СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIX, № 6 НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 1988

УДК 517.55 : 513.838

А. П. ЮЖАКОВ

# РАЗДЕЛЯЮЩАЯ ПОДГРУППА И ЛОКАЛЬНЫЕ ВЫЧЕТЫ

Локальный вычет мероморфной формы $\omega = hdz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n/f_1 \ldots f_n$ относительно голоморфного отображения $f=(f_1, \ldots, f_n)$, имеющего в точке $a \in \mathbf{C}^n$ изолированный нуль (относительно системы $n$ дивизоров $S_j = \{z \in U_a\colon f_j(z)=0\}$, $j=1, \ldots, n$), определяется (см. [1, гл. 5]) как

$$\operatorname*{res}_a{}_f\, \omega = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\gamma_a} \omega, \tag{1}$$

где $\gamma_a = \{z \in U_a\colon |f_1| = \ldots = |f_n| = \varepsilon\}$. Локальный вычет является наиболее естественным многомерным аналогом вычета Коши. Его частный случай — кратный логарифмический вычет (см. [2, § 2—4]). Для локального вычета имеет место формула преобразования [1], позволяющая выразить равенство (1) через производные в точке.

Многие важные задачи приводят к интегралам вида

$$\int\limits_{\gamma} \omega, \tag{2}$$

где $\omega$ — голоморфная форма степени $n$ в $\mathbf{C}^n$ (на комплексном аналитическом многообразии $X$) с особенностями на аналитическом множестве $T$, в частности, $\omega$ — мероморфная форма с полярным дивизором $T$, $\gamma$ — компактный цикл в $\mathbf{C}^n \backslash T$. Так как форма $\omega$ замкнута, то вычисление интеграла (1) сводится к изучению группы гомологий $H_n(\mathbf{C}^n \backslash T)$ и вычислению интегралов по базисным циклам (вычетов, см. [2, § 13]). В общем случае группа гомологий $H_n(\mathbf{C}^n \backslash T)$ может быть сложной, а интегралы по базисным циклам допускать лишь понижение кратности интегрирования (см., например, формулу кратного вычета Лере [2, § 16]). Наиболее простым оказывается случай, когда интеграл (2) выражается только через локальные вычеты. Такие интегралы возникают, например, при интегральном представлении комбинаторных сумм (см. [3] и [2, § 24]), исследовании особенностей композиции Адамара двойных степенных рядов [4], вычислении ошибки квантования двойных цифровых фильтров [5] и др. Именно то обстоятельство, что соответствующие интегралы выражаются через локальные вычеты, позволило в указанных работах получить простое и законченное решение.

В связи с этим встает общая задача: выделить и изучить подгруппу группы гомологий $H_n(X \backslash T)$, связанную с локальными вычетами. Эту подгруппу будем называть *разделяющей*, а цикл, класс которого принадлежит ей,— *разделяющим* (термин оправдывается тем, что цикл $\gamma_a$ в (1) разделяет полярные дивизоры $S_1, \ldots, S_n$). Понятие разделяющего цикла впервые ввел Фантаппье [6] для $n=2$. Разделяющая подгруппа, а также необходимое условие разделяющего цикла относительно системы $n$ дивизоров были рассмотрены Мартинелли ([7], $n=2$) и Сорани ([8], $n \geqslant 2$) в связи с кратным логарифмическим вычетом. Достаточные условия разделяющего цикла относительно $n$ дивизоров даны в работах [5, 9, 10].

В настоящей работе определена разделяющая подгруппа для случая, когда число особых дивизоров $m$ больше $n = \dim_{\mathbf{C}} X$. Указаны необходимое и некоторые достаточные условия разделяющего цикла, т. е. условия, при которых интеграл (1) выражается через локальные вычеты (предложение 1, теорема 1); для некоторых случаев $X$ и дивизоров $T_j$ находятся база разделяющей подгруппы и формула коэффициентов разложения разделяющего цикла по базе (теоремы 2, 4).

Заметим, что в отличие от одной переменной вычет (1) формы $\omega$ в точке $a$ может быть не единственным. Если голоморфные функции $f_j$ в точке $a$ разлагаются на множители, то, группируя их в знаменателе формы $\omega$ в произведение $n$ сомножителей иным способом, получим другой вычет формы $\omega$ в точке $a$. Теорема 3 дает соотношения между локальными вычетами в точке $a$ и является локальным многомерным аналогом теоремы о полной сумме вычетов. Для $n = 2$ такое соотношение единственно, оно было указано в [7]. Теорема о полной сумме вычетов относительно системы $n$ дивизоров на компактном аналитическом многообразии $X$ установлена в [11] (см. также [1]). В [12] приведены некоторые, вытекающие из нее обобщения для случая, когда число дивизоров $m$ больше $n = \dim_{\mathbf{C}} X$.

Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{O}(D)$ — множество функций, голоморфных в области $D \subset X$; $(a_1, \ldots [j, k] \ldots, a_n)$ означает, что элементы с индексами $j$ и $k$ пропущены; $H_p(X), H^p(X), Z_p(X)$, $Z^p(X)$ — соответственно группы компактных гомологий, когомологий де Рама, циклов, замкнутых форм на $X$.

**Определения, основные результаты.** Пусть $X$ — комплексное аналитическое многообразие комплексной размерности $n$, $T_1, \ldots, T_m$ — аналитические подмножества в нем чистой коразмерности 1 (положительные дивизоры), $T = T_1 \cup \ldots \cup T_m$. Возьмем разбиение множества $\{1, \ldots, m\}$ на $n$ непустых непересекающихся подмножеств: $J = (J_1, \ldots, J_n)$ и рассмотрим соответствующую систему $n$ дивизоров $S = (S_1, \ldots, S_n)$, где $S_k = \bigcup_{j \in J_k} T_j$. Пусть $a$ — изолированная точка пересечения $S_1 \cap \ldots \cap S_n$. Построим цикл

$$\Gamma_{J,a} = \{z \in U_a\colon\ |\varphi_1(z)| = \ldots = |\varphi_n(z)| = \varepsilon\}, \tag{3}$$

разделяющий дивизоры $S_1, \ldots, S_n$ в точке $a$, где $U_a$ — окрестность точки $a$, $\varphi_j$ — определяющая функция дивизора $S_j$ в $U_a$: $S_j \cap U_a = \{z \in U_a\colon \varphi_j(z) = 0\}$, $\varphi_j \in \mathcal{O}(U_a)$. Ориентация цикла $\Gamma_{J,a}$ определяется условием $d(\arg \varphi_1) \wedge \ldots \wedge d(\arg \varphi_n) \geqslant 0$. Очевидно, что $\Gamma_{J,a} \in Z_n\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} S_j\right) = Z_n(X \setminus T)$. Подгруппу группы $H_n(X \setminus T)$, порожденную циклами вида (3) для всевозможных разбиений $J$ и изолированных точек $a \in S_1 \cap \ldots \cap S_n$, назовем *разделяющей подгруппой* и обозначим ее через $H_n^*(X \setminus T)$. Если класс цикла $\gamma$ принадлежит разделяющей подгруппе, т. е.

$$\gamma \sim \sum_{J,a} n_{J,a} \Gamma_{J,a}, \tag{4}$$

в $X \setminus T$ (в этом случае цикл $\gamma$ называем *разделяющим*), то интеграл (2) представляется в виде

$$\int_\gamma \omega = (2\pi i)^n \sum_{J,a} n_{J,a} \operatorname*{res}_a{}_S \omega,$$

где $\operatorname*{res}_a{}_S \omega = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{J,a}} \omega$ — локальный вычет формы $\omega$ в точке $a$ относительно системы дивизоров $S$.

Нас интересуют топологические признаки разделяющего цикла. Необходимые условия дает

**Предложение 1.** *Если класс* $[\gamma]$ *принадлежит* $H_n^*(X\setminus T)$, *то*

$$\gamma \sim 0 \text{ в } X\setminus(T_{j_1}\cup \ldots \cup T_{j_{n-1}}) \tag{5}$$

*для любого набора* $n-1$ *индексов* $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\}\subset\{1, \ldots, m\}$.

Условия (5) в общем случае недостаточны для того, чтобы цикл $\gamma\in Z_n(X\setminus T)$ был разделяющим (контрпример см. в [9]). Нужно наложить дополнительные условия на $X$. В [9, 10] для $m=n$ доказано, что условия (5) необходимы и достаточны, если $X$ — многообразие Штейна. В [5] это требование заменено более слабым: $X\setminus T_j$, $j=1, \ldots, n$,— многообразия Штейна и $H_{2n-1}(X)\simeq 0$ *). По-видимому при таких предположениях на $X$ условия (5) будут необходимы и достаточны также в случае $m>n$. Докажем это при некоторых дополнительных предположениях.

**Теорема 1.** *Условия* (5) *необходимы и достаточны для того, чтобы* $[\gamma]\in H_n^*(X\setminus T)$, *в каждом из следующих случаев:*
а) $X=U_a$ — *достаточно малая (штейнова) окрестность точки* $a\in \mathbf{C}^n$ *и* $T_{\alpha_1}\cap \ldots \cap T_{\alpha_n}=a$ *для любого набора* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\subset\{1, \ldots, m\}$,
б) $X$ — *многообразие Штейна и* $T_\alpha=T_{\alpha_1}\cap \ldots \cap T_{\alpha_n}$ *дискретно для любого набора* $\alpha=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\subset\{1, \ldots, m\}$, $T_\alpha\cap T_\beta=\varnothing$ *для* $\alpha\neq\beta$.

Предположим, что выполнены условия а) теоремы 1. Пусть $f_j\in \mathcal{O}(U_a)$ — определяющая функция дивизора $T_j$, $j=1, \ldots, m$. Тогда имеет место

**Предложение 2.** *Для любого упорядоченного набора* $\alpha=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\subset\{1, \ldots, m\}$ *при достаточно малых* $\varepsilon>0$, $\delta/\varepsilon>0$ *циклы*

$$\gamma_{a,\alpha}=\{z\in U_a\colon |f_{\alpha_1}|=\ldots=|f_{\alpha_{n-1}}|=\delta,\quad |f_m|=\varepsilon\} \tag{6}$$

*и*

$$\Gamma_{a,\alpha'}=\{z\in U_a\colon |f_{\alpha_1}|=\ldots=|f_{\alpha_{n-1}}|=\delta,\quad |f_1\ldots[\alpha']\ldots f_m|=\varepsilon\}, \tag{7}$$

*где* $\alpha'=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, *принадлежат одному и тому же классу гомологий группы* $H_n^*(U_a\setminus T)\subset H_n(U_a\setminus T)$.

Заметим, что $\Gamma_{a,\alpha'}=\Gamma_{J,a}$ для разбиения $J=(J_1, \ldots, J_n)$, $J_1=\{\alpha_1\}, \ldots, J_{n-1}=\{\alpha_{n-1}\}$, $J_n=\{1, \ldots[\alpha']\ldots, m\}$ (см. (3)).

**Теорема 2.** *Циклы* $\gamma_{a,\alpha}$, $\alpha\in A$, *соответственно* $\Gamma_{a,\alpha'}$, $\alpha'\in A'$, *где* $A=\{\alpha=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\colon 1\leqslant\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-1}\leqslant m-1,\ \alpha_n=m\}$, $A'=\{\alpha'=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}\colon \alpha\in A\}$, *образуют базу разделяющей подгруппы* $H_n^*(U_a\setminus T)$, $\dim H_n^*(U_a\setminus T)=\binom{m-1}{n-1}$. *Коэффициенты разложения разделяющего цикла* $\gamma([\gamma]\in H_n^*(U_a\setminus T))$ *по базе* $(\gamma\sim\Sigma_{\alpha\in A}n_\alpha\gamma_{\alpha,\alpha})$ *вычисляются по формуле*

$$n_\alpha=\int_\gamma \omega_\alpha, \tag{8}$$

*где*

$$\omega_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n\mu_a(f_\alpha)}\frac{df_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge df_{\alpha_n}}{f_{d_1}\cdots f_{d_n}}, \tag{9}$$

$\mu_a(f_\alpha)$ — *кратность нуля* $a$ *отображения* $f_\alpha=(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$.

В [5] в случае $m=n=2$ коэффициенты разложения цикла $\gamma$ по базе выражаются через индексы пересечения.

---

*) В [5, 10] предполагается, что $T_1\cap\ldots\cap T_n$ дискретно. Как недавно заметил А. К. Цих, это ограничение можно снять, если $X$ — многообразие Штейна. Это доказывается применением к $X\setminus T_*$, где $T_*$ — объединение компонент множества $T_1\cap\ldots\cap T_n$ размерности больше нуля, указанного выше результата из [5].

**Теорема 3.** *Циклы вида* (7), *где* $\alpha' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}$, *в* $U_a \setminus T$ *связаны* $\binom{m-1}{n-2}$ *независимыми соотношениями*

$$\sum_{j \in \{1, \ldots [\alpha''] \ldots, m\}} \Gamma_{a,(\alpha'', j)} \sim 0, \tag{10}$$

$$\alpha'' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}\},\ 1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-2} \leqslant m-1.$$

*Любые другие соотношения между этими циклами являются следствием соотношений* (10).

**Следствие.** *Для любой формы* $\omega \in Z^n(U_a \setminus T)$ *справедливы равенства*

$$\sum_{j \in \{1, \ldots [\alpha''] \ldots, m\}} \operatorname{res}_{a\,(\alpha'', j)} \omega = 0, \tag{11}$$

*где* $\operatorname{res}_{a\,(\alpha'', j)} \omega$ — *вычет формы* $\omega$ *относительно дивизоров* $T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_{n-2}}$, $T_j$, $T_1 \cup \ldots [\alpha'', j] \ldots \cup T_m$ *в точке* $a$.

Замечание 1. Соотношения, аналогичные равенству (11), можно указать для локальных вычетов вида (2) в точке $a$ и в случае произвольных разбиений $J$.

Замечание 2. Формулу (11) можно рассматривать как локальный вариант теоремы о полной сумме вычетов. Для $m = n$ локальный вычет в точке $a$ один и никаких соотношений нет, хотя формально выражение (10) в этом случае дает $\binom{n-1}{n-2} = n-1$ соотношений: $\Gamma_{a,\,(1, \ldots [j] \ldots, n-1, j)} + \Gamma_{a,\,(1, \ldots [j] \ldots, n)} \sim 0$, где $\Gamma_{a,\,(1, \ldots [j] \ldots, n-1, j)}$ и $\Gamma_{a,\,(1, \ldots [j] \ldots, n)}$ — один и тот же цикл, взятый с противоположным знаком. Для $n = 2$ соотношение (10) приводит к одному соотношению $\left(\binom{m-1}{0} = 1\right)$: $\sum_{j=1}^{m} \Gamma_{a,j} \sim 0$, которое впервые было указано в [7].

Замечание 3. Из формулы (10) следует представление цикла $\Gamma_{a,(\alpha'', m)}$ через базисные циклы $\Gamma_{a,\alpha'}$, $\alpha' \in A'$.

**Теорема 4.** *Пусть* $X$ — *многообразие Штейна, дивизоры* $T_1, \ldots, T_m$ *задаются уравнениями в целом:* $T_j = \{z \in X\colon f_j(z) = 0\}$, $f_j \in \mathcal{O}(X)$, *и для любого набора индексов* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ *множество* $T_\alpha = T_{\alpha_1} \cap \ldots \cap T_{\alpha_n}$ *дискретно. Тогда*

$$H_n^*(X \setminus T) = \bigoplus_{a \in M} H_n^*(U_a \setminus T), \tag{12}$$

*где* $M = \bigcup_\alpha T_\alpha$.

Замечание 4. Если выполняются условия теоремы 4, то равенство (12) и теорема 2 позволяют вычислить размерность разделяющей подгруппы и описать ее базу. Условие $T_j = \{z \in X\colon f_j(z) = 0\}$, где $f_j \in \mathcal{O}(X)$, всегда выполняется для аналитического множества $T_j$, если в $X$ разрешима вторая проблема Кузена.

**Доказательства.** Предложение 1 достаточно доказать для циклов вида (3), порождающих разделяющую подгруппу $H_n^*(X \setminus T)$. Для произвольного набора $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}$ и цикла $\Gamma_{J,a}$ вида (3) найдется индекс $k \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\} \cap J_k = \varnothing$. Тогда $\Gamma_{J,a} = \pm \partial B$, где цепь $B = \{z \in U_a\colon |\varphi_k| \leqslant \varepsilon,\ |\varphi_1| = \ldots [k] \ldots = |\varphi_n| = \varepsilon\}$ лежит в $X \setminus (S_1 \cup \ldots [k] \ldots \cup S_n) \subset X \setminus (T_{j_1} \cup \ldots \cup T_{j_{n-1}})$. Таким образом, $\Gamma_{J,a} \sim 0$ в $X \setminus (T_{j_1} \cup \ldots \cup T_{j_{n-1}})$, т. е. $\Gamma_{J,a}$ удовлетворяет условиям (5).

**Лемма.** *Пусть выполняются условия* а) *теоремы* 1. *Тогда для любого набора индексов* $\alpha' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}$ *и произвольных функций* $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(U_a)$, $g_1(a) = g_2(a) = 0$, *тождественно не равных нулю на ростке комплексной аналитической кривой* $L_{\alpha'} = \{z \in U_a\colon f_{\alpha_1}(z) =$

$= \ldots = f_{\alpha_{n-1}}(z) = 0\} = T_{\alpha_1} \cap \ldots \cap T_{\alpha_{n-1}}$, *циклы* $\gamma_j(\varepsilon, \delta) = \{z \in U_a$: $|f_{\alpha_1}(z)| = \ldots = |f_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta$, $|g_j(z)| = \varepsilon\}$, $j = 1, 2$, *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ *принадлежат одному классу гомологий из* $H_n(U_a \backslash T)$.

Доказательство. Функции $g_j | L_{\alpha'}$, $j=1, 2$, и $f_q | L_{\alpha'}$, $q \in \{1, \ldots [\alpha'] \ldots, m\}$, имеют в точке $a$ изолированный нуль. Поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ кривая $\theta_j(\varepsilon) = \{z \in L_{\alpha'}$: $|g_j(z)| = \varepsilon\}$ компактна и функции $f_q$ для $q \in \{1, \ldots [\alpha'] \ldots, m\}$ не равны нулю на кривой $\theta_j(\varepsilon)$ (также на кривых $\theta_j(\varepsilon')$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$), а следовательно, и в ее окрестности. Таким образом, при достаточно малом $\delta > 0$ цикл $\gamma_j(\varepsilon, \delta) \in Z_n(U_a \backslash T)$, причем для любого $\delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta$, циклы $\gamma_j(\varepsilon, \delta)$ и $\gamma_j(\varepsilon, \delta_1)$ гомотопны в $U_a \backslash T$. Выберем $\varepsilon_1$ удовлетворяющим неравенству $0 < \varepsilon_1 < \min\limits_{z \in \theta_1(\varepsilon)} |g_2(z)|$. Тогда функции $f_q$, $q \in \{1, \ldots [\alpha'] \ldots, m\}$, не равны нулю на $B = \{z \in L_{\alpha'}$: $|g_1(z)| \leqslant \varepsilon$, $|g_2(z)| \geqslant \varepsilon_1\}$, а следовательно, и в некоторой окрестности компакта $B$. Таким образом, при достаточно малом $\delta > 0$ цепь $D = \{z \in U_a$: $|f_{\alpha_1}| = \ldots = |f_{\alpha_{n-1}}| = \delta$, $|g_1| \leqslant \varepsilon$, $|g_2| \geqslant \varepsilon_1\}$ лежит в $U_a \backslash T$ и $\gamma_1(\varepsilon, \delta) - \gamma_2(\varepsilon_1, \delta) = \partial D$, т. е. $\gamma_1(\varepsilon, \delta) \sim \gamma_2(\varepsilon_1, \delta) \sim \gamma_2(\varepsilon, \delta)$ в $U_a \backslash T$.

Предложение 2 вытекает из леммы, если положить $g_1 = f_{\alpha_n}$, а $q_2 = f_1 \ldots [\alpha'] \ldots f_m$.

Докажем случай а) теоремы 1. Пусть цикл $\gamma$ лежит в $U_a \backslash T$ и для него выполняются условия (5). Тогда для любого $\alpha \in A$ цикл $\gamma$ принадлежит $Z_n\left(U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \alpha} T_j\right)$ и удовлетворяет условию (5) относительно дивизоров $T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_n}$. По теореме 1 из [5] $[\gamma] \in H_n^*\left(U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \alpha} T_j\right)$. Так как $H_n^*\left(U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \alpha} T_j\right)$ порождается циклом $\gamma_{a,\alpha}$ вида (6), то

$$\gamma \sim n_\alpha \gamma_{a,\alpha} \tag{13}$$

в $U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \alpha} T_j$, где $n_\alpha$ — целое число. Возьмем произвольную замкнутую форму $\omega \in Z^n(U_a \backslash T)$. Так как $U_a$ — область голоморфности, то по теореме Сёрра (см. [2, § 15]) $\omega \sim \psi(z) dz$, где $\psi \in \mathcal{O}(U_a \backslash T)$, $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$. По теореме 3 из [13] функцию $\psi$ можно представить в виде $\psi = \sum\limits_{\alpha \in A} \psi_\alpha$, где $\psi_\alpha \in \mathcal{O}\left(U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \alpha} T_j\right)$. Если $\alpha, \beta \in A$ и $\alpha \neq \beta$, то $\gamma_{a,\alpha} \sim 0$ в $U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \beta} T_j$. Действительно, в этом случае найдется индекс $q \in \{1, \ldots, n-1\}$ такой, что $\alpha_q \notin \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$. Тогда $\gamma_{a,\alpha} = (-1)^q \partial B$, где $B = \{z \in U_a$: $|f_{\alpha_q}| \leqslant \delta$, $|f_{\alpha_1}| = \ldots [\alpha_q] \ldots = |f_{\alpha_{n-1}}| = \delta$, $|f_m| = \varepsilon\}$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta/\varepsilon > 0$ цепь $B$ не пересекает $T_{\beta_j}$, $j = 1, \ldots, n$, т. е. $\gamma_{a,\alpha} \sim 0$ в $U_a \setminus \bigcup\limits_{j \in \beta} T_j$. По формуле Стокса $\int\limits_{\gamma_{a,\alpha}} \psi_\beta dz = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда для цикла $\gamma_1 = \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \gamma_{a,\alpha}$, где $n_\alpha$ — коэффициент из (13), $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \int\limits_{\gamma_{a,\alpha}} \psi dz = \sum\limits_{\alpha, \beta \in A} n_\alpha \int\limits_{\gamma_{a,\alpha}} \psi_\beta dz = \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \int\limits_{\gamma_{a,\alpha}} \psi_\alpha dz$. С другой стороны, в силу (13) $\int\limits_{\gamma} \omega = \sum\limits_{\alpha \in A} \int\limits_{\gamma} \psi_\alpha dz = \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \int\limits_{\gamma_{a,\alpha}} \psi_\alpha dz$. Значит, $\int\limits_{\gamma_1 - \gamma} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma} \omega = 0$ для произвольной формы $\omega \in Z^n(U_a \backslash T)$. По теореме де Рама $\gamma_1 - \gamma \sim 0$. Отсюда и из предложения 2 $[\gamma] = [\gamma_1] = \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha [\gamma_{a,\alpha}] \in H_n^*(U_a \backslash T)$, что и требовалось доказать.

При этом мы показали, что циклы $\{\gamma_{a,\alpha}\}_{\alpha\in A}$ порождают разделяющую подгруппу $H_n^*(U_a\setminus T)$. Покажем, что циклы $\gamma_{a,\alpha}$, $\alpha\in A$, гомологически независимы в $U_a\setminus T$. Это вытекает из того, что при $\alpha$, $\beta\in A$ для форм (9)

$$\int\limits_{\gamma_{a,\alpha}}\omega_\beta=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta.\end{cases}\tag{14}$$

Значит, циклы $\{\gamma_{a,\alpha}\}_{\alpha\in A}$ образуют базу разделяющей подгруппы $H_n^*(U_a\setminus T)$. Ее размерность равна числу элементов множества $A$, т. е. $\binom{m-1}{n-1}$. Формула (8) следует из (14). Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. Для этого достаточно найти коэффициенты $n_\beta$ разложения цикла $\Gamma_{a,(\alpha'',m)}$ по базе $\{\gamma_{a,\beta}\}_{\beta\in A}$, которые по теореме 2 выражаются интегралами

$$n_\beta=\int\limits_{\Gamma_{a,(\alpha'',m)}}\omega_\beta,\quad \beta\in A.\tag{15}$$

Пусть $\alpha''=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}\}\subset\beta=\{\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},m\}$, т. е. $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_{n-2}=\beta_{n-2}$, $\beta_{n-1}\in\{1,\ldots[\alpha'']\ldots,m-1\}$. Тогда по лемме $\Gamma_{a,(\alpha'',m)}\sim\gamma_{a,(\alpha'',m,\beta-1)}$ в $U_a\setminus T$. Но в $U_a\setminus\bigcup\limits_{j\in\beta}T_j$ будет $\gamma_{a,(\alpha'',m,\beta_{n-1})}\sim-\gamma_{a,\beta}$. По формуле (14) $n_\beta=-1$. Если $\alpha''\not\subset\beta$, то аналогично доказательству предложения 1 можно показать, что $\Gamma_{a,(\alpha'',m)}\sim 0$ в $U_a\setminus\bigcup\limits_{j\in\beta}T_j$. В этом случае по формуле Стокса интеграл (15) равен нулю. Таким образом, приходим к формулам (10). Других соотношений между циклами (7), $\alpha'\subset\{1,\ldots,m\}$, независимых от (10), нет, так как соотношения (10) выражают циклы (7) через базу.

Докажем случай б) теоремы 1. Пусть цикл $\gamma$ принадлежит $Z_n(X\setminus T)$ и удовлетворяет условиям (5). Тогда для любого $\alpha=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset\{1,\ldots,m\}$ он удовлетворяет условиям (5) относительно $X$ и $T_{\alpha_1},\ldots,T_{\alpha_n}$. По теореме 1 из [5] $[\gamma]\in H_n^*\left(X\setminus\bigcup\limits_{j\in\alpha}T_j\right)$, т. е. $\gamma\sim\sum\limits_{a\in T_\alpha}n_{\alpha,a}\gamma_{a,\alpha}$ в $X\setminus\bigcup\limits_{j\in\alpha}T_j$, $\gamma_{a,\alpha}$ — цикл вида (2), разделяющий дивизоры $T_{\alpha_1},\ldots,T_{\alpha_n}$ в точке $a$. При этом $[\gamma_{a,\alpha}]\in H_n^*(X\setminus T)$, поскольку в точке $a$ пересекаются лишь дивизоры $T_{\alpha_1},\ldots,T_{\alpha_n}$. Возьмем произвольную форму $\omega\in Z_n(X\setminus T)$. Так как $X\setminus T$ — многообразие Штейна, то по теореме Сёрра $\omega\sim\varphi$, где $\varphi$ — голоморфная форма в $X\setminus T$. По теореме 2 из [13] форму $\varphi$ можно представить в виде $\varphi=\sum\limits_\alpha\varphi_\alpha$, где $\varphi_\alpha$ — форма, голоморфная в $X\setminus\bigcup\limits_{j\in\alpha}T_j$, суммирование ведется по всем $\alpha=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset\{1,\ldots,m\}$. Тогда $\int\limits_\gamma\omega=\int\limits_\gamma\varphi=\sum\limits_\alpha\int\limits_\gamma\varphi_\alpha=\sum\limits_\alpha\sum\limits_{a\in T_\alpha}n_{a,\alpha}\int\limits_{\gamma_{a,\alpha}}\varphi_\alpha$. Для цикла $\gamma_1=\sum\limits_\alpha\sum\limits_{a\in T_\alpha}n_{\alpha,a}\gamma_{a,\alpha}$ также $\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\varphi=\sum\limits_\alpha\sum\limits_{a\in T_\alpha}\sum\limits_\beta n_{\alpha,a}\int\limits_{\gamma_{a,\alpha}}\varphi_\beta=\sum\limits_\alpha\sum\limits_{a\in T_\alpha}n_{\alpha,a}\int\limits_{\gamma_{a,\alpha}}\varphi_\alpha$, поскольку при $\beta\neq\alpha$ имеем $\gamma_{a,\alpha}\sim 0$ в $X\setminus\bigcup\limits_{j\in\beta}T_j$ и $\int\limits_{\gamma_{a,\alpha}}\varphi_\beta=0$. Итак, для любой формы $\omega\in Z^n(X\setminus T)$ верно равенство $\int\limits_\gamma\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega$. По теореме де Рама $\gamma\sim\gamma_1$ в $X\setminus T$. Следовательно, $[\gamma]=[\gamma_1]\in H_n^*(X\setminus T)$.

Докажем теорему 4. Так как разделяющая подгруппа порождается циклами вида (2), то разделяющий цикл $\gamma$ $([\gamma]\in H_n^*(X\setminus T))$ можно

представить так:

$$\gamma \sim \sum_{a \in M} \gamma_a, \tag{16}$$

где $[\gamma_a] \in H_n^*(U_a \setminus T)$. Остается показать, что циклы $\gamma_a$, $a \in M$, гомологически независимы, т. е. из условия $\gamma \sim 0$ в $X \setminus T$ вытекает $\gamma_a \sim 0$ в $U_a \setminus T$, $a \in M$, а следовательно, в $X \setminus T$. Пусть в точке $a$ пересекаются дивизоры $T_{j_1}, \ldots, T_{j_p}$, $\{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, m\}$. Цикл $\gamma_a$ однозначно выражается через базу группы $H_n^*(U_a \setminus T)$:

$$\gamma_a \sim \sum_{\alpha \in A_a} n_{a,\alpha} \gamma_{a,\alpha}, \tag{17}$$

где $A_a = \{\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}: \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{j_1, \ldots, j_{p-1}\}, \alpha_n = j_p\}$ (см. теорему 2). Пусть в соотношении (16) $\gamma_b \not\sim 0$ в $X \setminus T$ для некоторого $b \in M$. Тогда в разложении вида (17) для $\gamma_b$ найдется коэффициент $n_{b,\beta} \neq 0$, $\beta \in A_b$. Возьмем форму $\omega_{b,\beta} = \varphi df_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge df_{\beta_n}/(2\pi i)^n \mu_b(f_\beta) \times \times f_{\beta_1} \ldots f_{\beta n}$, где $\varphi \in \mathcal{O}(X)$, $\varphi(b) = 1$, $\varphi(a) = a$ для $a \in M$, $a \neq b$. Такая функция $\varphi$ существует, так как многообразие Штейна можно вложить в $\mathbf{C}^{2n+1}$. Так как по предположению $\gamma \sim 0$, то $\int_\gamma \omega_{b,\beta} = 0$. С другой стороны, $\int_\gamma \omega_{b,\beta} = \sum_{a \in M} \int_{\gamma_a} \omega_{b,\beta} = \sum_{a \in M} \sum_{\alpha \in A_a} n_{a,\alpha} \int_{\gamma_{a,\alpha}} \omega_{b,\beta} = n_{b,\beta} \neq 0$, так как для $a = b$ имеем $\int_{\gamma_{b,\alpha}} \omega_{b,\beta} = \varphi(b)\, \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$ (см. (14) и [2, § 4]), а для $a \neq b$ либо $\gamma_{a,\alpha} \sim 0$ в $U_a \setminus \bigcup_{j \in \beta} T_j$ и тогда $\int_{\gamma_{a,\alpha}} \omega_{b,\beta} = 0$, либо $\gamma_{a,\alpha} \sim \pm \gamma_{a,\beta}$ в $U_a \setminus \bigcup_{j \in \beta} T_j$ и тогда $\int_{\gamma_{a,\alpha}} \omega_{b,\beta} = \pm \varphi(a)\, \mu_a(f_\beta)/\mu_b(f_\beta) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1982.
2. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.— Новосибирск: Наука, 1979.
3. *Егорычев Г. П.* Интегральные представления и вычисление комбинаторных сумм.— Новосибирск: Наука, 1977.
4. *Сафонов К. В., Цих А. К.* Об особенностях параметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда // Изв. вузов. Математика.— 1984.—№ 4.— С. 51—58.
5. *Цих А. К.* Критерии представимости интеграла по циклу через вычеты Гротендика. Некоторые приложения // Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 277, № 5.— С. 1083—1087.
6. *Fantappie L. I.* Funzionali delle fanzioni de due variabili // Mat. Rend. Accad. Ital.— 1931.— V. 2.— P. 1—172.
7. *Martinelli E.* Cotributi alla teoria dei residui per le fuzioni di due variabili complesse // Ann. Mat. Pura ed Appl.— 1955.— V. 39, N 4.— P. 355—343.
8. *Sorani G.* Sull'indicatore logaritmico per le funzioni di piu variabili complesse // Rend. Mat. Pura ed Appl.— 1962.— V. 21.— P. 1—23.
9. *Южаков А. П.* Одно условие кограницы по Лере и его применение к логарифмическому вычету // Сиб. мат. журн.— 1970.— Т. 11, № 3.— С. 708—711.
10. *Цих А. К.* О циклах, разделяющих нули аналитических функций в $\mathbf{C}^n$ // Сиб. мат. журн.— 1975.— Т. 16.— С. 1118—1121.
11. *Griffiths P.* Variations on the theorem of Abel // Invent. Math.— 1976.— V. 35.— P. 321—390.
12. *Цих А. К., Южаков А. П.* Свойства полной суммы вычетов относительно полиномиального отображения в $\mathbf{C}^n$ и их приложения // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 4.— С. 207—213.
13. *Южаков А. П.* О разделении аналитических особенностей и разложении на простейшие дроби голоморфных функций и переменных // Многомерный комплексный анализ.— Красноярск: ИФ СО СССР, 1986.— С. 210—220.


*г. Красноярск*

*Статья поступила 5 июня 1986 г.*