Минь-Фуонг Тран, Тхань-Нян Нгуен, Замечание к интерполяционному неравенству между пространствами Соболева и Морри, *Функц. анализ и его прил.*, 2020, том 54, выпуск 3, 63–72

DOI: 10.4213/faa3628

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 3, с. 63–72

УДК 517.98

Замечание к интерполяционному неравенству между пространствами Соболева и Морри

© 2020. Минь-Фуонг Тран, Тхань-Нян Нгуен

Интерполяционные неравенства играют важную роль в изучении дифференциальных уравнений в частных производных и их приложениях. Здесь все еще имеются интересные открытые вопросы, связанные с интегральными оценками или регулярностью решений эллиптических и параболических уравнений. Основной результат нашей работы — наблюдение об ограниченности L^p-нормы в контексте интерполяционного неравенства между пространствами Соболева и Морри, которое может оказаться полезным в исследованиях. В этой связи мы также строим нетривиальный контрпример, который показывает в определенном смысле оптимальность интервала для допустимых показателей p. Наши доказательства опираются на интегральные представления и свойства максимальных функций Харди–Литтлвуда и Фефферманa–Стейна.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3628

§ 1. Введение

В теории дифференциальных уравнений в частных производных интерполяционные неравенства в пространствах Лебега, Соболева, Морри играют значительную роль. С ними связано еще довольно много открытых вопросов, которые возникают в связи с L^p-оценками или L^p-регулярностью решений дифференциальных уравнений. В последнее время упомянутым неравенствам и их обобщениям уделяется все больше внимания, см., например, работы [6], [11], [5], [8] и цитированную в них литературу.

В настоящей статье мы занимаемся интерполяционным неравенством между пространствами Соболева и Морри, полученным в работе [8]. Мы приводим независимое и весьма интересное доказательство данного неравенства, основанное на свойствах максимальных функций, и применяем его далее, чтобы получить оценку L^r-нормы. Основным результатом работы является контрпример, показывающий оптимальность допустимого интервала для показателей r в неравенстве. Мы считаем, что этот результат откроет новые возможности для изучения регулярности, существования и единственности решений дифференциальных уравнений в частных производных, а также пространств Соболева и Морри, играющих значительную роль в теории дифференциальных уравнений в частных производных и приложениях.

Мы рассматриваем евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ с $d \geqslant 2$, и пусть $1 \leqslant p < d$ и $1 < q < pd/(d-p)$. Мы представим короткое доказательство следующего свойства L^r-ограниченности множества функций $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ с равномерно ограниченными нормами в заданных классах Соболева и Морри:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^r \, d\mathbf{x} \leqslant C, \qquad r \in \left[p\left(\frac{q}{d}+1\right), \frac{pd}{d-p}\right]. \tag{1.1}$$

Оценка (1.1) играет важную роль в анализе и может быть применена к исследованию регулярности решений дифференциальных уравнений, в особенности нелинейных. В частности, имеет смысл изучать свойства решений при указанных значениях параметра r. Как будет показано ниже, неравенство (1.1) при других r может нарушаться.

Для того чтобы сформулировать наши результаты, нам понадобятся некоторые определения и обозначения, которые мы коротко здесь напомним. Большинство обозначений в статье стандартное; некоторые соглашения мы приведем далее. За более подробной информацией о пространствах и операторах, которые появятся ниже, читатель может обратиться, например, к многочисленным учебникам, а также к литературе, приведенной в монографиях [1]–[4].

1. *Открытый шар*: если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и r — положительное число, то $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\}$ — открытый шар в $\mathbb{R}^d$.

2. *Среднее значение*: для среднего значения функции f от переменной y по шару $B_r(\mathbf{x})$ используется обозначение $\fint_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$, т. е.

$$\fint_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \frac{1}{|B_\rho(\mathbf{x})|}\int_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$

где $|B|$ есть d-мерная мера Лебега произвольного множества $B \subset \mathbb{R}^d$.

3. Через $C_c^k(\mathbb{R}^m, I)$ (соответственно через $C_c^\infty(\mathbb{R}^m, I)$) будет обозначаться пространство k раз непрерывно дифференцируемых (соответственно бесконечно дифференцируемых) функций f на $\mathbb{R}^m$ со значениями в множестве $I \subset \mathbb{R}$ и компактным носителем (т. е.

$$\operatorname{supp}(f) = \operatorname{clos.}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) \neq 0\} \subset K$$

для некоторого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$).

4. *Максимальная функция Харди–Литтлвуда*: максимальная функция Харди–Литтлвуда вводится для произвольной локально интегрируемой функции f на $\mathbb{R}^d$ следующей формулой:

$$\mathbf{M}(f)(\mathbf{x}) = \sup_{\rho>0} \fint_{B_\rho(\mathbf{x})} |f|\,d\mathbf{y} \quad \text{для любого } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

5. *Максимальная функция Фефермана–Стейна*: максимальная функция Фефермана–Стейна для функции f задается формулой

$$\mathbf{M}_\#(f)(\mathbf{x}) = \sup_{\rho>0} \fint_{B_\rho(\mathbf{x})} \left| f(\mathbf{y}) - \fint_{B_\rho(\mathbf{x})} f(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} \right| d\mathbf{y} \quad \text{для любого } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

6. Мы будем писать $a \sim b$, если существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что $C_1 a \leqslant b \leqslant C_2 a$.

Статья имеет следующую структуру. В §2 содержатся формулировки основного результата работы, а также некоторых вспомогательных результатов. Подробные доказательства всех утверждений даются в §3.

§ 2. Формулировка основных результатов

В данном параграфе мы сформулируем все необходимые результаты; их обсуждением и проверкой мы займемся далее. Лемма 2.1 содержит первое интегральное неравенство. Оно не является новым (см. [8]), но для удобства читателя в §3 мы приводим доказательство.

Лемма 2.1. *Пусть* $1 < p < d$ *и* $1 < q < pd/(d-p)$. *Тогда имеет место следующее интегральное неравенство*:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \biggl(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \fint_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| \, d\mathbf{x} \biggr)^{qp/d}, \qquad u \in C_c^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

В следующей теореме устанавливается интерполяционное неравенство для пространств Лебега. Оно легко получается из предыдущей леммы, неравенства Соболева и неравенства Гёльдера (см. [4]).

Теорема 2.2. *Пусть* $1 < p < d$ *и* $1 < q < pd/(d-p)$. *Если* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \leqslant 1 \tag{2.2}$$

и

$$\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(q_1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^{q_1} d\mathbf{x} \leqslant 1 \tag{2.3}$$

при некотором q_1, $1 \leqslant q_1 \leqslant q$, *то*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^r d\mathbf{x} \leqslant C \quad \text{для любого } r \in \biggl[p\Bigl(\frac{q}{d}+1\Bigr), \frac{pd}{d-p} \biggr]. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 2.2, которое мы проведем в следующем параграфе, приводит к одному интересному вопросу: возможно ли расширить интервал допустимых значений показателя r так, чтобы интерполяционное неравенство (2.4) все еще имело место? Разработка этого вопроса дополнит картину интерполяционных неравенств для пространств Лебега, а также может помочь и в изучении неравенств Гальярдо–Ниренберга и их обобщений (мы отсылаем читателя к работам [7], [1], [2], [6], [5] и цитируемой в них литературе по данной тематике). Этот вопрос возник в связи с исследованиями по теории дифференциальных уравнений в частных производных, и наши результаты могут оказаться полезными при исследовании регулярности и получении сравнительных оценок или других свойств решений эллиптических и/или параболических уравнений. Именно эта связь и дала мотивацию для написания настоящей статьи.

В следствии 2.3 мы распространяем неравенство (2.4) на меньшие показатели r, но лишь в случае, когда $q_1 = q$. Простое доказательство приведено в §3.

Следствие 2.3. *В условиях теоремы* 2.2 *пусть* $q_1 = q$. *Тогда неравенство* (2.4) *останется справедливым для любых* $r \in [q, p(q/d+1)]$.

Однако данное интерполяционное неравенство не имеет места, если $q_1 < q$ и $r < p(q/d+1)$, и соответствующий контрпример будет построен в следующей теореме. Тем самым интервал для показателя r в теореме 2.2 оказывается оптимальным.

Теорема 2.4. *Пусть* $1 < p < d$ *и* $1 < q < pd/(d-p)$. *Тогда для любого* q_1, $1 \leqslant q_1 < q$, *найдется последовательность* $(u_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, *такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p \, d\mathbf{x} \leqslant 1, \qquad \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(q_1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u_n|^{q_1} d\mathbf{x} \leqslant 1, \tag{2.5}$$

а кроме того, при любом $r > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^r d\mathbf{x} \sim 2^{\frac{d^2(q-q_1)}{q(dp-(d-p)q)}(p(1+q/d)-r)n}, \qquad n \gg 1. \tag{2.6}$$

В частности, неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^r d\mathbf{x} \leqslant C, \qquad n \gg 1, \tag{2.7}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $r \geqslant p(q/d+1)$.

§ 3. Доказательство основных результатов

Данный параграф посвящен доказательству утверждений из предыдущего параграфа. Мы условимся обозначать различные (положительные) постоянные одной и той же буквой C.

Доказательство леммы 2.1. Согласно неравенству Пуанкаре, для любых $\rho > 0$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$

$$⨍_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| \, d\mathbf{x} \leqslant C\rho ⨍_{B_\rho(\mathbf{y})} |\nabla u| \, d\mathbf{x} \quad \text{для любой функции } u \in C_c^1(\mathbb{R}^d), \tag{3.1}$$

где через $(f)_\Omega$ обозначается среднее значение функции f на области Ω. Переходя к супремуму по всем $\rho > 0$ в обеих частях неравенства, получаем

$$\sup_{\rho>0} \rho^{-1} ⨍_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| \, d\mathbf{x} \leqslant C\mathbf{M}(|\nabla u|)(\mathbf{y}) \quad \text{для любых } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

Далее, оценим $\mathbf{M}_\#(u)$, максимальную функцию Феффермана–Стейна для u, следующим образом:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{M}_\#(u)(\mathbf{y})]^{p(q/d+1)} \\ &\quad = \sup_{\rho>0} \left(\rho^{d/q} ⨍_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| \, d\mathbf{x}\right)^{pq/d} \left(\rho^{-1} ⨍_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| \, d\mathbf{x}\right)^p \\ &\quad \leqslant C\left(\sup_{\rho>0,\, \mathbf{z}\in\mathbb{R}^d} \rho^{d/q} ⨍_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| \, d\mathbf{x}\right)^{qp/d} \left(\sup_{\rho>0} \rho^{-1} ⨍_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| \, d\mathbf{x}\right)^p. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Полученные оценки (3.2) и (3.3) приводят к следующему соотношению для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathbf{M}$ и максимальной функцией Феффермана–Стейна $\mathbf{M}_{\#}$:

$$[\mathbf{M}_{\#}(u)(\mathbf{y})]^{p(q/d+1)} \leqslant C\Big(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \fint_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|\, d\mathbf{x}\Big)^{qp/d} [\mathbf{M}(|\nabla u|)(\mathbf{y})]^p. \tag{3.4}$$

Хорошо известно [9], что для каждого фиксированного $s \in (1,\infty)$ и произвольных $f \in L^s(\mathbb{R}^d)$ существует такая постоянная $C > 0$, что

$$C^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{M}_{\#}(f)|^s d\mathbf{x} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x}, \tag{3.5}$$

$$C^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{M}(f)|^s d\mathbf{x} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x}. \tag{3.6}$$

Используя оценки (3.4), (3.5) и (3.6), мы видим, что

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} [\mathbf{M}_{\#}(u)(\mathbf{x})]^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} [\mathbf{M}(|\nabla u|)(\mathbf{x})]^p \Big(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \fint_{B_\rho(\mathbf{z})} |u(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\Big)^{qp/d} d\mathbf{x} \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \Big(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \fint_{B_\rho(\mathbf{z})} |u(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\Big)^{qp/d} d\mathbf{x} \\
&\leqslant C\Big(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \fint_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|\, d\mathbf{x}\Big)^{qp/d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

и это завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 2.2. Согласно неравенству Соболева, для любой функции $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{pd/(d-p)} d\mathbf{x}\Big)^{(d-p)/(dp)} \leqslant C\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p d\mathbf{x}\Big)^{1/p},$$

откуда, если учесть условие (2.2), следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{pd/(d-p)} d\mathbf{x} \leqslant C. \tag{3.7}$$

Далее, из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\begin{aligned}
\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \fint_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|\, d\mathbf{x} &\leqslant C \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|\, d\mathbf{x} \\
&\leqslant C \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(1-q)/q} \cdot \rho^{d(q_1-1)/q_1} \Big(\int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^{q_1} d\mathbf{x}\Big)^{1/q_1} \\
&\leqslant C\Big(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(q_1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^{q_1} d\mathbf{x}\Big)^{1/q_1} \leqslant C
\end{aligned}$$

для всех u, удовлетворяющих условию (2.3), и любого q_1 между 1 и q. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \leqslant C \tag{3.8}$$

по лемме 2.1.

Поскольку $r \in [p(q/d+1), pd/(d-p)]$, очевидно, найдется такое $\theta \in [0,1]$, что

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta d}{p(q+d)} + \frac{(1-\theta)(d-p)}{pd}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^r d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{r\theta} |u|^{r(1-\theta)} d\mathbf{x} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} [|u|^{r\theta}]^{p(q/d+1)/(r\theta)} d\mathbf{x} \right)^{r\theta d/(p(q+d))} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} [|u|^{r(1-\theta)}]^{pd/(r(1-\theta)(d-p))} d\mathbf{x} \right)^{r(1-\theta)(d-p)/(pd)} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \right)^{r\theta d/(p(q+d))} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{pd/(d-p)} d\mathbf{x} \right)^{r(1-\theta)(d-p)/(pd)}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Отметим, что (3.9) — тоже интерполяционное неравенство для пространств Лебега; оно изучалось в [9], [10].

Комбинируя оценки (3.7), (3.8) и (3.9), приходим к искомому результату. □

Докажем теперь следствие 2.3.

Доказательство следствия 2.3. Если положить $q_1 = q$ в теореме 2.2, то условие (2.3) примет вид

$$\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^q d\mathbf{x} \leqslant 1,$$

так что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q d\mathbf{x} \leqslant 1. \tag{3.10}$$

Тогда тот факт, что оценка (2.4) выполнена для всех $r \in [q, p(q/d+1)]$, непосредственно вытекает из оценок (3.8), (3.10) и многократно примененного интерполяционного неравенства для пространства Лебега вида (3.9). □

Доказательство теоремы 2.4. Пусть функции $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1}, [0,1])$ и $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ таковы, что

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in B_1(0), \\ 0, & \mathbf{x} \in B_2(0)^c, \end{cases} \qquad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-1,1), \\ 0, & t \in (-2,2)^c, \end{cases}$$

и, кроме того, $|\nabla\phi(\mathbf{x})| \leqslant 1$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$ и $|\eta'(t)| \leqslant 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Фиксируем также параметр $\theta \in (0, 10^{-10d})$ и выберем произвольное $n \geqslant 100/\theta$. Далее, для каждого $k \geqslant 10/\theta$ определим последовательность $\{a_{k,j}\}$ формулой

$$a_{k,j} = 2^{k-1} + 1 + j2^{k-1-\theta(k-1)}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2^{\theta(k-1)} - 3.$$

Нетрудно видеть, что при всех j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{\theta(k-1)} - 3$,

$$a_{k,j} \in (2^{k-1} + 2, 2^k - 2).$$

Введем теперь функции χ_n и σ_n:

$$\chi_n(t) = \sum_{k \geqslant 10\theta^{-1}}^{n} \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \eta(t - a_{k,j}) \quad \text{и} \quad \sigma_n(t) = \chi_n(t) + \chi_n(-t).$$

Отметим, что поскольку

$$\operatorname{supp}(\eta(\,\cdot\, - a_{k,j})) \cap \operatorname{supp}(\eta(\,\cdot\, - a_{k',j'})) = \varnothing \quad \text{для любых} \ (k,j) \neq (k',j'),$$

при любом $r > 0$

$$\sup_{\rho>0,\, t_0\in\mathbb{R}} \left(\rho^{-\theta} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \sigma_n(t)^r\, dt\right) \sim 1 \quad \text{для любого} \ n \geqslant 100/\theta \tag{3.11}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)^r\, dt \sim 2^{\theta n} \quad \text{для любого} \ n \geqslant 100/\theta, \tag{3.12}$$

а также

$$\int_{\mathbb{R}} |\sigma_n'(t)|^r\, dt \sim 2^{\theta n} \quad \text{для любого} \ n \geqslant 100/\theta. \tag{3.13}$$

В самом деле, соотношение (3.12) вытекает из оценок

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)^r\, dt &\sim \sum_{k \geqslant 10\theta^{-1}}^{n} \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \int_{\mathbb{R}} \eta(t - a_{k,j})^r\, dt \\ &\sim \sum_{k \geqslant 10\theta^{-1}}^{n} \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \int_{\mathbb{R}} \eta(t)^r\, dt \sim \sum_{k \geqslant 10\theta^{-1}}^{n} \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} 1 \sim 2^{\theta n}.\end{aligned}$$

Подобным же образом выводится и (3.13). Чтобы доказать (3.11), достаточно установить аналогичное соотношение, в котором супремум берется по достаточно большим ρ (так как функция σ_n ограничена). Заметим, что

$$\begin{aligned}&\sup_{\rho>2^{100},\, t_0\in\mathbb{R}} \left(\rho^{-\theta} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \sigma_n(t)^r\, dt\right) \\ &\qquad \sim \sup_{\rho>2^{100}, t_0\in\mathbb{R}} \sum_{k \geqslant 10\theta^{-1}}^{n} \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \left(\rho^{-\theta} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \eta(t - a_{k,j})^r\, dt\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Для каждого $\rho > 2^{100}$ выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\rho \sim 2^m$. Тогда получим:

$$\sup_{t_0\in\mathbb{R}} \sum_{k\geqslant 10\theta^{-1}}^{n} \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \eta(t-a_{k,j})^r dt \sim \#\{a_{k,j} \in [-\rho,\rho]\}$$
$$\sim \sum_{k=2}^{m} (2^{\theta(k-1)}-3) \sim 2^{\theta m} \sim \rho^\theta. \quad (3.15)$$

где символом # обозначается мощность множества. Комбинируя (3.14) с (3.15), приходим к (3.11).

Теперь при $n > 100/\theta$ зададим последовательность функций

$$u_n(t,\mathbf{x}) = 2^{-\alpha dn/q}\sigma_n(2^{-\alpha n}t)\phi(2^{-\alpha n}\mathbf{x}) \quad \text{для любой пары } (t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1},$$

где $\theta = d(q-q_1)/q \in (0, 10^{-10d})$ и $\alpha = d(q-q_1)/(dp-(d-p)q)$. Покажем, что u_n удовлетворяет условиям (2.5) и (2.6).

(i) Прежде всего,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p d\mathbf{x}\,dt &\sim 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n'(2^{-\alpha n}t)|^p 2^{-p\alpha n} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(2^{-\alpha n}\mathbf{x})^p d\mathbf{x} \\
&\quad + 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n(2^{-\alpha n}t)|^p dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla\phi(2^{-\alpha n}\mathbf{x})|^p 2^{-p\alpha n} d\mathbf{x} \\
&= 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n'(t)|^p 2^{\alpha n - p\alpha n} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(\mathbf{x})^p 2^{(d-1)\alpha n} d\mathbf{x} \\
&\quad + 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n(t)|^p 2^{\alpha n} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla\phi(\mathbf{x})|^p 2^{(d-1)\alpha n - p\alpha n} d\mathbf{x} \\
&= 2^{n(-p\alpha d/q + d\alpha - p\alpha)} \bigg(\int_{\mathbb{R}} |\sigma_n'(t)|^p dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(\mathbf{x})^p d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n(t)|^p dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla\phi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \bigg). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Параметры θ и α были подобраны так, чтобы $-p\alpha d/q + d\alpha - p\alpha + \theta = 0$, и тогда, согласно (3.12), (3.13) и (3.16), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p \sim 2^{-p\alpha dn/q + d\alpha n - p\alpha n + \theta n} = 1 \quad \text{для любого } n > 100/\theta. \quad (3.17)$$

Этим доказано первое неравенство в (2.5).

(ii) Далее,

$$\begin{aligned}
&\sup_{B_\rho(s,y)\subset\mathbb{R}^d}\left(\rho^{-\theta}\int_{B_\rho(s,y)}|u_n(t,\mathbf{x})|^{q_1}\,dt\,d\mathbf{x}\right)\sim\sup_{\rho>0}\left(\rho^{-\theta}\int_{B_\rho(0)}|u_n(t,\mathbf{x})|^{q_1}\,dt\,d\mathbf{x}\right)\\
&\quad\sim 2^{-q_1\alpha dn/q}\sup_{\rho>0}\left(\rho^{-\theta}\int_{-\rho}^{\rho}\sigma_n(2^{-\alpha n}t)^{q_1}\,dt\int_{|\mathbf{x}|<\rho}\phi(2^{-\alpha n}\mathbf{x})^{q_1}\,d\mathbf{x}\right)\\
&\quad\sim 2^{-q_1\alpha dn/q}\sup_{\rho>0}\left(\rho^{-\theta}\int_{-2^{-\alpha n}\rho}^{2^{-\alpha n}\rho}\sigma_n(t)^{q_1}2^{\alpha n}dt\int_{|\mathbf{x}|<2^{-\alpha n}\rho}\phi(\mathbf{x})^{q_1}2^{(d-1)\alpha n}d\mathbf{x}\right)\\
&\quad\sim 2^{-q_1\alpha dn/q}\sup_{\rho>2^{\alpha n}}\left(\rho^{-\theta}\int_{-2^{-\alpha n}\rho}^{2^{-\alpha n}\rho}\sigma_n(t)^{q_1}2^{\alpha n}dt\int_{|\mathbf{x}|<2^{-\alpha n}\rho}\phi(\mathbf{x})^{q_1}2^{(d-1)\alpha n}d\mathbf{x}\right)\\
&\overset{(3.12)}{\sim} 2^{-q_1\alpha dn/q}2^{\alpha dn}2^{-\alpha\theta n}=1.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{B_\rho(s,y)\subset\mathbb{R}^d}\rho^{-\theta}\int_{B_\rho(s,y)}|u_n|^{q_1}\,d\mathbf{x}\sim 1\quad\text{для любого }\ n>100/\theta,$$

и второе неравенство в (2.5) тоже проверено.

(iii) Наконец, при любом $r>0$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}|u_n(t,\mathbf{x})|^r\,dt\,d\mathbf{x}&=2^{-r\alpha dn/q}\int_{\mathbb{R}}\sigma_n(2^{-\alpha n}t)^r\,dt\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi(2^{-\alpha n}\mathbf{x})^r\,d\mathbf{x}\\
&=2^{-r\alpha dn/q+d\alpha n}\int_{\mathbb{R}}\sigma_n(t)^r\,dt\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi(\mathbf{x})^r\,d\mathbf{x}\\
&\overset{(3.12)}{\sim} 2^{-r\alpha dn/q+d\alpha n+\theta n}=2^{\frac{d^2(q-q_1)}{q(dp-(d-p)q)}(p(1+q/d)-r)n},
\end{aligned}$$

что совпадает с (2.6).

Соотношение (2.6) показывает, что оценка (2.7) выполнена тогда и только тогда, когда $r\geqslant p(q/d+1)$. □

Литература

[1] D. R. Adams, *Lecture Notes on L^p-Potential Theory*, Dept. of Math., University of Umea, Umea, 1981.

[2] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Functions Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1996.

[3] R. A. Adams, J. J. F. Fourier, *Sobolev spaces*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis*, *Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2011.

[5] N. A. Dao, J. I. Díaz, Q.-H. Nguyen, *Generalized Gagliardo-Nirenberg inequalities using Lorentz spaces*, *BMO*, *Hölder spaces and fractional Sobolev spaces*, Nonlinear Anal., **173** (2018), 146–153.

[6] D. S. McCormick, J. C. Robinson, J. L. Rodrigo, *Generalised Gagliardo–Nirenberg inequalities using weak Lebesgue spaces and BMO*, Milan J. Math., **81**:2 (2013), 265–289.

[7] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), 115–162.

[8] G. Patalucci, A. Pisante, *Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentrationcompactness for fractional Sobolev spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **50**:3–4 (2014), 799–829.

[9] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[10] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.

[11] J. Van Schaftingen, *Interpolation inequalities between Sobolev and Morrey–Campanato spaces: A common gateway to concentration-compactness and Gagliardo–Nirenberg interpolation inequalities*, Port. Math., **71**:3 (2014), 159–175.

Минь-Фуонг Тран
Applied Analysis Research Group, Faculty of Mathematics and Statistics, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Viet Nam
E-mail: tranminhphuong@tdtu.edu.vn

Тхань-Нян Нгуен
Department of Mathematics, Ho Chi Minh City University of Education, Ho Chi Minh City, Viet Nam
E-mail: nguyenthnhan@hcmup.edu.vn

Поступила в редакцию
30 октября 2018 г.
После доработки
29 мая 2019 г.
Принята к публикации
31 октября 2019 г.