

УДК 519.634

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ

© 2012 г. *А.Д. Савельев*

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской Академии наук
E-mail: savel-cc09@yandex.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№05-01-00584).

Рассматриваются дифференциальные схемы, основанные на симметричных компактных разностях 6-го и 8-го порядков и ориентированных в соответствии с направлением характеристик диффузных добавок. Анализируются их спектральные свойства и исследуется возможность улучшения диссипативных характеристик. Для описания вязких членов также используются разности высокого порядка. Рассматривается ряд задач сжимаемого газа, в том числе нестационарное обтекание симметричного аэродинамического профиля в дозвуковом ламинарном потоке.

Ключевые слова: численное моделирование, компактные схемы высокого порядка, уравнения Навье-Стокса, ламинарные и турбулентные течения вязкого газа, акустический шум аэродинамического профиля.

APPLICATIONS OF HIGH ORDER DIFFERENCES IN AERODYNAMICAL SIMULATIONS

A.D. Savel'ev

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences

The differential schemes based on symmetrical compact differences of 6th and 8th order of accuracy and characteristically directed diffusing operators are considered. Their spectral properties are analyzed and possibility of improvement of dissipative characteristics is investigated. For the description of viscous members of equations the differences of a high order also are used. Some problems of compressible gas, including a non-stationary flow of a symmetric aerodynamic profile in a subsonic laminar stream are considered.

Key words: numerical simulation, high-accuracy compact schemes, Navier-Stokes equations, laminar and turbulent viscous gas flows, acoustic noise of airfoil.

1. Введение

Методы численного моделирования задач аэродинамики в настоящее время находят широкое применение на практике. При этом повышается интерес к алгоритмам на основе компактных разностей высокого порядка [1-6]. Это легко объяснить. Рассмотрим

представление разностной аппроксимации первой производной параметра f в некоем пространственном направлении в виде ряда Тейлора

$$\Delta_1^{(k)} f = f' + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^n}{c_n}.$$

Здесь $\Delta_1^{(k)}$ – разностный оператор k -го порядка, f' – аппроксимируемая им первая производная, f^n – n -я производная, c_n – коэффициент. То, что находится под знаком суммы, обычно называют остаточными членами разложения. Видно, что чем выше значение k , тем ближе производная f' и ее разностный аналог. Сходимость разностной схемы на гладких решениях совпадает с порядком ее аппроксимации. Кроме того, все ее свойства: дисперсия, диссипация, способности к преодолению сеточных негладкостей и резких изменений параметров пока в поле течения также зависят от структуры остаточных членов разложения.

Повышение порядка аппроксимации разностных схем не является целью само по себе. Инженеру, использующего результаты численного моделирования, не важно, как получена цифра, которую он в дальнейшем закладывает в расчете конструкции проектируемого изделия. Зато нужна уверенность, что не упущены никакие существенные особенности течения: отрывы пограничного слоя, резонансные пульсации потока, вихреобразование, избыточный шум и т.п. эффекты. Это особенно актуально при отсутствии экспериментальных данных.

Раньше часто можно было слышать мнение, что схемы высокого порядка обладают тем преимуществом, что позволяют получать решение на сетках с меньшим количеством узлов, чем необходимо для обычно используемых методов. Это верно лишь отчасти, поскольку справедливо только для гладких решений. И, кроме того, надо учитывать влияние граничных условий, обладающих, как правило, меньшим порядком аппроксимации, чем базовая схема. Интересующие практику течения газа и жидкости, как правило, обладают сложной внутренней структурой, требующей разрешения разностной сеткой. Поэтому существенного снижения количества используемых в расчетах сеточных узлов ждать не следует. Главным преимуществом схем высокого порядка являются их высокие дисперсионные свойства, позволяющие исследовать задачи, где на общем фоне течения имеют место достаточно тонкие эффекты. Поэтому данные схемы предназначены, прежде всего, для моделирования задач вихреобразования, турбулентности, акустики.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Будем рассматривать задачу двумерного (плоского) течения турбулентного пока сжимаемого газа с постоянным отношением удельных теплоемкостей внутри расчетной области с регулярной разностной сеткой. Решение будем искать путем численного интегрирования осредненных по Рейнольдсу двумерных уравнений Навье-Стокса, дополненных уравнениями модели турбулентности, полученными на основе модели Ментера переноса сдвиговых напряжений [7]. Обезразмеренные по параметрам набегающего потока и характерному линейному размеру, они имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + \sigma_{ij}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho e u_j + u_i \sigma_{ij} - q_j) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho q u_i - q_i^q) &= \frac{\rho q}{2} \left(\frac{\Omega}{F_\mu} - \beta^* v^2 \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v u_i - q_i^v) &= 4(1-F_1) \frac{\sigma_{\omega 2} \rho q}{v} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\rho v}{2} \left(\gamma \frac{\Omega}{F_\mu} - \beta v^2 \right).\end{aligned}$$

Здесь t и x_j – время и декартовы координаты, ρ , u_j , $e = \gamma^{-1}h + 0,5u_i^2$ – плотность, компоненты вектора скорости и полная энергия, h – энтальпия, γ – отношение удельных теплоемкостей, переменные q и v получены из кинетической энергии турбулентности k и турбулентной завихренности ω : $q = k^{1/2}$ и $v = \omega^{1/2}$.

Составляющие тензора напряжений σ_{ij} , тепловой поток и потоки турбулентных величин представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \delta_{ij} \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) - 2(\mu + \mu_t) \text{Re}^{-1} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \delta_{ij}) \right), \\ q_j &= \text{Re}^{-1} \left(\mu \text{Pr}^{-1} + \mu_t \text{Pr}_t^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} h, & S_{ij} &= 0,5 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ q_i^q &= \text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial q}{\partial x_i}, & q_i^v &= \text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial v}{\partial x_i},\end{aligned}$$

где S_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации. Здесь p – давление, μ и μ_t – коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкостей, $\text{Pr} = 0.72$ и $\text{Pr}_t = 0.9$ – молекулярное и турбулентное числа Прандтля, Re – число Рейнольдса. Система дополняется уравнением состояния

$$p = \gamma^{-1} (\gamma - 1) \rho h,$$

зависимостью коэффициента молекулярной вязкости от энтальпии по формуле Сазерленда [8] и уравнением для расчета коэффициента турбулентной вязкости

$$\mu_t = \text{Re} \frac{\rho q^2}{F_\mu v^2}.$$

Необходимые константы и функции выглядят следующим образом:

$$F_\mu = \max\left(1; \Omega \frac{F_2}{a_1 v^2}\right), \quad F_2 = \tanh\left\{\left[\max\left(\frac{2q}{C_\mu v^2 d}; \frac{500\mu}{\text{Re} \rho v^2 d^2}\right)\right]^2\right\}, \quad \Omega = 2\Omega_{ij}\Omega_{ij},$$

$$\Omega_{ij} = 0.5\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad C_\mu = 0.09, \quad a_1 = 0.31.$$

Для турбулентной модели, подобно [7], используются две серии констант. Переход от констант внутреннего слоя к константам внешнего осуществляется с помощью функции перемешивания F_1 :

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2, \quad \phi = (\sigma_k, \sigma_\omega, \beta, \gamma),$$

где

$$F_1 = \tanh\left\{\left[\min\left[\max\left(\frac{q}{C_\mu v^2 d}; \frac{500\mu}{\text{Re} \rho v^2 d^2}\right); \frac{4\sigma_{\omega 2} q^2}{CD_{k\omega} d^2}\right]\right]^4\right\},$$

$$CD_{k\omega} = \max\left(\frac{8\sigma_{\omega 2} \rho q}{v} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}; 10^{-20}\right).$$

Наборы констант для внутреннего 1 и внешнего 2 решений имеют значения

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \gamma_1 = 0.533,$$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \gamma_2 = 0.44.$$

С целью иметь возможность проведения расчетов тел, обладающих криволинейной поверхностью, осуществляется переход к обобщенной криволинейной системе координат (см., например, [9]). Область течения в физической плоскости (x, y) отображается на единичный квадрат расчетной плоскости (ξ, η) с помощью отображения общего вида $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. При этом в уравнениях появляются якобиан преобразования $J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ и метрические коэффициенты x_ξ , y_ξ , x_η и y_η , а выполнение соотношений

$$\frac{\partial x_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial x_\eta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial y_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial y_\xi}{\partial \eta} = 0$$

приводит к сохранению на криволинейной сетке невозмущенного потока.

При решении системы уравнений используются следующие граничные условия. На твердой поверхности задаются условия прилипания для скорости, температура (или условие равенства нулю нормальной составляющей потока тепла), нулевые значения вихревой вязкости и кинетической энергии турбулентности, а плотность определяется путем решения уравнения неразрывности. Величина параметра ν задается соотношением

$$v_w = \left(10 \cdot \frac{6\mu_w}{\text{Re}\beta_1\rho_w d_w^2} \right)^{1/2},$$

где индекс w относится к параметрам на стенке, а d_w – расстояние от стенки до ближайшего узла разностной сетки. На входных границах в случае сверхзвукового течения фиксируются исходные значения параметров расчета, в противном случае задаются полное давление и температура, угол наклона вектора скорости и используется условие на основе характеристического уравнения. На выходных границах значения переменных определяются путем экстраполяции по внутренним узлам расчетной области. В случае дозвукового течения задаются давление на выходе, а остальные параметры находятся методом экстраполяции.

3. Разностные операторы

Основное влияние на качество решения исходной системы уравнений оказывает способ аппроксимации пространственных производных. В нашем случае необходимо аппроксимировать первые производные конвективных членов, повторные и смешанные производные вязких членов, а также производные параметров течения в источниковых членах. Успех решения определяется, прежде всего, удачной аппроксимацией конвективных членов уравнений. Рассмотрим пример построения разностного аналога производной $\partial f / \partial x$ на сетке $\omega_n = \{x_j = jh, h = \text{const}\}$. Будем использовать оператор сдвига

$$T_m u_j = f_{j+m} = f(x_j + mh) \text{ и известные обозначения}$$

$$E = T_0, \quad \Delta_+ = T_1 - E, \quad \Delta_- = E - T_{-1}, \quad \Delta_1 = T_1 - T_{-1}, \quad \Delta_2 = T_1 - 2E + T_{-1}.$$

Тогда разностный аналог производной $\partial f / \partial x$ на основе подхода [10] может быть представлен в следующем виде:

$$f'_j = \left(\Delta_1^{(2k)} + (-1)^m s \frac{\Delta_{2m}}{c_{2m}} \right) \frac{f_j}{2h}, \quad (3.1)$$

где $k, m = 1, 2, 3, \dots$ – коэффициенты при порядке центральной и повторной разностей, $s = \pm 1$ – параметр, учитывающий направление потока, c_{2m} – константа. Первая компонента формулы и есть разностная аппроксимация производной, и отвечает за ее дисперсионные свойства [2]. Она бездиссипативна. Вторая составляющая представляет собой добавку диффузного типа, задающую ориентацию разности и служащую для подавления паразитных составляющих решения. Это не что иное, как так называемая "схемная вязкость", но заданная в данном случае искусственно. Знак параметра s задается в соответствии с направлением потока, а величина c_{2m} определяет интенсивность диссипативного механизма. В подобном виде можно представить большинство известных разностных схем [11]. Данное представление позволяет управлять дисперсионными и диссипативными характеристиками независимо друг от друга, что выгодно отличает составные схемы, например, от ориентированных компактных схем [12].

В качестве первой компоненты будем использовать известные симметричные компактные разности шестого или восьмого порядков

$$\Delta_1^{(6)} = \left(1 + \frac{\Delta_2}{5}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\Delta_2}{30}\right) \Delta_1, \quad \Delta_1^{(8)} = \left(1 + \frac{2\Delta_2}{7} + \frac{\Delta_2^2}{70}\right)^{-1} \left(1 + \frac{5\Delta_2}{42}\right) \Delta_1, \quad (3.2)$$

использующие пятиточечный шаблон. Вторая компонента определяется на основе оператора второй разности Δ_2 путем последовательного получения более высоких четных разностей

$$\Delta_2^m = \Delta_2 \Delta_2^{m-1}, \quad (3.3)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$. При этом неявно увеличивается шаблон схемы. Поэтому около границ приходится применять или менее высокие четные разности, или использовать фиктивные сеточные узлы. В отдельных случаях, например, для задач с периодическими границами, подходит формула

$$\Delta_{2m} = r \left[1 - \left(1 + \frac{\Delta_2}{r}\right)^{-1} \right] \Delta_{2(m-1)}, \quad (3.4)$$

свойства которой полностью совпадают при $r \rightarrow \infty$ со свойствами некомпактной формулы (3.2). Однако ее многократное применение с соответствующим граничным условием дает тот же результат, что и последовательное использование в граничных узлах односторонних четных разностей. В этом проявляется свойство операторов (3.3): получение следующей четной разности невозможно без укрупнения сеточного шаблона. В расчетах операторы (3.2) применяются к конвективным членам уравнений, а формула (3.3) преобразуется к виду

$$\Delta_2^m = \Delta_2^{m-1} \Delta_- T_{1/2} I^{(k)} M_p \Delta_+, \quad (3.5)$$

после чего используется уже для примитивных переменных. Здесь $I^{(k)}$ – оператор компактной интерполяции, а матрицы M_p получены при расщеплении векторов конвективных членов в соответствии с p – количеством собственных векторов. Процедура расщепления описана в [13]. Следует помнить, что диссипативная составляющая (3.1) служит лишь для стабилизации численного решения.

Смешанные производные вязких членов уравнений, производные параметров потока в источниковых членах и метрические коэффициенты преобразований координат вычисляются с использованием разностей (3.2). В результате применения одинаковых симметричных операторов для конвективных членов уравнений и метрических коэффициентов невозмущенный поток на криволинейной сетке сохраняется.

Обычно вязкие члены уравнений представляются своими разностными аналогами вида $\Delta_- T_{1/2} \mu \Delta_+$ второго порядка. В данном случае они имеют вид $\delta^{(k)} T_{1/2} I^{(k)} \mu \delta^{(k)}$, где

$\delta^{(k)}$ – компактная разность, а $I^{(k)}$ – оператор компактной интерполяции. Они выглядят следующим образом:

$$\delta^{(6)} = \left(1 + \frac{9\Delta_2}{80}\right)^{-1} \frac{189(T_{1/2} - T_{-1/2}) + 17(T_{3/2} - T_{-3/2})}{240h},$$

$$\delta^{(8)} = \left(1 + \frac{81\Delta_2}{476} + \frac{183\Delta_2^2}{76160}\right)^{-1} \frac{1755(T_{1/2} - T_{-1/2}) + 367(T_{3/2} - T_{-3/2})}{2856h}, \quad (3.6)$$

$$I^{(6)} = \left(1 + \frac{3\Delta_2}{16}\right)^{-1} \frac{15(T_{1/2} + T_{-1/2}) + T_{3/2} + T_{-3/2}}{32},$$

$$I^{(8)} = \left(1 + \frac{\Delta_2}{4} + \frac{\Delta_2^2}{128}\right)^{-1} \frac{7(T_{1/2} + T_{-1/2}) + T_{3/2} + T_{-3/2}}{16}. \quad (3.7)$$

Компактные операторы шестого порядка реализуются трехточечными прогонками на пятиточечном шаблоне, а восьмого – пятиточечными прогонками. Стационарные решения ищутся неявным методом Гаусса-Зейделя с релаксацией по линиям. Для моделирования нестационарных течений используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка по временной переменной.

4. Спектральные свойства операторов

Будем рассматривать линейное скалярное уравнение переноса $\partial f / \partial t + \partial f / \partial x = 0$. Полагая решение в узле x_j на сетке ω_h имеющим вид $U(t)\exp(ikhj)$, и не проводя разностную дискретизацию временной производной, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dt} + \omega(\alpha)U = 0,$$

где i – мнимая единица, k – волновое число, $\alpha = kh$. Каждая из схем (3.2)-(3.3) имеет свою комплексную функцию $\omega(\alpha)$, которую можно получить используя Фурье-представление операторов T_m , Δ_0 и Δ_2 :

$$T_m = \exp(iam), \quad \Delta_0 = 2i \sin \alpha, \quad \Delta_2 = 2(\cos \alpha - 1).$$

Для схемной фазовой скорости справедливо выражение $D_\alpha = \text{Re}[\omega(\alpha)/(i\alpha)]$. Его называют дисперсией разностной аппроксимации [2]. Другой параметр носит название схемной диссипации $D_s = \text{Re}[\omega(\alpha)]$ и отвечает за затухание гармоник.

На рис.1 представлены зависимости схемной фазовой скорости от параметра α для разностей $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_1^{(6)}$ и $\Delta_1^{(8)}$. Видно, что в отличие от разности второго порядка, для раз-

ностей шестого и восьмого порядков значительные отличия значений D_α от 1 наблюдаются лишь в области коротких волн. К тому же, наблюдается устойчивая тенденция к улучшению дисперсионных свойств разностных схем при увеличении порядка их аппроксимации. Таким образом, высокий порядок схем следует рассматривать прежде всего как гарантию наличия у них необходимых качеств "нераспыления" решения на сетке с течением времени.

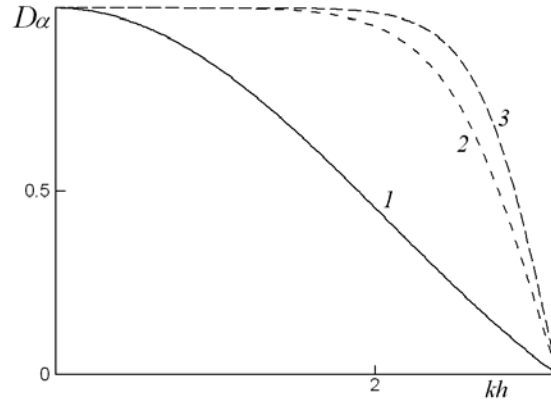


Рис.1. Распределение фазовой скорости: 1 – $\Delta_1^{(2)}$, 2 – $\Delta_1^{(6)}$, 3 – $\Delta_1^{(8)}$.

Диссипативными свойствами операторов (3.1) можно управлять как путем выбора разности Δ_{2m} , так и подбором коэффициентов c_{2m} . В данном случае величины c_{2m} для каждой разности выбирались таким образом, чтобы значение сеточного коэффициента оператора

$$\delta_{2m} = (-1)^m c_{2m}^{-1} \Delta_{2m} / 2$$

в точке по соседству с центральной равнялось бы -0.5 . На рис.2а приведено распределение диссипации D_s в зависимости от значения α для ряда четных разностей. Видно, что с увеличением m диссипативные свойства разностей в области длинных и средних длин волн снижаются, а в зоне коротких, наоборот, возрастают. Лучшими диссипативными свойствами обладает δ_2 ; только ее применение делает возможным проведение расчетов задач с сильными скачками.

Диссипативные свойства четных разностей непосредственно связаны с распределением их сеточных коэффициентов C_j . В качестве примера рассмотрим представленные на рис.2б графики распределения C_j разностей δ_2 и δ_{10} . В обоих случаях сумма положительных коэффициентов равна сумме отрицательных. При этом в случае δ_2 сеточный шаблон содержит три точки, а в случае δ_{10} – одиннадцать. Таким образом, снижение диссипативных характеристик четных разностей при повышении их порядка связано с укрупнением сеточного шаблона и относительно высокими значениями C_j в периферийных узлах. Наличие набора диссипативных фильтров делает возможным [14]:

а) выбор того из них, который обеспечивает подавление нефизических осцилляций течения конкретной задачи и при этом не обладает избыточной диссипацией,

б) локальное (для отдельных точек расчетного поля) применение оператора δ_2 или близкого к нему по свойствам в районе сильных скачков параметров потока,

в) использование в качестве фильтра комбинации нескольких операторов высокого порядка с целью получения достаточно высоких диссипативных свойств без существенного снижения общего порядка разностной схемы. Так, оператор

$$\delta_{10(18)} = 72.625\delta_{10} - 287.425\delta_{12} + 451.426\delta_{14} - 324.458\delta_{16} + 88.832\delta_{18},$$

являющийся линейной комбинацией четных разностей от δ_{10} до δ_{18} , обладает достаточно сильными диссипативными свойствами. Судя по приведенным на рис.2а графикам D_s , ее диссипативные характеристики выше, чем у δ_6 . Распределение ее сеточных коэффициентов C_j (см. рис.2б) близко к δ_4 , здесь не приведенной, хотя $\delta_{10(18)}$ и использует более крупный сеточный шаблон.

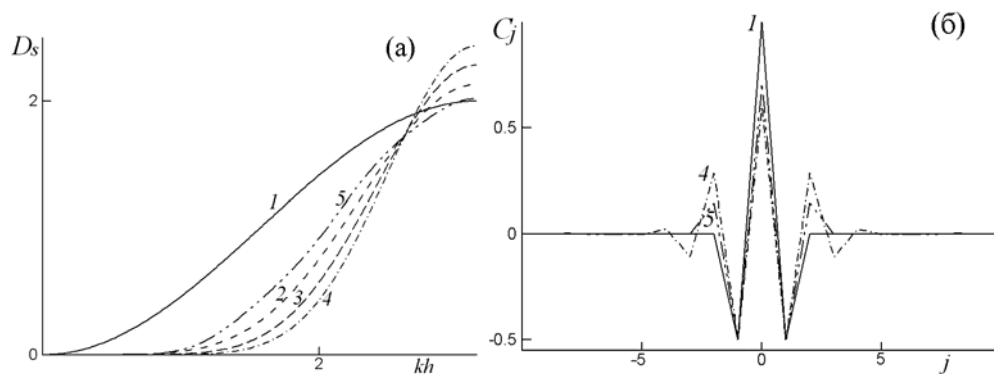


Рис.2. Диссипация (а) и сеточные коэффициенты (б) четных разностей:

$$1 - \delta_2, 2 - \delta_6, 3 - \delta_8, 4 - \delta_{10}, 5 - \delta_{10(18)}.$$

5. Результаты расчетов

5.1. Перенос вихря в потоке невязкого сжимаемого газа. Общий порядок схемы зависит как от ее центрально-разностного оператора, так и от диссипативной добавки. В расчетах использовалась разность $\Delta_1^{(8)}$, дополненная диссипативными операторами, базирующимися на четных разностях от второй до десятой. Радиальная составляющая скорости вихря равнялась нулю, а азимутальная, подобно [5], имела вид

$$W = \frac{2.5}{2\pi} \exp\left[\frac{1-(r/r_c)}{2}\right]^2,$$

где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ – расстояние от центра вихря, $r_c = \text{const}$. Плотность, компоненты вектора скорости и энтальпия задавались следующим образом:

$$\rho = 1 - 0.5\gamma^{-1}(\gamma - 1)W^2, \quad u = u_0 - \gamma r_c^{-1}W, \quad v = \gamma r_c^{-1}W, \quad h = \gamma(\gamma - 1)^{-1}\rho^{\gamma-1}.$$

Размеры декартовой сетки составляли $75 r_c$ в продольном направлении и $15 r_c$ в поперечном. Результаты в виде профилей давления в момент времени $T = 60$ представлены на рис.3. Они получены на сетках с последовательно увеличивающимся вдвое числом узлов: 81×17 , 161×33 и 321×65 . Как видно, использование δ_2 даже на самой подробной сетке приводит к полному уничтожению вихря за счет своей повышенной диссипации.

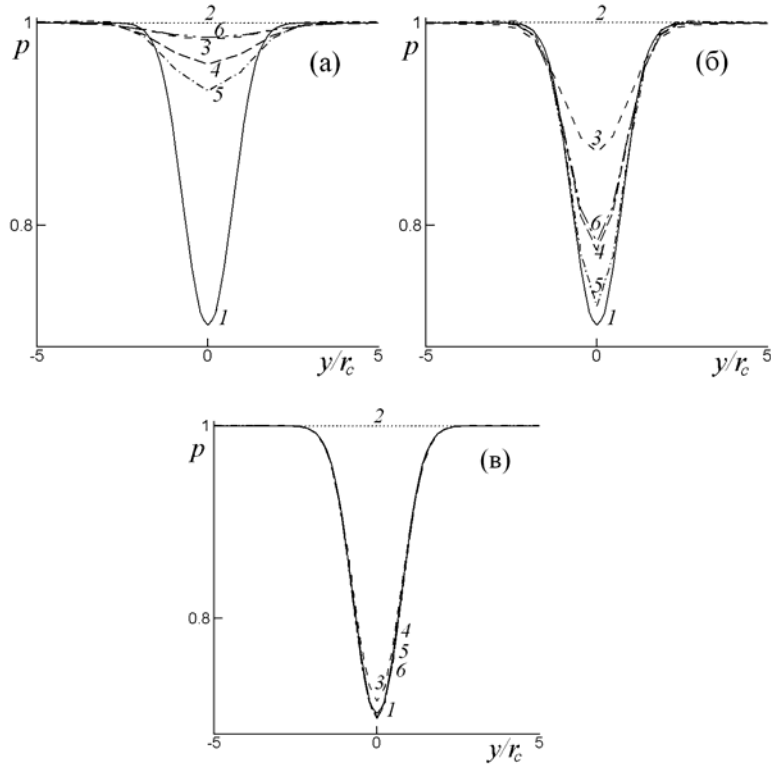


Рис.3. Профили давления: (а) – сетка 81×17 , (б) – 161×33 , (в) – 321×65 . Линии 1 – точное решение, 2 – δ_2 , 3 – δ_6 , 4 – δ_8 , 5 – δ_{10} , 6 – $\delta_{10(18)}$.

На грубой сетке лучшие результаты показывает разность δ_{10} , остальные располагаются согласно порядку диссипативной добавки, а данные, полученные с использованием $\delta_{10(18)}$, близки к данным δ_6 . Результаты для сетки с вдвое большим количеством узлов располагаются в том же порядке, хотя и ближе к точному решению; при этом данные для разности $\delta_{10(18)}$ смещаются к данным δ_8 . Наконец, при дальнейшем удвоении числа сеточных узлов, результаты, кроме тех, что получены с использованием δ_6 , очень близки к точному решению. В то же время динамика сходимости, показанная разностью δ_6 , не оставляет сомнений в том, что дальнейшее измельчение сетки позволит и ей вплотную приблизиться к точному решению.

5.2. Обтекание плоской пластины. При разностном представлении системы уравнений основное внимание обычно уделяют конвективным членам. Вязкие же члены

уравнений аппроксимируют, как правило, разностями второго порядка. В то же время, турбулентные сдвиговые слои обладают тонкой структурой с сильно меняющимися в них значениями параметров течения. Поэтому, использование формул высокого порядка для описания вязких членов может быть полезным, особенно при ограниченном количестве узлов разностной сетки в пограничном слое.

Рассматривалось формирование турбулентного пограничного слоя на плоской пластине при числе Маха набегающего потока 0.05 и числе Рейнольдса 7×10^6 . Использовались две сетки: "грубая" с 35 узлами в поперечном направлении и "более подробная" с 71 узлом. Расстояние от поверхности пластины до ближайшего узла в поле течения для "грубой" сетки составляло $7.5 \cdot 10^{-6}$ (за 1 принималось расстояние от передней кромки пластины до расчетного сечения). При этом на пограничный слой приходилось 13 узлов, а в ламинарный подслой попадали 2–3 узла. В случае "подробной" сетки ближайший узел располагался на расстоянии $2.5 \cdot 10^{-6}$, в пограничный слой попадало 33 узла, а в ламинарный подслой – 5. Из-за малого значения M_∞ , входная граница области расчета отстояла от пластины на расстояние, равное ее длине, а верхняя граница – на 1.5 длины. На внешних границах задавались характеристические граничные условия. В расчетах использовались как традиционные операторы описания вязких членов уравнений, так и операторы (3.6) и (3.7).

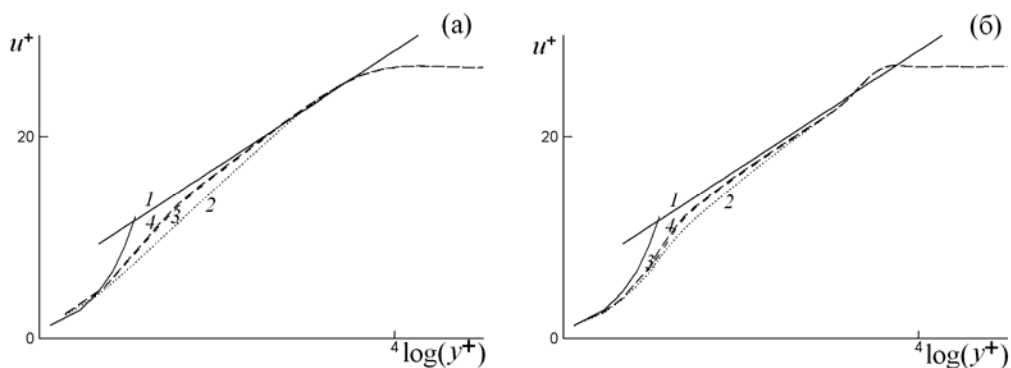


Рис.4. Профили скорости: (а) – "грубая"сетка, (б) – "подробная"сетка.
Линии 1 – традиционные операторы, 2 – $\delta^{(6)}$, $I^{(6)}$, 3 – $\delta^{(8)}$, $I^{(8)}$.

На рис.4 представлены профили горизонтальной компоненты вектора скорости в координатах $u^+ = u/u_\tau$ и $\log(y^+)$, где $y^+ = y u_\tau \rho_w (\text{Re} \mu_w)^{-1}$ – универсальное расстояние, а $u_\tau = \left[\mu_w (\text{Re} \rho_w)^{-1} \partial u / \partial y \right]^{1/2}$ – динамическая скорость (индекс w относится к параметрам на стенке). Там же приведена теоретическая зависимость из [8]. Результаты, полученные с использованием разностей 6-го и 8-го порядков, очень близки и располагаются ближе к теоретическим данным, чем полученные на основе разностей 2-го порядка. На "грубой" сетке они также выглядят предпочтительнее полученных традиционным способом.

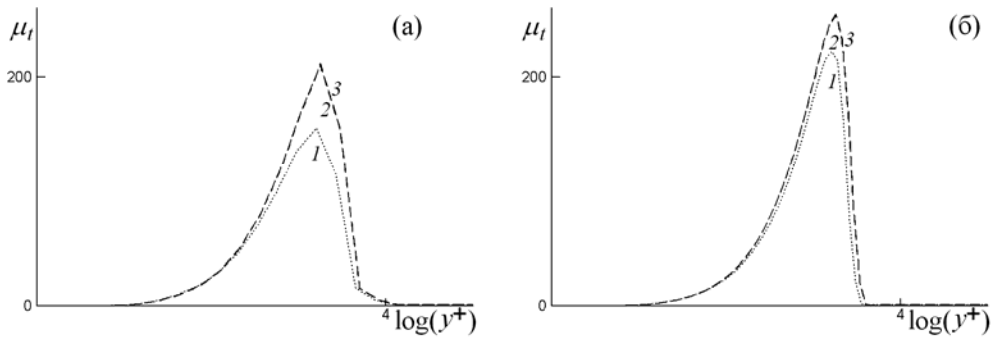


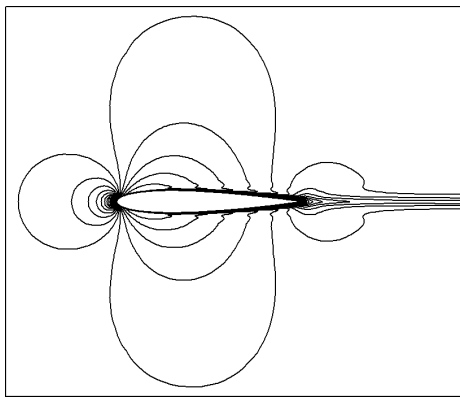
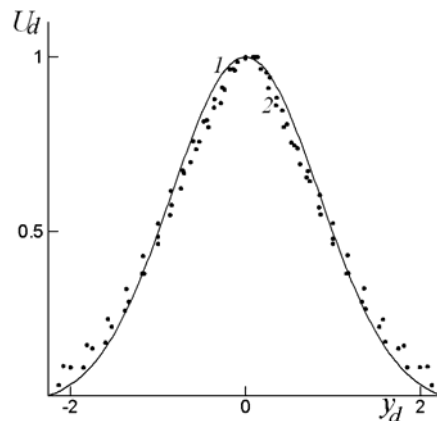
Рис.5. Профили коэффициента турбулентной вязкости в пограничном слое: (а) – "грубая" сетка, (б) – "подробная" сетка. Линии 1 – традиционные операторы, 2 – $\delta^{(6)}$, $I^{(6)}$, 3 – $\delta^{(8)}$, $I^{(8)}$.

Полученные профили коэффициента турбулентной вязкости представлены на рис.5. Результаты на основе разностей 6-го и 8-го порядков практически совпадают. Уровень μ_t в расчетах с разностью 2-го порядка ниже. При переходе к более подробной сетке разница в результатах, полученных с помощью традиционных разностей и операторов высокого порядка, снижается. В целом, можно констатировать, что при расчетах турбулентных течений недостаток узлов в области пограничного слоя может приводить к заметному искажению результатов.

5.3. Профиль NASA0012. Задача турбулентного обтекания симметричного профиля рассматривалась при числе Маха набегающего потока 0.03 и числе Рейнольдса, посчитанном по хорде профиля 9×10^6 . Угол атаки равнялся 0° . Расчетная сетка типа "O" содержала 121×81 узел. Уравнения решались методом Гаусса релаксации по линиям, при этом использовались разности $\Delta_1^{(8)}$ и демпфирующий оператор δ_{10} . Разностное представление вязких членов также проводилось на основе операторов $\delta^{(8)}$ и $I^{(8)}$ восьмого порядка. Целью было получение решения при низком числе Маха.

На рис.6 представлены полученные распределения линий $M = \text{const}$ в поле течения. Они нанесены в диапазоне от 0 до 0.034 с шагом 0.001. Перед профилем в районе передней кромки образуется зона торможения потока, над боковыми поверхностями – области ускорения. У задней кромки располагается еще одна зона торможения в месте слияния обтекающих профиль струй. На поверхности профиля формируется турбулентный пограничный слой, переходящий ниже по потоку в след. Течение вокруг профиля практически симметрично.

Полученные профили дефекта скорости в дальнем следе за профилем представлены на рис.7. Вдоль осей отложены параметры $U_d = (u_{\max} - u) / (u_{\max} - u_{\min})$ и $y_d = y / y_m$, где u_{\max} и u_{\min} – соответственно максимальное и минимальное значение продольной компоненты вектора скорости u , а y_m – значение координаты y , при которой $u = (u_{\max} + u_{\min}) / 2$. Результаты представлены для нескольких сечений, там же приведена теоретическая кривая [8]. Видно, что в следе полная симметрия течения отсутствует.

Рис.6. Линии $M=\text{const}$.Рис.7. Дефект скорости в следе за профилем:
1 – теория, 2 – расчет.

5.4. Акустический шум симметричного профиля. Шум, производимый летательными аппаратами во время полета, всегда представлял интерес для исследований. Одной из его причин является нестационарное взаимодействие пограничного слоя, формирующегося на поверхности аэродинамического профиля, с ближним следом за его задней кромкой [15]. Подобные режимы течения возникают и в случае симметричного профиля при нулевом значении угла атаки. Пример можно найти в [16]. При этом никакого изначального возмущения в поле течения не вносится и гармонические колебания в следе возбуждаются естественным образом за счет ошибок округления.

Рассматривалось дозвуковое ламинарное обтекание аэродинамического профиля NASA-0012. Условия расчета соответствовали выбранным в [16]: $M_\infty = 0.33$, $Re = 6 \times 10^4$. В расчетах использовалась сетка типа “O” с числом узлов 251×201 . Расстояние от поверхности до ближайшего узла составляло 5×10^{-4} длины хорды профиля c . Интегрирование уравнений по времени осуществлялось по методу Рунге-Кутты 4-го порядка. Полученные изолинии числа M представлены на рис.8 в диапазоне значений от 0 до 0.38 с шагом 0.01. При обтекании профиля в следе за ним формируется устойчивая упорядоченная вихревая структура подобная дорожке Кармана. Ближний след за задней кромкой совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости, порождая при этом звуковые волны.

Рассмотрим механизм данного колебательного процесса. На рис.9 представлены распределения вдоль координаты x коэффициентов давления $C_p = 2(p - p_\infty) / (\rho_\infty u_\infty^2)$ и трения $C_f = 2\mu \partial u_w / \partial n / (Re \rho_\infty u_\infty^2)$, где u_w – касательная составляющая вектора скорости, а n – нормаль к поверхности. Видно, что пограничный слой перед задней кромкой находится в состоянии отрыва из-за положительного градиента давления, вызванного слиянием обтекающих профиль потоков. Разница между давлением на верхней и нижней поверхности профиля приводит к деформации отрывных зон и перераспределению давления. Например, если давление снизу больше, чем сверху, то область отрыва смещается вверх. При этом сверху давление возрастает, а снизу уменьшается. Затем процесс повто-

ряется в обратном направлении. Таким образом, источником данного автоколебательно-го процесса является образование у задней кромки зоны отрыва пограничного слоя, что в свою очередь зависит от геометрии профиля, чисел Маха и Рейнольдса. Следует отметить, что ламинарный пограничный слой гораздо сильнее склонен к отрыву, чем турбулентный.

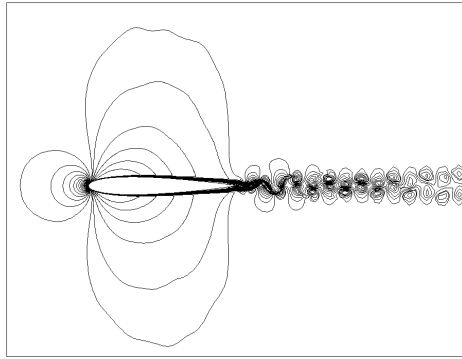


Рис.8. Линии $M=\text{const}$.

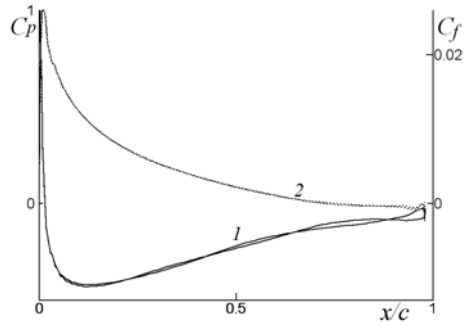


Рис.9. Распределение коэффициентов давления (а) и трения (б).

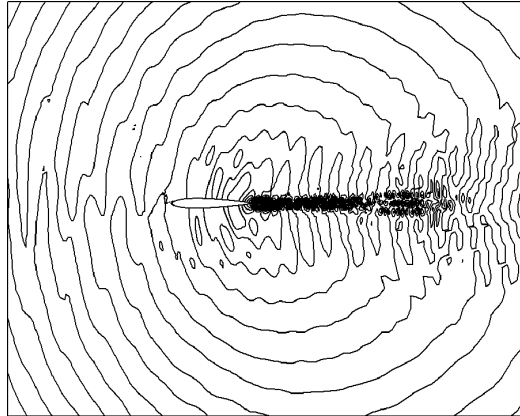


Рис.10. Изолинии акустического давления.

На рис.10 представлены изолинии мгновенных значений нестационарного относительного давления. Оно определялось как разница между мгновенным и средним по времени давлениями в каждой точке расчетного поля. Диапазон изолиний от -0.015 до 0.015 , шаг -0.001 . Наиболее сильно “шумит” след за профилем. Условно его можно разделить на три зоны. Первая протяженностью примерно в $1.5c$ соответствует положению вихревой дорожки. Далее следует участок с меньшей интенсивностью пульсаций, приходящийся на область распада вихрей. Еще дальше происходит затухание следа и выравнивание скорости. Следует отметить строгую антисимметричность верхнего и нижнего участков полученного поля нестационарного давления. Звуковые волны распространяются как вниз по течению, так и против потока.

Заключение

Рассмотренные разностные схемы имеют высокий порядок аппроксимации. Однако для прикладных задач важно то, что они обладают благоприятными дисперсионными свойствами и гибким диссипативным механизмом. Область их применения – моделирование турбулентности, вихреобразования, акустика. Проведенный расчет обтекания симметричного аэродинамического профиля дозвуковым потоком позволил получить поле акустического давления и определить источник шума – зону отрыва пограничного слоя у задней кромки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толстых А.И. Мультиоператорные схемы произвольного порядка, использующие нецентрированные компактные аппроксимации // Докл. РАН, 1999, т.366, №3, с.319-322.
2. Lele S.K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // J. Comput. Phys., 1992, v.102, p.16-42.
3. Visbal M.R., Gaitonde D.V. On the use of high-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes // J. Comput. Phys., 2002, v.181, p.155-185.
4. Bogey C., Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computations // J. Comput. Phys., 2004, v.194, p.194-214.
5. Yee H.C., Sandham N.D., Djomehri M.J. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters // J. Comput. Phys., 1999, v.150, p.199-238.
6. Tolstykh A.I. Development of arbitrary-order multioperators-based schemes for parallel calculations. 1: Higher-than-fifth-order approximations to convection terms. J. Comput. Physics., 2007, v.225, p.2333-2353.
7. Menter F.R. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper 93-2906, 1993, 21 p.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987, 840 с.
9. Стегер Ж.Л. Неявный конечно-разностный метод для расчета двумерного течения около тел произвольной формы // Ракетная техника и космонавтика, 1978, т.16, №7, с.51-60.
10. А.Д.Савельев. Составные компактные схемы высокого порядка для моделирования течений вязкого газа // Ж. вычисл.матем. и матем.физ., 2007, т.47, №8, с.1389-1403.
11. Pulliam T.H. Artificial dissipation models for the Euler equations // AIAA Journal., v.24, №12, p.1931-1940.
12. Липавский М.В., Толстых А.И. Мультиоператорные компактные схемы 5-го и 7-го порядков // Ж. вычисл. матем. и матем.физ., 2003, т.43, №7, с.1018-1034.
13. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting in the inviscid gas dynamic equations with applications to finite difference methods // J. Comput. Physics., 1981, v.40, p.263-293.
14. Савельев А.Д. О структуре внутренней диссипации составных компактных схем для решения задач вычислительной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем.физ., 2009, т.49, №12, с.2232-2246.
15. Amiet R.K. Noise due to turbulent flow past a trailing edge // J. of sound and vibration, 1976, v.47, №3, p.387-393.
16. Marsden O., Bogey C., Bailly C. High-order curvilinear simulations of flows around non-cartesian bodies // J. of comput. acoustics, 2005, v.13, №4, p.731-748.

Поступила в редакцию 01.06.2011.