}$ (см. [11]).

Теорема 5.2. *Отображение $L \to \mathcal{N}_L = N_{L/F} K_n^{\mathrm{top}}(L)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между конечными абелевыми расширениями L/F и открытыми подгруппами конечного индекса в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$. Кроме того, $L_1 \subseteq L_2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_{L_1} \supseteq \mathcal{N}_{L_2}$; $\mathcal{N}_{L_1 L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$; $\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что любая открытая подгруппа конечного индекса в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ содержит норменную подгруппу некоторого конечного расширения.

Пусть сначала $\mathcal{N}$ — открытая подгруппа индекса l в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$, l — простое число. Если $\mu_l \subset F^*$, то $\mathcal{N}$ является норменной ввиду предложения 3.3 и следствия предложения 5.3. Если $\mu_l \not\subseteq F^*$, то пусть $L_1 = F(\mu_l)$, $\mathcal{N}_1 = N_{L_1/F}^{-1}(\mathcal{N})$. Ввиду леммы 3.3 $\mathcal{N}_1$ является открытой подгруппой в $K_n^{\mathrm{top}}(L_1)$, а так как $\mathcal{N}_{L_1}$ имеет индекс $m = |L_1 : F|$ в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ ввиду теоремы 5.1, то $\mathcal{N}_1$ имеет индекс l в $K_n^{\mathrm{top}}(L_1)$. Тогда $\mathcal{N}_1 = N_{L/L_1} K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{N}_L$ для некоторого конечного расширения L/F.

Пусть теперь $\mathcal{N}$ — открытая подгруппа индекса $l^N, N \geqslant 2$, в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$. Пусть $\mathcal{N}_1$ содержит $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_1/\mathcal{N}$ имеет порядок l. Группа $N_{L_1/F}^{-1}(\mathcal{N})$ является открытой подгруппой в $K_n^{\mathrm{top}}(L_1)$, где $\mathcal{N}_1 \supseteq \mathcal{N}_{L_1}$, ввиду леммы 3.3 с индексом l или 1. Поэтому $N_{L_1/F}^{-1}(\mathcal{N}) \supseteq N_{L/L_1} K_n^{\mathrm{top}}(L)$ и $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_L$ для некоторого конечного расширения L/F.

Произвольная открытая подгруппа конечного индекса $\mathcal{N}$ в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$ будет содержать норменную ввиду уже доказанного, а значит, благодаря теореме 5.1 содержит норменную подгруппу $\mathcal{N}_L$ конечного абелева расширения L/F. Тогда $\mathcal{N} = \mathcal{N}_M$, где M — поле неподвижных элементов относительно действия $\mathrm{r}_{L/F}^{-1}(\mathcal{N})$.

Ясно, что $\mathcal{N}_{L_1L_2} \subseteq \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$, с другой стороны, для $x \in \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ $\Psi_F(x)$ неподвижно действует на L_1 и L_2, следовательно, на L_1L_2, поэтому $\mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2} = \mathcal{N}_{L_1L_2}$. Если $L_1 \subseteq L_2$, то $\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2} = \mathcal{N}_{L_2}$, значит, $\mathcal{N}_{L_1} \supseteq \mathcal{N}_{L_2}$. Наконец, $\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} \supseteq \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2}$, но $\mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2}$ — открытая подгруппа конечного индекса в $K_n^{\mathrm{top}}(F)$, следовательно, $\mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2} = \mathcal{N}_L$ для абелева расширения L/F. Тогда $L \subseteq L_1 \cap L_2$, отсюда $\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1} + \mathcal{N}_{L_2}$.

§ 6. ГОМОМОРФИЗМ НОРМЕННОГО ВЫЧЕТА И КРУЧЕНИЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ K-ГРУППАХ

Пусть n-мерное локальное поле F характеристики 0 с полем вычетов характеристики p содержит μ_p; зафиксировав корень p-й степени из единицы ξ_p, получаем изоморфизм

$$H^m(F, \mu_p^{\otimes m}) \simeq H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Теорема 6.1. *Гомоморфизм норменного вычета* $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$

$$h_F^m : K_m(F)/p \to H^m(F, \mu_p^{\otimes m}) \simeq H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Основная идея доказательства принадлежит Като ([7], § 1).

1. Проверим, что h_F^{n+1} инъективно, индукцией по размерности поля. Так как ввиду предложения 3.1 $K_{n+1}(F)/p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то инъективность h_F^{n+1} равносильна тому, что h_F^{n+1} — ненулевой. Для числовых локальных полей h_F^2 инъективно, так как образ $\{\omega_{*,\pi}\}$ в ${}_p\mathrm{Br}(F)$ не равен 0. Пусть k — $(n-1)$-мерное разнохарактеристическое локальное поле, содержащееся в F, t — локальный параметр поля F, который трансцендентен над k, K — пополнение $k(t)$ в поле F. Тогда F/K является конечным сепарабельным расширением ([12], гл.5). Пусть $E = k^{\mathrm{sep}}(t)K$, тогда так как $\mathrm{cd}_p k^{\mathrm{sep}}(t) = 1$, то и $\mathrm{cd}_p E \leqslant 1$ ([19], гл.2). Кроме того, $K^{sep} = k(t)^{sep}K, k^{\mathrm{sep}}(t) \cap K = k(t)$, поэтому из спектральной последовательности

$$H^p(k, H^q(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \Longrightarrow H^{p+q}(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

получаем гомоморфизм $\delta : H^{n+1}(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^n(k, E^*/E^{*p})$ и является инъективным сквозной гомоморфизм:

$$H^n(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\inf} H^n(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup f_t} H^{n+1}(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^n(k, E^*/E^{*p}),$$

где $f_t \in H^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ соответствует t (эта композиция индуцирована гомоморфизмом $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to E^*/E^{*p}, 1 \to t$, имеющим обратный слева). Таким образом, гомоморфизм $\varphi_t : H^n(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\inf} H^n(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup f_t} H^{n+1}(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ является инъективным.

Отсюда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K_n(k)/p & \longrightarrow & H^n(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \{t\}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_t} \\ K_{n+1}(K)/p & \longrightarrow & H^{n+1}(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \end{array}$$

делаем вывод, что $h_K^{n+1}\{\omega_{*,K}, t_1, \dots, t_{n-1}, t\} \neq 0$, где $t_{n-1}, \dots, t_1$ — локальные параметры k.

Теперь, если F_2/F_1 — чисто неразветвленное расширение полей рассматриваемого типа, то $N_{F_2/F_1}\{\omega_{*,F_2}, t_1, \dots, t_n\} \equiv \{\omega_{*,F_1}, t_1, \dots, t_n\} \mod pK_{n+1}(F_1)$, а если $F_2 = F_1(t_{s,F_2})$, то

$$N_{F_2/F_1}\{\omega_*, t_{s,F_2}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{n-1}}\} \equiv \{\omega_*, t_{s,F_1}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{n-1}}\} \mod pK_{n+1}(F_1),$$

поэтому, раскладывая расширение F/K в цепочку таких подрасширений, получаем, что h_F^{n+1} — ненулевой гомоморфизм.

2. Проверим, что h_F^m инъективен для всех m, $1 \leqslant m \leqslant n+1$. Это следует из предложения 3.2 и коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
K_m^{\text{top}}(F)/p & \longrightarrow & H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{n+1}^{\text{top}}(F)/p & \longrightarrow & H^{n+1}(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})
\end{array}$$

где левая вертикальная стрелка — умножение $x \in K_m^{\text{top}}(F)/p$ на $y \in K_{n+1-m}^{\text{top}}(F)/p$, а правая вертикальная стрелка — умножение на образ x в $H^{n+1-m}(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

3. Проверим сюръективность h_F^m, $1 \leqslant m \leqslant n+1$. Обозначим через $C_m(F)$ коядро гомоморфизма h_F^m. Пусть L — композит всех полей L_j, где $L_0 = F, L_j = L_{j-1}(\sqrt[p]{t_{n,L_{j-1}}}, \dots, \sqrt[p]{t_{1,L_{j-1}}})$. Тогда $C_m(L) = C_m(\hat{L})$, где $\hat{L}$ — пополнение поля L и $\mathrm{cd}_p(\hat{L}) \leqslant 1$, следовательно, $C_m(\hat{L}) = 0$ ([7], с. 614–615). Поэтому для проверки сюръективности достаточно показать, что $C_m(F) \to C_m(L)$ является инъективным гомоморфизмом в случае $L = F(\sqrt[p]{t_s})$, где t_s — локальный параметр, индукцией по m. Пусть $G = \mathrm{Gal}(L/F)$, тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_m^{\text{top}}(F)/p & \longrightarrow & H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 & & \\
& & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot\{t_s\}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cup f_{t_s}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & K_{m+1}^{\text{top}}(F)/p & \longrightarrow & H^{m+1}(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \longrightarrow & C_{m+1}(F) & \longrightarrow & 0 \\
& & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (K_{m+1}^{\text{top}}(L)/p)^G & \longrightarrow & H^{m+1}(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^G & \longrightarrow & C_{m+1}(L)^G & & \\
& & \big\downarrow{\scriptstyle N_{L/F}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & K_{m+1}^{\text{top}}(F)/p & \longrightarrow & H^{m+1}(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & & & &
\end{array} \tag{6.1}$$

Точность последовательности

$$H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup f_{t_s}} H^{m+1}(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^{m+1}(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

эквивалентна точности последовательности

$$H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^m(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(1-\sigma)H^m(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^m(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \tag{6.2}$$

что следует стандартным образом из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & H^m(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[d] \arrow[dr, "1-\sigma"] & & \\
H^{m-1}(F,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[dr, "\cup f"'] & H^m(F,I) \arrow[r] \arrow[d] & H^m(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{cor}"] & H^m(F,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\
 & H^{m+1}(F,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[d, "\mathrm{res}"] & H^m(F,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[l, "\cup f t_s"'] \arrow[ul] \arrow[u, "\mathrm{res}"'] & \\
 & H^{m+1}(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & &
\end{tikzcd}$$

где горизонтальная точная последовательность получается из точной последовательности $0 \to I \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$, $\sum a_i\sigma^i \to \sum a_i$, а вертикальная — из точной последовательности $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Z/p\mathbb{Z}[G] \to I \to 0{,}1 \to \sum\sigma^i, \sum a_i\sigma^i \to (1-\sigma)\sum a_i\sigma^i$, и f принадлежит ядру гомоморфизма $H^2(F,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^2(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $f = f_{t_s} \cup f_\alpha$ для некоторого $\alpha \in F^*$. Ввиду индукционного предположения точность (6.2) равносильна точности (4.8). Наконец, последовательность

$$K^{\mathrm{top}}_{m+1}(F)/p \to (K^{\mathrm{top}}_{m+1}(L)/p)^G \xrightarrow{N_{L/F}} K^{\mathrm{top}}_{m+1}(F)/p$$

точна ввиду предложения 4.3. Теперь из диаграммы (6.1) следует требуемое.

Теорема 6.2. *Пусть $\mu_l \subset F^*$, тогда ${}_lK^{\mathrm{top}}_m(F) = \{\xi_l\}\cdot K^{\mathrm{top}}_{m-1}(F)$ для $1 \leqslant m \leqslant n+1$, где l — простое.*

Доказательство. Если $l \neq p$, $lx = 0$ для $x \in K^{\mathrm{top}}_m(F)$, то $x \in \cap p^r K^{\mathrm{top}}_m(F)$, и значит, если $x \in VK^{\mathrm{top}}_m(F)$, то $x = 0$. Из описания в лемме 3.2 следует теперь утверждение теоремы.

Если $l = p$, то из теоремы 6.1 и коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mu p \otimes K^{\mathrm{top}}_{m-1}(F)/p \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes h^{m-1}_F", "\wr"'] & K^{\mathrm{top}}_m(F)/p^{r-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h^m_{F,p^{r-1}}"] & K^{\mathrm{top}}_m(F)/p^r \arrow[r] \arrow[d, "h^m_{F,p^r}"] & K^{\mathrm{top}}_m(F)/p \arrow[d, "h^m_F"] \\
\mu_p \otimes H^{m-1}(F,\mu_p^{\otimes,m-1}) \arrow[r] & H^m(F,\mu_{p^{r-1}}^{\otimes m}) \arrow[r] & H^m(F,\mu_{p^r}^{\otimes m}) \arrow[r] & H^m(F,\mu_p^{\otimes m})
\end{tikzcd}$$

получаем, что h^m_{F,p^r} — изоморфизмы для $r \geqslant 1$, и коммутативную диаграмму [20]

$$\begin{tikzcd}
\mu_p \otimes K^{\mathrm{top}}_{m-1}(F)/p \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & K^{\mathrm{top}}_m(F)/\cap p^r K^{\mathrm{top}}_m(F) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & K^{\mathrm{top}}_m(F) \cap p^r K^{\mathrm{top}}_m(F) \arrow[r] \arrow[d] & K^{\mathrm{top}}_m(F)/p \arrow[d, "\wr"'] \\
\mu_p \otimes H^{m-1}(F,\mu_p^{\otimes m-1}) \arrow[r] & \varinjlim H^m(F,\mu_{p^r}^{\otimes m}) \arrow[r] & \varinjlim H^m(F,\mu_{p^r}^{\otimes m}) \arrow[r] & H^m(F,\mu_p^{\otimes m})
\end{tikzcd}$$

Если $px = 0$, то из леммы 3.2 следует, что $x \in VK^{\mathrm{top}}_m(F)$, а тогда $x = \{\xi_p\}\cdot y + z$, где $y \in K^{\mathrm{top}}_{m-1}(F)$, $z \in \cap p^r K^{\mathrm{top}}_m(F)$. Но $z \in VK^{\mathrm{top}}_m(F)$, следовательно, $z \in \bigcap\limits_{u\geqslant 1} uK^{\mathrm{top}}_m(F)$, т.е. $z = 0$.

Замечание. *Для 2-мерных локальных полей проверка описания p-кручения получается существенно проще, так как требуется лишь инъективность h^2_F, которая легко вытекает из того факта, что $K^{\mathrm{top}}_2(F)/p$ состоит из символов* ([6], § 3.1).

Список литературы

[1] Serre J.P., *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1962.
[2] *Алгебраическая теория чисел* (под ред. Дж.Касселса и А.Фрелиха), Мир, М., 1969.
[3] Вейль А., *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972.
[4] Hazewinkel M., *Local class field theory is easy*, Adv. Math. **18** (1975), 148–181.
[5] Neukirch J., *Neubegründung der Klassenkörpertheorie*, Math. Z. **186,** no. 4 (1984), 557–574.
[6] Kato K., *A generalization of local class field theory by using K-groups.I.*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A **26,** no. 2 (1979), 303–376.
[7] Kato K., *A generalization of local class field theory by using K-groups.II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A **27,** no. 3 (1980), 603–683.
[8] Kato K., *The existence theorem for higher local class field theory*, Prepr. IHES (1980).
[9] Паршин А.Н., *Поля классов и алгебраическая K-теория*, Успехи мат. наук **30**, вып. 1 (1975), 253–254.
[10] Паршин А.Н., *Локальная теория полей классов*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 143–170.
[11] Востоков С.В., *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля*, Изв. АН СССР, Сер. мат. **49**, вып. 2 (1985), 283–308.
[12] Nagata M., *Local rings,*, Interscience, New York, 1962.
[13] Бурбаки Н., *Коммутативная алгебра*, Мир, М., 1971.
[14] Bass H., Tate J., *The Milnor ring of a global field*, Lect. Notes Math. **342** (1973), 349–446.
[15] Фесенко И.Б., *Обобщенный символ Гильберта в 2-адическом случае*, Вестн. ЛГУ, вып. 22 (1985), 112–144.
[16] Фесенко И.Б., *Явные конструкции в локальной теории полей классов*, Дис. канд. физ.-мат. наук, Л., 1987.
[17] Ленг С., *Алгебраические числа*, Мир, М., 1966.
[18] Neukirch J., *Class field theory*, Springer, Berlin etc., 1986.
[19] Серр Ж.-П., *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968.
[20] Tate J., *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Inv. math. **36** (1976), 257–274.

Ленинградский государственный университет
математико-механический факультет
198904, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., д.2

Поступило 25 июня 1990 г.