Качалов А.П.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ

В этой работе рассматривается применение лучевого метода к задаче распространения упругих волн в кристаллах пьезоэлектрика.

Система дифференциальных уравнений, описывающая распространение упругих волн в пьезоэлектрике, имеет вид [I]

$$\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{I}$$

$$T_{ik}=c_{iklm}(\vec{x})u_{lm}-e_{j,ik}(\vec{x})E_j \tag{2}$$

$$\mathcal{D}_n=4\pi e_{n,lm}(\vec{x})u_{lm}+\varepsilon_{jn}(\vec{x})E_j \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_n}{\partial x_n}=-4\pi e n \tag{4}$$

$$j_k=\sigma_{ik}(\vec{x})E_i+e\cdot f(\vec{x})D_{ik}(\vec{x})\frac{\partial n}{\partial x_i} \tag{5}$$

$$\frac{\partial j_k}{\partial x_k}=e\frac{\partial n}{\partial t}\ , \tag{6}$$

где ρ – плотность кристалла,

T_{ik}, u_{ik} – тензоры напряжений и деформаций,

$E_j=-\frac{\partial\psi}{\partial x_j}$ – вектор электрического поля,

j_k – вектор тока,

$\mathcal{D}_n$ – вектор электрической индукции,

n – превышение концентрации электронов над равновесным значением,

f – фактор ловушек,

c_{iklm}, $e_{j,ik}$ – тензоры упругих констант и пьезоэлектрической постоянной,

ε_{jn}, σ_{ik}, D_{ik} – тензоры диэлектрической проницаемости, проводимости кристалла и диффузии электронов.

Преобразим систему уравнений (I) – (6) к более удобному виду. Подставляя (2) в (I), получим

$$\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_{iklm}(\vec{x})u_{lm}-e_{j,ik}(\vec{x})E_j\right). \tag{7}$$

Из системы уравнений (4) – (6) имеем

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\mathcal{D}_n}{\partial x_n\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}(\vec{x})E_i-\frac{1}{4\pi}f(\vec{x})D_{ik}(\vec{x})\frac{\partial^2\mathcal{D}_n}{\partial x_i\partial x_n}\right)=0\ . \tag{8}$$

Заменим E_j на $-\frac{\partial\psi}{\partial x_j}$, выразим из уравнения (3) и вместо $f(\vec{x})D_{ik}(\vec{x})$ будем писать $d_{ik}(\vec{x})$. Получим следующую систему уравнений

$$\rho(\vec{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_{iklm}(\vec{x})u_{lm}+e_{j,ik}(\vec{x})\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial t}\left(e_{n,lm}(\vec{x})\cdot u_{lm}\right)-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial t}\left(\varepsilon_{jn}(\vec{x})\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)- \tag{9}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}(\vec{x})\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[d_{ik}(\vec{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_n}\left(e_{n,lm}(\vec{x})u_{lm}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left[d_{ik}(\vec{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_n}\left(\varepsilon_{jn}(\vec{x})\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\right]=0.$$

Как обычно ищем решение этой системы уравнений в виде формального разложения по обратным степеням ω

$$\vec{u}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\vec{u}_s(\vec{x})e^{-i\omega(t-\tau)}}{(-i\omega)^{s+\gamma}};\qquad \psi=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\psi_s(\vec{x})e^{-i\omega(t-\tau)}}{(-i\omega)^{s+\gamma}}. \tag{10}$$

Подставляя их выражения в систему (9) и приравнивая коэффициенты при старших степенях ω, получим

$$\left(c_{iklm}\tau_k\tau_l-\rho\delta_{im}\right)u_{m0}=-e_{j,ik}\tau_j\tau_k\psi_0$$
$$d_{ik}\tau_i\tau_k\cdot e_{j,im}\tau_j\tau_m u_{i0}=\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{jn}\tau_j\tau_n\psi_0\cdot d_{ik}\tau_i\tau_k, \tag{11}$$

где $\tau_j=\frac{\partial\tau}{\partial x_j}$. При этом мы воспользовались тем, что

$$c_{iklm}=c_{kilm}=c_{lmik};\quad e_{j,ik}=e_{j,ki}.$$

Введем обозначения $c_{iklm}\tau_k\tau_l=a_{im}$, $\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{jn}\tau_j\tau_n=c$, $e_{j,ik}\tau_j\tau_k=b_i$. Далее будем считать, что d_{ik} положительно определенная матрица. Тогда на $d_{ik}\tau_i\tau_k$ во втором уравнении можно сократить и система (11) запишется в следующем виде

$$(a_{im}-\rho\delta_{im})u_{m0}=-b_i\psi_0$$
$$b_i u_{i0}=c\psi_0. \tag{12}$$

Выразим ψ_0 из второго уравнения системы (12) и подставим в первое. Для того, чтобы можно было делить на c будем считать, что ε_{jn} положительно определенная матрица. Получим однородную систему уравнений относительно $\vec{u}_0$.

$$\left(a_{im}+\frac{b_i b_m}{c}\right)u_{m0}=\rho u_{i0}. \tag{13}$$

Считая, что эта система имеет отличное от 0 решение, получаем, что $\rho(\vec{x})$ – собственное число матрицы $\mathcal{A}+\frac{\mathcal{B}}{c}$, а $\vec{u}_0$ ее собственный вектор, соответствующий собственному числу $\rho(\vec{x})$.

Покажем, что матрица $a_{im}+\frac{b_i b_m}{c}$ положительная. В самом деле

$$R=(a_{im}+\frac{b_i b_m}{c}\alpha_i\alpha_m=c_{ik\ell m}\tau_k\tau_\ell\alpha_i\alpha_m+$$
$$+\frac{1}{c}e_{j,ik}\tau_j\tau_k\cdot e_{n,m\ell}\tau_n\tau_\ell\alpha_i\alpha_m\ .$$

Обозначим $u_{ik}=\frac{1}{2}(\alpha_i\tau_k+\alpha_k\tau_i)$ и $E_j=-\frac{1}{c}e_{n,\ell m}\tau_n u_{\ell m}\cdot\tau_j$.

Тогда

$$R=2\left\{\frac{1}{2}c_{ik\ell m}u_{ik}u_{\ell m}+\frac{\varepsilon_{jn}}{8\pi}E_jE_n\right\}=$$
$$=2\cdot\left\{\frac{1}{2}T_{ik}u_{ik}+\frac{1}{8\pi}\mathcal{D}_nE_n\right\}=2W(u_{ik},E_n)>0\ ,$$

так как W – есть потенциальная энергия упругой волны в пьезоэлектрике [2].

Пусть $N_1(\tau_j)$, $N_2(\tau_j)$, $N_3(\tau_j)$ собственные числа матрицы

Они >0, так как $\mathcal{A}+\frac{\mathcal{B}}{c}$ положительная матрица. Очевидно, что N_i однородные функции второй степени относительно τ_i. Так как $\rho(\vec{x})$ есть собственное число этой матрицы, то при некотором λ $N_\lambda(\tau_j)=\rho(\vec{x})$. Можно считать, что $\lambda=1$. Тогда $\frac{N_1(\tau_j)}{\rho(\vec{x})}=1$ дифференциальное уравнение для τ, которое является аналогом уравнения эйконала [3]. При этом $\tau=\int_{M_0}^{M}L(\vec{x},\mathring{\vec{x}})\,d\sigma$ вдоль экстремали, где L положительно-линейная функция по $\mathring{x}$. Ее можно получить из тождества $L^2(\vec{x},\mathring{\vec{x}})=\frac{N_1(\tau_j)}{\rho(\vec{x})}$.

Выражение τ_j через $\mathring{x}_i$ и x_i можно получить решая уравнение

$$\mathring{x}_k=\frac{\partial}{\partial\tau_k}\left(\frac{N_1(\tau_j)}{\rho(\vec{x})}\right).$$

Поскольку $\vec{u}_0$ есть собственный вектор соответствующий собственному числу $\rho(\vec{x})$, то $\vec{u}_0=\varphi_0(\vec{x})\cdot\vec{s}^{\,1}(\vec{x})$, где $\vec{s}^{\,1}$ нормированный собственный вектор.

Рассмотрим теперь следующие члены ряда по ω.

При $s=1$ имеем

$$\left.\begin{aligned}&(\mathcal{A}-\rho E)\vec{u}_1=-\vec{b}\cdot\psi_1+\vec{F}_1(\psi_0,\vec{u}_0)\\&(\vec{b},\vec{u}_1)=c\psi_1+\Phi_1(\psi_0,\vec{u}_0),\end{aligned}\right.\qquad(14)$$

где

$$\vec{F}_1(\psi_0,\vec{u}_0)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_{ik\ell m}(\vec{x})\right)\tau_\ell u_{m_0}-\frac{\partial}{\partial x_k}e_{j,ik}\cdot\tau_j\cdot\psi_0+$$

$$+c_{ik\ell m}(\vec{x})\left\{\frac{\partial u_{m0}}{\partial x_k}\tau_\ell+\frac{\partial u_{m0}}{\partial x_\ell}\tau_k+u_{m0}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k\partial x_\ell}\right\}+$$

$$+\ell_{j,ik}(\vec{x})\left\{\frac{\partial\Psi_0}{\partial x_k}\tau_j+\frac{\partial\Psi_0}{\partial x_j}\tau_k+\Psi_0\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k\partial x_j}\right\}; \quad (15)$$

$$d_{ik}(\vec{x})\tau_i\tau_k\cdot\Phi_1(\Psi_0,\vec{u}_0)=e_{n,\ell m}(\vec{x})\tau_n\tau_m u_{\ell 0}-\frac{\varepsilon_{jn}}{4\pi}\tau_n\tau_j\Psi_0+$$

$$+\frac{\partial d_{ik}(\vec{x})}{\partial x_k}\tau_i\tau_n\tau_m e_{n,m\ell}(\vec{x})u_{\ell 0}+d_{ik}(\vec{x})\cdot\left\{\tau_n\tau_i\tau_k e_{n,\ell m}(\vec{x})\frac{\partial u_{\ell 0}}{\partial x_m}+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(e_{n,\ell m}(\vec{x})u_{\ell 0}\tau_m\right)\tau_i\tau_k+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_{n,\ell m}(\vec{x})u_{\ell 0}\tau_m\tau_n\right)\tau_k+$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(e_{n,\ell m}(\vec{x})u_{\ell 0}\tau_m\tau_n\tau_i\right)\right\}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial d_{ik}(\vec{x})}{\partial x_k}\cdot\varepsilon_{jn}(\vec{x})\Psi_0\tau_j\tau_i\tau_n- \quad (16)$$

$$-\frac{1}{4\pi}d_{ik}(\vec{x})\cdot\left\{\frac{\partial\Psi_0}{\partial x_j}\varepsilon_{jn}(\vec{x})\tau_i\tau_n\tau_k+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\varepsilon_{jn}(\vec{x})\Psi_0\tau_j\right)\tau_i\tau_k+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{jn}(\vec{x})\Psi_0\tau_j\tau_n\right)\tau_k+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon_{jn}(\vec{x})\Psi_0\tau_j\tau_n\tau_i\right)\right\}.$$

Преобразуем выражения (15) и (16), используя тождество $(\vec{\ell},\vec{u}_0)=c\Psi_0$. Получим

$$\vec{F}_1(\Psi_0,\vec{u}_0)=c_{ik\ell m}(\vec{x})\frac{\partial u_{m0}}{\partial x_\ell}\tau_k+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_{ik\ell m}(\vec{x})u_{m0}\tau_\ell\right)+$$

$$+e_{j,ik}(\vec{x})\frac{\partial\Psi_0}{\partial x_j}\tau_k+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(e_{j,ik}(\vec{x})\Psi_0\tau_j\right). \quad (17)$$

$$\Phi_1(\Psi_0,\vec{u}_0)=e_{n,\ell m}(\vec{x})\tau_n\frac{\partial u_{\ell 0}}{\partial x_m}-\frac{\varepsilon_{jn}(\vec{x})}{4\pi}\tau_n\frac{\partial\Psi_0}{\partial x_j}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(e_{n,\ell m}(\vec{x})u_{\ell 0}\tau_m-\frac{\varepsilon_{jn}(\vec{x})}{4\pi}\Psi_0\tau_j\right). \quad (18)$$

Выражаем Ψ_1 из 2-го уравнения системы (14) и подставляем в 1-е уравнение. Получим

$$\left(a_{im}+\frac{b_i b_m}{c}\right)u_{m1}-\rho u_{i1}=\vec{F}_1(\Psi_0,\vec{u}_0)+\frac{1}{c}\Phi_1(\Psi_0,\vec{u}_0)\cdot b_i\,. \quad (19)$$

Так как определитель матрицы $a_{im}+\frac{b_i b_m}{c}-\rho\delta_{im}$ равен 0, то для разрешимости системы (19) необходимо, чтобы

$$\left(\vec{F}_1(\Psi_0,\vec{u}_0)+\frac{1}{c}\Phi(\Psi_0,\vec{u}_0)\vec{b},\vec{s}^1\right)=0. \qquad (20)$$

Умножим (20) на φ_0 и используем $(\vec{b},\vec{u}_0)=c\Psi_0$. Тогда

$$\varphi_0(\vec{F}_1(\Psi_0,\vec{u}_0),\vec{s}^1)+\Psi_0\cdot\Phi_1(\Psi_0,\vec{u}_0)=0. \qquad (21)$$

Умножая левую часть (21) на произвольную финитную непрерывно дифференцируемую функцию, получим

$$\int\gamma\{\varphi_0\cdot(\vec{F}_1,\vec{s}^1)+\Psi_0\Phi_1\}d\vec{x}=0. \qquad (22)$$

Интегрируем (22) по частям. Так как γ – финитная функция, то внеинтегральные члены пропадают. Опускаем несложные, но достаточно громоздкие выкладки. В результате их будем иметь:

$$\iint\Big\{c_{ik\ell m}(\vec{x})\cdot u_{m0}u_{i0}\tau_\ell+[e_{j,ik}(\vec{x})+e_{k,ij}(\vec{x})]\Psi_0u_{i0}\tau_j-\frac{\varepsilon_{jk}}{4\pi}\cdot\Psi_0^2\tau_j\Big\}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}d\vec{x}=0.$$

Далее заменяем $\vec{u}_0$ на $\varphi_0\vec{s}^1$, а Ψ_0 на $\frac{1}{c}(\vec{b},\vec{u}_0)=\frac{1}{c}\varphi_0\cdot(\vec{b},\vec{s}^1)$. Тогда

$$\int\frac{\varphi_0^2}{c^2}\Big\{c^2c_{ik\ell m}(\vec{x})s_m^1s_i^1\tau_\ell+c[e_{j,ik}(\vec{x})+e_{k,ij}(\vec{x})]e_{n,\ell m}(\vec{x})\tau_n\tau_\ell\tau_j s_i^1s_m^1-$$
$$-\frac{\varepsilon_{tk}(\vec{x})}{4\pi}e_{n,m\ell}(\vec{x})e_{j,ik}(\vec{x})\tau_j\tau_k\tau_n\tau_\ell\tau_t s_m^1s_i^1\Big\}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}d\vec{x}=0. \qquad (23)$$

Прежде чем заниматься дальнейшими преобразованиями подинтегрального выражения, рассмотрим соотношение для собственного вектора $\vec{s}^1$

$$\left(a_{im}+\frac{b_ib_m}{c}\right)s_m^1=N_1(\tau_j)\cdot s_i^1. \qquad (24)$$

Умножим обе части тождества на s_i^1 и просуммируем по i. Так как $\vec{s}^1$ имеет норму 1, то

$$N_1=c_{ik\ell m}\cdot\tau_k\tau_\ell\cdot s_m^1\cdot s_i^1+\frac{1}{c}e_{j,ik}\tau_j\tau_ke_{n,\ell m}\tau_n\tau_\ell s_m^1s_i^1. \qquad (25)$$

Как уже показывалось выше $\dot{x}_k=\frac{\partial(\frac{N_1}{\gamma})}{\partial\tau_k}$. Подставив вместо его выражение из (25) и продифференцировав его, получим

$$\frac{\rho\dot{x}_k}{2}=\Big(c_{ik\ell m}\tau_\ell+\frac{1}{c}(e_{j,ik}+e_{k,ij})e_{n,\ell m}\tau_j\tau_n\tau_\ell-$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{\varepsilon_{jk}}{4\pi}\tau_je_{j,ik}e_{n,\ell m}\tau_j\tau_k\tau_n\tau_\ell\Big)\cdot s_m^1s_i^1. \qquad (26)$$

Подставим это выражение в интеграл (23) и используем обозначение $J=\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(\tau,\alpha,\beta)}$. Здесь τ, α, β, лучевые координаты. Тогда будем иметь

$$\int \frac{\rho \dot{x}_\kappa}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\kappa} \cdot \varphi_0^2 J d\tau\, d\alpha\, d\beta = 0$$

или

$$\int \frac{\rho}{2} \frac{d\gamma}{d\tau} \varphi_0^2 J d\tau\, d\alpha\, d\beta = 0 .$$

Интегрируем по частям. Внеинтегральные члены пропадут, так как γ – финитная функция. Получим

$$\int \gamma \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho}{2} \varphi_0^2 J\right) d\tau\, d\alpha\, d\beta = 0$$

и, поскольку γ произвольная финитная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\frac{d}{d\tau} (\rho \varphi_0^2 J) = 0 . \tag{27}$$

Решая дифференциальное уравнение (27), получим выражение для φ_0

$$\varphi_0 = \frac{f_0(\alpha, \beta)}{\sqrt{\rho J}} , \tag{28}$$

где $f_0(\alpha, \beta)$ произвольная функция.

Так как $|\vec{u}_0| = \varphi_0$, то эта формула дает закон изменения интенсивности волны вдоль луча. Она аналогична результатам полученным в других работах.

Заметим, что доказано несколько больше. А именно, если $\vec{u} = \varphi \cdot \vec{s}^1$ и $\psi = \frac{1}{c} \varphi \cdot (\vec{b}, \vec{s}^1)$, то

$$\left(\vec{F}_1(\psi, \vec{u}) + \frac{1}{c} \vec{b} \Phi_1(\psi, \vec{u}), \vec{s}^1\right) = \frac{1}{2J} \left\{ \frac{d}{d\tau}(\rho J) \varphi + 2\rho J \frac{d\varphi}{d\tau} \right\} . \tag{29}$$

Пусть собственное число $N_1(\tau_j)$ имеет кратность I, тогда

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \varphi_1 \cdot \vec{s}^1 + D(\vec{F}_1(\psi_0, \vec{u}_0) + \Phi_1(\psi_0, \vec{u}_0) \cdot \vec{b}_1) \\ \psi_1 &= \frac{1}{c} [(\vec{b}, \vec{u}_1) - \Phi_1(\psi_0, \vec{u}_0)] \end{aligned} \tag{30}$$

φ_1 – неизвестная пока функция. D – обратный оператор к $(A + \frac{B}{c} - \rho E)$ на подпространстве $\vec{s}^2$, $\vec{s}^3$, где $(\vec{s}^i, \vec{s}^j) = \delta_{ij}$.

Рассматривая следующие по ω члены, будем иметь при $s = 2$

$$(A - \rho E) \vec{u}_2 = -\vec{b} \psi_2 + \vec{F}_1(\psi_1, \vec{u}_1) + \vec{F}_2(\psi_0, \vec{u}_0) \tag{31}$$

$$(\vec{b}, \vec{u}_2) = c\psi_2 + \Phi_1(\psi_1, \vec{u}_1) + \Phi_2(\psi_0, \vec{u}_0) .$$

Выражаем ψ_2 из 2-го уравнения и подставляем в 1-е уравнение

$$\left(A + \frac{B}{c} - \rho E\right) \vec{u}_2 = \vec{F}_1(\psi_1, \vec{u}_1) + \frac{1}{c} \vec{b} \Phi_1(\psi_1, \vec{u}_1) + \vec{F}_2(\psi_0, \vec{u}_0) + \frac{1}{c} \vec{b} \Phi_2(\psi_0, \vec{u}_0) .$$

Обозначим $\vec{F}_2+\frac{1}{c}\vec{b}\Phi_2$ через $\vec{\Gamma}$. Правая часть снова должна быть ортогональна $\vec{s}^1$, т.е.

$$\left(\vec{F}_1(\Psi_1,\vec{u}_1)+\frac{1}{c}\vec{b}\Phi_1(\Psi_1,\vec{u}_1)+\vec{\Gamma}(\Psi_0,\vec{u}_0),\vec{s}^1\right)=0\,. \tag{32}$$

Или, используя линейность по Ψ и u для $\vec{F}_1$ и Φ_1, получим

$$\frac{1}{2J}\left\{\frac{d}{d\tau}(\rho J)\cdot\varphi_1+2\rho J\frac{d\varphi_1}{d\tau}\right\}+\vec{\mathcal{M}}_1(\Psi_0,\vec{u}_0)\vec{s}^1=0\,, \tag{33}$$

где $\vec{\mathcal{M}}_1$, некоторая вектор функция от Ψ_0 и u_0. Решая уравнение (33), получим выражение для φ_1

$$\varphi_1=\frac{f_1(\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho J}}-\frac{1}{\sqrt{\rho J}}\int^{\tau}\frac{J\vec{\mathcal{M}}_1(\Psi_0,\vec{u}_0)\cdot\vec{s}^1}{\sqrt{\rho J}}d\tau\,. \tag{34}$$

Аналогично, для произвольного к $\geqslant$ 1 имеем

$$u_k=\varphi_k\vec{s}^1+D(\vec{F}_1(\Psi_{k-1},\vec{u}_{k-1}))+\frac{1}{c}\Phi_1(\Psi_{k-1},\vec{u}_{k-1})\vec{b}_1+\vec{\Gamma}_k(\Psi_{k-2}\ldots\Psi_0,\vec{u}_0)$$

$$\varphi_k=\frac{f_k(\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho J}}-\frac{1}{\sqrt{\rho J}}\int^{\tau}\sqrt{\frac{J}{\rho}}\,\mathcal{M}_k(\Psi_{k-1},\vec{u}_{k-1},\ldots,\Psi_0,\vec{u}_0)\vec{s}^1d\tau\,. \tag{35}$$

Функции $f_k(\alpha,\beta)$ произвольные. Они могут быть определены из граничных условий.

Плотность энергии упругой волны в пьезоэлектрике равна[2]

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}T_{ik}u_{ik}+\frac{1}{8\pi}\mathcal{D}_nE_n\,. \tag{36}$$

Преобразуем выражение (36), используя (2) и (3). Далее подставим в формулу выражение для u и Ψ из (10) и ограничимся главными по ω членами. Тогда выражение примет вид

$$\frac{1}{2}\omega^{2-\gamma}\left\{\rho|\vec{u}_0|^2+c_{iklm}u_{i0}u_{m0}\tau_k\tau_l+\frac{\varepsilon_{jn}}{4\pi}\Psi_0^2\tau_j\tau_n\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\omega^{2-\gamma}\left\{\rho|\vec{u}_0|^2+a_{im}u_{i0}u_{m0}+c\Psi_0^2\right\}=\frac{1}{2}\omega^{2-\gamma}\left\{\rho|\vec{u}_0|^2+\rho|\vec{u}_0|^2\right\}=$$

$$=\omega^{2-\gamma}\rho|\vec{u}_0|^2=\frac{\omega^{2-\gamma}}{J(\mathcal{M})}f_0(\alpha,\beta)\,.$$

Так как $d\vec{x}=J d\alpha d\beta d\tau$ для лучевой трубки $[\alpha,\alpha+d\alpha]$, $[\beta,\beta+d\beta]$, $[\tau,\tau+d\tau]$, то получим, что энергия заключенная внутри малого объема с точностью до главных по ω членов остается неизменной при движении волнового фронта.

Литература

I Викторов И.А. Рэлеевские волны в кристаллах сульфида кадмия. ДАН, 178, № 6, 1968, с.1281-1284.

2 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1959, с.102-105.

3 Бабич В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной среды. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, с.36-46.