G. O. Berim, R. G. Kamalov, Relaxation of the energy of the two-dimensional Ising model in the absence of an external constant magnetic field,
TMF, 1984, Volume 59, Number 2, 297–306

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 59, № 2
май, 1984

РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНЕГО ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Берим Г. О., Камалов Р. Г.

Методом неравновесного статистического оператора выведено кинетическое уравнение для энергии модели Изинга $s=1/2$. Получены в аналитическом виде решения этого уравнения при различных соотношениях между температурой термостата и температурой фазового перехода спиновой системы. В частности, изучена релаксация энергии в критической области. Рассмотрено влияние геометрии решетки и вида взаимодействия спин-системы с термостатом на релаксационные свойства модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание неравновесного поведения многочастичных спиновых систем является сложной и до сих пор далеко не изученной проблемой. Ее сложность обусловлена в основном большими трудностями, возникающими при выводе и решении кинетических уравнений, описывающих неравновесные процессы. Из-за многочастичных взаимодействий, которые в общем случае не могут считаться малыми, кинетические уравнения таких физических систем имеют форму бесконечных цепочек зацепляющихся уравнений. Для решения этих уравнений приходится вводить ту или иную процедуру расцепления, которой не всегда удается найти физическое обоснование. Поэтому исследование модельных систем, для которых возможно получение точных результатов, представляет большой интерес, т. к. может дать ценную информацию об особенностях кинетики сложных объектов.

Одной из таких моделей является модель Изинга, представляющая собой нетривиальную спиновую систему, допускающую в одно- и двумерных вариантах точное описание равновесных свойств. Изучение кинетики этой модели было начато Глаубером [1], который ввел феноменологическое управляющее уравнение для матрицы плотности одномерной модели Изинга и получил на его основе цепочку зацепляющихся кинетических уравнений для неравновесных спиновых корреляционных функций. В дальнейшем подход Глаубера был распространен на модели Изинга других размерностей [2] и другого спина [3]. Однако отсутствие в методе Глаубера процедуры, позволяющей замыкать цепочку кинетических уравнений, не вводя при этом неконтролируемые приближения, существенно ограничивает возможности его применения.

В работе [4] авторами был развит общий микроскопический подход к изучению неравновесных процессов в модели Изинга произвольной размерности и спина, основанный на идее Боголюбова о сокращении описания системы в процессе ее эволюции. С помощью метода неравновесного статистического оператора (НСО) [5] была получена система кинетических уравнений для параметров сокращенного описания модели и указаны пути ее решения. В работах [6, 7] рассматривались неравновесные процессы в одномерной модели Изинга, находящейся в постоянном поле, параллельном оси z [6], а также в переменном поле, перпендикулярном этой оси [7]. В первом случае в рамках метода НСО удалось без дополнительных приближений замкнуть систему кинетических уравнений и получить ряд точных ее решений.

Кроме возможности получения точных решений, описывающих кинетику нетривиальных многочастичных систем, разработанный подход позволяет выразить параметры релаксации через микроскопические характеристики модели, что невозможно сделать в рамках теории Глаубера, а также последовательно рассмотреть механизмы релаксации различной природы.

В данной работе развитая ранее теория [4] применяется для изучения релаксации энергии в двумерной модели Изинга в отсутствие постоянного магнитного поля. Замечательным свойством этой модели является наличие в ней фазового перехода второго рода, который описывается точными соотношениями, следующими из первых принципов. Поэтому исследование ее неравновесных свойств на основе микроскопического подхода представляет интерес и для общей теории динамических критических явлений, которая в настоящее время базируется на феноменологических кинетических уравнениях.

В разделе 2 настоящей работы получено замкнутое кинетическое уравнение, описывающее релаксацию энергии прямоугольной изинговской спин-системы при $T \geqslant T_c$, которое решается далее при условии близости температуры термостата T к температуре T_c фазового перехода магнитной подсистемы (раздел 3), а также в случае совпадения этих температур (раздел 4). В разделе 5 релаксация энергии рассматривается в случае высоких температур ($T \to \infty$). Эта же программа проводится для шестиугольной плоской модели Изинга (раздел 6), на примере которой дополнительно рассмотрено влияние различных механизмов спин-решеточной связи на релаксацию энергии спиновой системы при $T = T_c$ (раздел 7).

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭНЕРГИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА ДЛЯ СЛУЧАЯ $T \geqslant T_c$

Пусть двумерная прямоугольная изинговская система спинов с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_s = -\frac{I}{4} \sum_{j,k} \sigma_{j,k}(\sigma_{j,k+1} + \sigma_{j+1,k}), \quad \sigma_{j,k} = 2S^z_{j,k},$$

связана с термостатом $\mathcal{H}_f$ взаимодействием

$$\mathcal{H}_{sf} = \hbar \sum_{j,k} \sum_{\alpha} U^{\alpha}_{j,k} V^{\alpha}_{j,k}(S).$$

где $V^{\alpha}_{j,k}(S)$ — спиновые операторы, конкретный вид которых зависит от механизма релаксации, $U_{j,k}^{\alpha}$ — некоторые функции стохастических переменных, характеризующие взаимодействие спинов с термостатом, I — обменный интеграл, который может принимать как положительные (ферромагнитная связь), так и отрицательные (антиферромагнитная связь) значения.

Центральным пунктом вывода кинетических уравнений в используемом нами методе НСО являются выбор параметров сокращенного описания неравновесной системы и построение квазиравновесного статистического оператора. Общие соображения, касающиеся выбора этих параметров при описании кинетики произвольной модели Изинга, были приведены в [4], и мы воспользуемся ими ниже.

Допустим, что начальное неравновесное состояние магнитной подсистемы «приготовлено» таким образом, что средняя величина неравновесной намагниченности равна нулю. Тогда при $T \geqslant T_c$ в силу отсутствия внешнего поля и однородности полного гамильтониана такое значение намагниченности сохранится и при $t>0$. Поэтому в качестве единственного параметра P сокращенного описания спиновой системы выберем оператор ее энергии[1] $\mathscr{H}_s$. В этом случае необходимый для построения кинетических уравнений квазиравновесный статистический оператор имеет вид [5] $\rho_q(t) = \exp[-S(t)]/\mathrm{Sp}\exp[-S(t)]$, где $S(t)$ — оператор энтропии, который может быть представлен в форме

$$S(t) = \beta(t)\mathscr{H}_s + \beta\mathscr{H}_f, \tag{1}$$

$\beta = 1/kT$, $\beta(t) = 1/kT(t)$, $T(t)$ — функция, определяющая временную зависимость неравновесного среднего параметра сокращенного описания.

При выводе по формулам работы [4] кинетического уравнения для неравновесного среднего $\langle \mathscr{H}_s \rangle \equiv \mathrm{Sp}[\rho(t)\mathscr{H}_s]$ ($\rho(t)$ — НСО) учтем справедливое для параметров сокращенного описания соотношение [5] $\langle \mathscr{H}_s \rangle = \langle \mathscr{H}_s \rangle_q$, ($\langle \ldots \rangle_q \equiv \mathrm{Sp}[\rho_q(t)\ldots]$), а также то обстоятельство, что вследствие однородности гамильтониана его среднее значение $\langle \mathscr{H}_s \rangle_q$ может быть представлено в виде

$$\langle \mathscr{H}_s \rangle_q = -\frac{IN}{2}\langle \sigma_0\sigma_1 \rangle_q, \tag{2}$$

где $\sigma_0 \equiv \sigma_{0,0}$, $\sigma_1 \equiv \sigma_{1,0}$, N — полное число спинов. Тогда при одночастичном механизме релаксации

$$\mathscr{H}_{sf} \equiv \mathscr{H}_{sf}^{(1)} = \hbar \sum_{j,k} \sum_{\alpha} U_{j,k}^{\alpha} S_{j,k}^{\alpha}, \quad \alpha = x, y, z,$$

получим следующее кинетическое уравнение для среднего $\langle \sigma_0\sigma_1 \rangle_q$:

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_0\sigma_1 \rangle_q = K_1 z_1 + {}^1/_2 K_2 z_2 - 2(K_2 + K_1)\langle \sigma_0\sigma_1 \rangle_q + 2K_2 z_2 \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle_q + \tag{3}$$
$$+ K_2 z_2 \langle \sigma_1\sigma_3 \rangle_q + 2(K_2 - K_1)\langle \sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle_q - (K_1 z_1 - {}^1/_2 K_2 z_2)\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \rangle_q,$$

где $\sigma_2 \equiv \sigma_{0,-1}$, $\sigma_3 \equiv \sigma_{1,0}$, $\sigma_4 \equiv \sigma_{0,1}$, $z_\mu = \mathrm{th}\,(\beta\hbar\omega_\mu/2)$, $\mu = 1, 2$; $\omega_\mu \equiv \mu\omega_e = \mu I\hbar^{-1}$ — ре-

[1] Отметим, что при $T < T_c$ в системе возникает спонтанная намагниченность и в число параметров сокращенного описания нужно включить и соответствующий оператор $\sum_{j,k} \sigma_{j,k}$.

зонансные частоты рассматриваемой модели Изинга [8], K_μ — кинетические параметры, определенные формулами (24) работы [4].

Уравнение (3) связывает между собой квазиравновесные средние всевозможных произведений спинов из ближайшего окружения спина σ_0. Поэтому оно не является замкнутым и не может быть проинтегрировано на данном этапе. Для замыкания уравнения (3) воспользуемся тем обстоятельством, что оператор $\rho_q(t)$, определяющий средние $\langle\ldots\rangle_q$, по форме совпадает с равновесной матрицей плотности $\rho_T=\exp(-\beta\mathcal{H}_s)/\mathrm{Sp}\exp(-\beta\mathcal{H}_s)$ двумерной модели Изинга (1). В связи с этим входящие в (3) квазиравновесные корреляционные функции совпадают с соответствующими равновесными корреляционными функциями модели (1), если в последних положить $T=T(t)$. Используя известные результаты для равновесных корреляторов [9, 10], получим, таким образом, точные выражения для необходимых квазиравновесных средних при $T(t)\geqslant T_c$:

$$\langle\sigma_0\sigma_1\rangle_q=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-k'}}-\frac{\sqrt{2k'}}{\pi\sqrt{1-k'}}\mathcal{K}(k), \tag{4}$$

$$\langle\sigma_1\sigma_2\rangle_q=\frac{2}{\pi(1-k')}E(k)-\frac{2k'}{\pi(1-k')}\mathcal{K}(k),$$

$$\langle\sigma_1\sigma_3\rangle_q=\frac{1}{1-k'}-\frac{4}{\pi^2k^2}[E^2(k)+2k'E(k)\mathcal{K}(k)-(k')^3\mathcal{K}^2(k)],$$

$$\langle\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle_q=\frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{(1-k')^3}}E(k)+\frac{\sqrt{2}\,k'}{\pi\sqrt{1-k'}}\mathcal{K}(k)-\frac{\sqrt{2}(1+k')}{\sqrt{(1-k')^3}}-\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2k^2\sqrt{1-k'}}[E^2(k)+2k'E(k)\mathcal{K}(k)-(k')^3\mathcal{K}^2(k)], \tag{4a}$$

$$\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\rangle_q=\frac{16}{\pi(1-k')^2}E(k)+\frac{8k'}{\pi(1-k')}\mathcal{K}(k)-\frac{3+2k'-(k')^2}{(1-k')^2}-\frac{16}{\pi^2k^2(1+k')}[E^2(k)+2k'E(k)\mathcal{K}(k)-(k')^3\mathcal{K}^2(k)],$$

где $k\equiv k(t)=2\,\mathrm{th}[I/2kT(t)]\,\mathrm{ch}^{-1}[I/2kT(t)]$, $k'=\sqrt{1-k^2}$, $\mathcal{K}(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Подставляя значения (4а) корреляционных функций в уравнение (3), придем к дифференциальному уравнению для эллиптического модуля k:

$$dk/dt=F^{-1}(k,-\sqrt{1-k^2}), \tag{5}$$

где функция $F(k,k')$ может быть представлена в виде

$$F(k,k')=a(k,k')/b(k,k'),$$

$$a(k,k')=\pi k\sqrt{1+k'}\{\pi k^2-2[(2+k')k^2+2(1+k')(k')^2]\mathcal{K}(k)+4(1+k')E(k)\},$$

$$b(k,k')=2\pi^2k^2k'\{K_2k'[\sqrt{2}(3+k')z_2-4\sqrt{1+k'}]-$$

$$-4K_1(\sqrt{1+k'}-\sqrt{2}z_1)\}-16\pi K_1(kk')^2(1+k')(\sqrt{1+k'}-\sqrt{2}z_1)\mathscr{K}(k)-$$
$$-8k'\{K_2[4\sqrt{1+k'}-\sqrt{2}(3+k')z_2]+4K_1(\sqrt{2}z_1-\sqrt{1+k'})\}\times$$
$$\times\{\pi k^2E(k)-(1+k')[E^2(k)-2k'E(k)\mathscr{K}(k)+(k')^3\mathscr{K}^2(k)]\}.$$

Общее решение уравнения (5) легко находится в квадратурах и имеет вид

$$t=\int\limits_{k(0)}^{k}F(k,-\sqrt{1-k^2})\,dk. \tag{6}$$

Формулы (2), (4), (6) в принципе позволяют определить неравновесное значение энергии в любой момент времени при любом значении параметров модели (обменного интеграла, температуры термостата, начального отклонения энергии от равновесия). Однако сложность функции $F(k, k')$ не дает возможности найти искомое решение в явном аналитическом виде. Поэтому ниже будут подробно рассмотрены некоторые наиболее интересные случаи, для которых интеграл (6) вычисляется до конца.

3. РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Как известно, в двумерной модели Изинга в отсутствие внешнего магнитного поля существует фазовый переход в упорядоченное состояние, температура T_c которого определяется соотношением $\mathrm{sh}^2(I/2kT_c)=1$. Рассмотрим процесс релаксации энергии, описываемый уравнениями (3), (6) в случае, когда температура термостата T близка к T_c, но не совпадает с ней, т. е. $0<(T-T_c)/T_c\ll1$. Введем для большей физической наглядности результатов параметры

$$\delta=\frac{I}{4kT_c^2}(T-T_c),\quad X\equiv X(t)=\frac{I}{4kT^2}[T-T(t)],$$

которые характеризуют соответственно равновесное состояние термостата и неравновесное состояние спиновой системы. Предполагая далее, что отклонение изинговской спин-системы от равновесия настолько мало, что выполняются неравенства

$$|x|\ll|\delta|\ll1,\quad -\ln|\delta|\gg1, \tag{7}$$

и вычисляя величины, входящие в уравнение (5) с точностью до первых неисчезающих степеней $|X|$ и $|\delta|$, получим следующее простое уравнение для параметра X:

$$dX/dt=-X/\tau, \tag{8}$$

где время релаксации τ равно

$$\tau=A^{-1}\ln|\delta|^{-1},\quad A={}^4/_3(1-\pi^{-1})K_2+[\pi-4(1-\pi^{-1})]K_1. \tag{8a}$$

Поскольку параметры релаксации K_μ являются температурно зависимыми, то величина коэффициента A также зависит от температуры. Однако эта зависимость, определяемая характеристиками термостата, не имеет особенностей, и поэтому в рассматриваемой малой окрестности T_c можно положить $A(T)=A(T_c)$ и считать множитель A в (8a) константой.

Решение уравнения (8) имеет вид $X(t)=X(0)\exp(-t/\tau)$ и определяет закон эволюции энергии системы $\mathscr{E}(t)\equiv-\frac{I}{2}\langle\sigma_0\sigma_1\rangle_q$, приходящейся на один спин:

$$\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}_T=\Delta\mathscr{E}(0)\exp(-t/\tau), \tag{9}$$

где $\mathscr{E}_T$ — равновесное значение энергии, а $\Delta\mathscr{E}(0)=[\mathscr{E}(0)-\mathscr{E}_T]$ — начальное отклонение энергии от равновесия. Отметим, что при выводе формулы (9) использовалось соотношение

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_T-\frac{2I}{\pi}\ln|\delta|X(t),$$

следующее из формулы (4а) при условиях (7).

Из решения (9) видно, что вблизи температуры фазового перехода приближение энергии системы к равновесию происходит экспоненциально со временем релаксации τ, определяемым соотношением (8а). При $T\to T_c$ это время стремится к бесконечности по логарифмическому закону $\tau\propto\ln|4kT_c^2/I(T-T_c)|$, т. е. процесс релаксации замедляется. Это явление, известное под названием критического замедления, следует также из феноменологической теории критических явлений [11], в рамках которой показывается, что характер расходимости времени релаксации энергии в зависимости от величины $T-T_c$ совпадает с характером расходимости теплоемкости системы. Полученный нами на основе микроскопического рассмотрения результат подтверждает этот вывод, поскольку известно, что теплоемкость двумерной модели Изинга расходится при $T\to T_c$ по логарифмическому закону: $C\propto\ln|T_c/(T-T_c)|$ [12].

4. РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ $T=T_c$

Полагая, по-прежнему, что отклонение системы от равновесия мало ($|X|\ll1$), и проводя вычисления аналогично случаю $T\neq T_c$, придем к следующему уравнению для $X(t)$: $dX/dt=AX/\ln|X|$, решение которого имеет вид

$$X(t)=+\exp[-\sqrt{2At+\ln^2|X_0|}], \tag{10}$$

где $X_0\equiv X(0)<0$. При условии $|X|\ll1$ энергия $\mathscr{E}(t)$ связана с $X(t)$ соотношением

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_T+\frac{2I}{\pi}X(t)\ln|X(t)|,$$

которое при учете (10) приводит к следующему закону релаксации энергии:

$$\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}_T=\frac{\Delta\mathscr{E}(0)}{|X_0|\ln(1/|X_0|)}\sqrt{2At+\ln^2|X_0|}\exp[-\sqrt{2At+\ln^2|X_0|}]. \tag{11}$$

При больших временах ($t\gg\ln^2|X_0|/2A$) выражение (11) упрощается и принимает вид

$$\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}_T=\frac{\Delta\mathscr{E}(0)}{|X_0|\ln(1/|X_0|)}\sqrt{2At}\exp(-\sqrt{2At}). \tag{12}$$

Таким образом, при $T=T_c$ релаксация энергии не описывается обычной экспоненциальной зависимостью, а носит более сложный характер. Для сравнения на рис. 1 приведены графики, иллюстрирующие процесс приближения энергии к равновесию при $T=T_c$ (сплошная линия) и при $T\neq T_c$ (штриховая линия).

Отметим, что закон релаксации энергии в одномерной модели Изинга при температуре термостата $T=0$, являющейся для этой модели темпера-

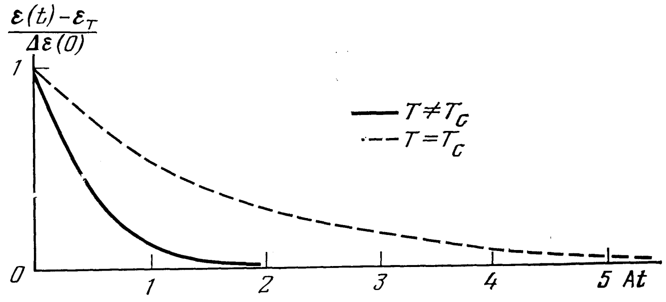


Рис. 1

турой фазового перехода, имеет вид [6] $\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}_T\infty 1/t$, $t\to\infty$, и существенно отличается от соответствующего закона (12) для двумерной модели. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что размерность модели оказывает определяющее влияние на ее релаксационные свойства в критической точке.

5. РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Если температура термостата T, а также неравновесный параметр $T(t)$ удовлетворяют условиям высокотемпературного приближения ($|I|\ll kT$, $|I|\ll kT(t)$), то уравнение (5) для эллиптического модуля k имеет простой вид

$$dk/dt=-2(K_1+K_2)k, \tag{13}$$

а связь энергии $\mathscr{E}(t)$ со значением $k(t)$ дается выражением

$$\mathscr{E}(t)=-\frac{I}{8}k(t). \tag{14}$$

Подставляя в (14) решение уравнения (13), получим экспоненциальный закон приближения энергии системы к равновесию

$$\mathscr{E}(t)-\mathscr{E}_T=\Delta\mathscr{E}(0)\exp(-t/\tau_1) \tag{15}$$

со временем релаксации $\tau_1^{-1}=2(K_1+K_2)$.

6. РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Для выяснения влияния геометрии решетки на характер неравновесных процессов рассмотрим релаксацию энергии модели Изинга в случае шестиугольной решетки. Гамильтониан $\mathscr{H}_s^h$ такой модели можно пред-

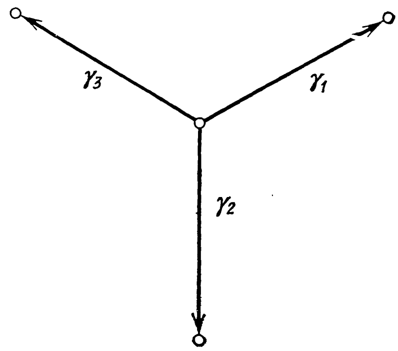


Рис. 2

ставить в виде

$$\mathscr{H}_s^{\,h} = -\frac{I}{4}\sum_{\mathbf{r}}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{\mathbf{r}}\sigma_{\mathbf{r}+\gamma_k},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор решетки, γ_k — вектор, соединяющий спин $\sigma_{\mathbf{r}}$ с ближайшим соседним спином $\sigma_{\mathbf{r}+\gamma_k}$ и принимающий три значения, показанные схематически на рис. 2. Модель Изинга на шестиугольной решетке также является точно решаемой [12], что позволяет повторить для нее все вычисления, проделанные выше для квадратной решетки.

Так, кинетическое уравнение для неравновесной корреляционной функции $\langle\sigma_{\mathbf{r}}\sigma_{\mathbf{r}+\gamma_k}\rangle = \langle\sigma_{\mathbf{r}}\sigma_{\mathbf{r}+\gamma_k}\rangle_q$, определяющей в однородном случае среднюю энергию спин-системы, имеет при одночастичном механизме релаксации вид

$$(16)\qquad \frac{d}{dt}\langle\sigma_0\sigma_1\rangle_q = z_1K_1 + z_3K_3 - 3(K_1+K_3)\langle\sigma_0\sigma_1\rangle_q + \\ + (3z_3K_3 - z_1K_1)\langle\sigma_1\sigma_2\rangle_q - (K_3-K_1)\langle\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle_q,$$

где введены сокращенные обозначения для координат спиновых переменных: $\sigma_0\equiv\sigma_{\mathbf{r}}$, $\sigma_k\equiv\sigma_{\mathbf{r}+\gamma_k}$, $k=1, 2, 3$; $z_\mu = \operatorname{th}(\mu\beta I/4)$, $\mu=1, 3$, а корреляционные функции, входящие в правую часть уравнения, вычисляются с помощью квазиравновесного статистического оператора

$$\rho_q^{\,h} = \exp[-\mathscr{H}_s^{\,h}/kT(t)]/\mathrm{Sp}\exp[-\mathscr{H}_s^{\,h}/kT(t)].$$

Решение уравнения (16) можно получить тем же способом, что и в случае квадратной решетки, поскольку равновесные значения всех входящих в (16) корреляторов вычислены точно [9, 10].

Оказалось, что в ситуациях, рассмотренных подробно в разделах 3—5, соответствующие законы релаксации энергии для прямоугольной и шестиугольной решеток имеют одну и ту же зависимость от времени. При этом претерпевают изменения лишь численные значения параметров релаксации. Так, законы релаксации энергии шестиугольной модели Изинга для случаев $0<(T-T_c)/T_c\ll 1$ и $T=T_c$ могут быть получены из формул (8а), (9) и (11) простой заменой параметра A на $B=\sqrt{3}\pi(3K_3+K_1)/18$. Аналогично в случае высоких температур имеем закон релаксации, совпадающий с (15), если в последнем заменить τ_1 на $\tau_1^{\,h}=(3K_3+K_1)^{-1}$.

Таким образом, полученные результаты подтверждают вывод феноменологической теории о независимости характера неравновесных процессов от геометрии системы (при одной и той же размерности).

7. РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ В СЛУЧАЕ ДВУХЧАСТИЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ РЕЛАКСАЦИИ

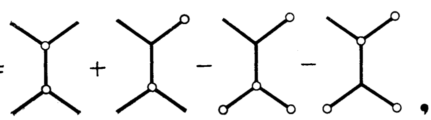
Рассмотрим релаксацию энергии шестиугольной модели Изинга в случае, когда гамильтониан $\mathcal{H}_{sf}$ взаимодействия спинов с термостатом имеет вид

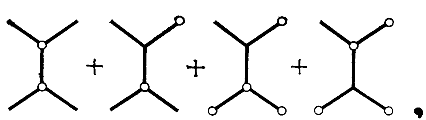
$$\mathcal{H}_{sf} \equiv \mathcal{H}_{sf}^{(2)} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{k=1}^{3} u_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}}^{+} S_{\mathbf{r}+\gamma_k}^{+} + S_{\mathbf{r}}^{-} S_{\mathbf{r}+\gamma_k}^{-}), \tag{17}$$

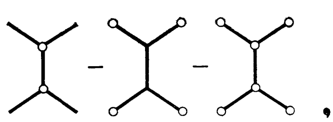
где $S_{\mathbf{r}}^{\pm} = S_{\mathbf{r}}^{x} \pm i S_{\mathbf{r}}^{y}$, а температура термостата совпадает с критической ($T = T_c$). Для такого двухчастичного механизма релаксации кинетическое уравнение для корреляционной функции $\langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle_q$ записывается в форме

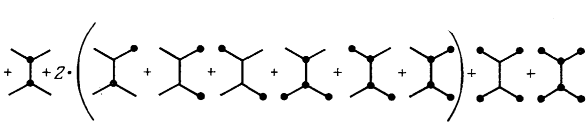
$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle_q = -K_1 (A_1^q - z_1 B_1^q) - K_3 (A_3^q - z_3 B_3^q), \tag{18}$$

где

$\frac{1}{4} A_1^q =$  ,

$\frac{1}{4} A_3^q =$  ,

$\frac{1}{2} B_1^q = 1 +$  ,

$B_3^q = 1 +$ 

а символы вида  , обозначают квазиравновесные корреляционные функции спинов, расположенных в выделенных узлах шестиугольной решетки.

Используя точные результаты для корреляторов, входящих в правую часть уравнения (18), получим, что при $T = T_c$ закон релаксации энергии имеет такой же вид, как и в случае одночастичного механизма релаксации (см. формулу (11)), если в последнем константу A заменить на

$$C^{+}={}^{1}/_{9}K_{1}[10\pi(\sqrt{3}+1)/3-4(\sqrt{3}+3)]+$$
$$+{}^{1}/_{9}K_{3}[\pi(21\sqrt{3}+26)/3+4(\sqrt{3}+3)]$$

при $I>0$ или на

$$C^{-}={}^{1}/_{9}K_{1}[10\pi\sqrt{3}(3-\sqrt{3})/9-4\sqrt{3}(3-1)]+$$
$$+{}^{1}/_{9}K_{3}[4(3-\sqrt{3})\ \cdot\pi(26-14\sqrt{3})/3]$$

при $I<0$.

Отметим, что точно такая же ситуация имеет место и в случае двухчастичных механизмов релаксации, отличных от (17):

$$\mathscr{H}_{sf}^{(2')}=\sum_{\mathbf{r}}\sum_{k=1}^{3}U_{\mathbf{r}}\,(S_{\mathbf{r}}{}^{+}S^{-}_{\mathbf{r}+\gamma_k}+S_{\mathbf{r}}{}^{-}S^{+}_{\mathbf{r}+\gamma_k}),$$

$$(19)\qquad \mathscr{H}_{sf}^{(2'')}\ \sum_{\mathbf{r}}\sum_{k=1}^{3}[U_{\mathbf{r}}\,(S_{\mathbf{r}}{}^{+}S^{z}_{\mathbf{r}+\gamma_k}+S_{\mathbf{r}}{}^{z}S^{-}_{\mathbf{r}+\gamma_k})+\mathrm{h.\ c.}],$$

причем в случае (19) аналогично одночастичному механизму процесс релаксации не зависит от знака обменного интеграла I. Таким образом, характер релаксации энергии в критической точке существенно не изменяется при смене ее механизма. Этот факт также согласуется с выводами феноменологической теории критических явлений.

Авторы благодарны А. Р. Кесселю за постоянное внимание и ряд полезных замечаний.

Литература

[1] *Glauber R. J.*— J. Math. Phys., 1963, *4*, 294.
[2] *Matsudaira N.*— Can. J. Phys., 1967, *45*, 2901.
[3] *Tanaka M., Takanashi K.*— J. Phys. Soc. Japan, 1977, *43*, 1832.
[4] *Berim G. O., Kessel A. R.*— Physica, 1980, *101a*, 112.
[5] *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
[6] *Berim G. O., Kessel A. R.*— Physica, 1980, *101A*, 127.
[7] *Berim G. O., Kessel A. R., Shakirzianov M. M.*— Physica, 1981, *105A*, 187.
[8] *Berim G. O., Kessel A. R.*— Physica, 1979, *96B*, 71.
[9] *Fisher M. E.*— J. Math. Phys., 1963, *4*, 124.
[10] *T. Allan G. A., Betts D. D.*— Can. J. Phys., 1968, *46*, 15.
[11] *Halperin B. I., Hohenberg P. C., Ma S.*— Phys. Rev., 1974, *B10*, 139.
[12] *Houtappel R. M. F.*— Physica, 1950, *16*, 425.

Казанский физико-технический институт
Казанского филиала
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14.III.1983 г.

RELAXATION OF TWO — DIMENSIONAL ISING MODEL ENERGY IN THE ABSENCE OF THE EXTERNAL CONSTANT MAGNETIC FIELD

Berim G. O., Kamalov R. G.

The kinetic equation for the energy of two-dimensional Ising model ($S={}^{1}/_{2}$) is derived by means of the nonequilibrium statistical operator method. Solutions of this equation are obtained in analytical form at different relationships between the heat bath temperature and the phase transition temperature of the spin system. In particular, the relaxation of the energy in critical region is investigated. The influence of the lattice geometry and the interaction of the spin system with the heat bath upon relaxation properties of the model is considered.