В. И. Васюнин, Н. К. Никольский, Квазиортогональные разложения по дополнительным метрикам и оценки однолистных функций, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 4, 1–81

В.И.Васюнин, Н.К.Никольский

КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ МЕТРИКАМ И ОЦЕНКИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Доказывается некоммутативный вариант неравенства Коши - Буняковского - Шварца (КБШ). Он интерпретируется как разложение пространства в квазиортогональный интеграл гильбертовых пространств, а вычисление интегралов сводится к исследованию общих эволюционных уравнений. В качестве приложений рассматриваются ряды Фурье относительно общих биортогональных систем в гильбертовом пространстве и оценки коэффициентов однолистных функций, включающие неравенство Л. де Бранжа, известное ранее как гипотеза Бибербаха.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение: план работы и объяснение результатов

I10.[2] **Техника гильбертова пространства** основана на ортогональном

---

[1]Вторая часть работы будет опубликована в одном из ближайших выпусков журнала.

[2]Главы, включая Введение, занумерованы литерами латинского алфавита (так что I≠1, но I=Introduction) и разбиты на пункты; внутри глав теоремы, леммы, пункты, формулы и т.д. включены в единую систему нумерации. Не удивляйтесь, не обнаружив некоторых номеров: пункты, как правило, занумерованы числами, кратными десяти.

Ключевые слова: квазиортогональные разложения, комплементарное пространство, операторная мера, эволюционное семейство, эволюционное уравнение, уравнение Лёвнера, однолистные функции.

проектировании и связанных с ним конструкциях, таких как ортогональные ряды, ортогональные интегралы и пр. Известны многочисленные обобщения этих конструкций, среди которых можно, скажем, отметить аппарат условных базисов (с надлежащим спектральным анализом матриц Грама) и такую его неблизкую разновидность, как теория весовых оценок сингулярных интегралов.

В [21] Л. де Бранж и Дж. Ровняк предложил следующее обобщение понятия ортогонального дополнения. Пусть H - гильбертово пространство и $H_i(i=1,2)$ - линейные подмножества пространства H (необязательно замкнутые), снабженные в свою очередь структурой гильбертова пространства так, что естественные вложения $H_i \subset H$ являются сжимающими (т.е. $\|x\|_H \le \|x\|_{H_i}$ для всех $x \in H_i$; $i=1,2$; такие вложения будем обозначать символом $\varsubsetneq$). Пространство H_2 называется дополнительным (комплементарным) пространству H_1, если

$$H = H_1 + H_2, \tag{I11}$$

$$\|x_1+x_2\|_H^2 \le \|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2 , \quad x_i \in H_i, \quad \|\cdot\|_i \stackrel{def}{=} \|\cdot\|_{H_i}, \tag{I12}$$

и для любого $x \in H$ существуют $x_i \in H_i$ такие, что

$$x = x_1 + x_2, \tag{I13}$$

$$\|x_1+x_2\|_H^2 = \|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2. \tag{I14}$$

Из определения ясно, что понятие комплементарности симметрично: если H_2 дополнительно пространству H_1, то H_1 является дополнительным пространству H_2. Любое гильбертово пространство H_1, $H_1 \varsubsetneq H$, имеет единственное дополнительное пространство H_2, $H_2 \varsubsetneq H$, причем

$$\|x_2\|_2^2 = \sup \{\|x_2 + x_1\|^2 - \|x_1\|_1^2 : x_1 \in H_1\}, \tag{I15}$$

а само H_2 и состоит как раз из тех $x_2 \in H$, для которых конечен sup в правой части формулы (I15). Представление (I13), вообще говоря, неединственно (т.е. $H_1 \cap H_2 \ne$ $\ne \{\mathbb{O}\}$) и тем самым (I11) не является разложением H на прямые слагаемые, хотя экстремальное представление со свойством (I14) обязательно единственно. Если H_1 есть (замкнутое) подпространство пространства H и вложение $H_1 \varsubsetneq H$ изометрично: $\|x\|_{H_1} = \|x\|_H$, $x \in H_1$, то H_2 совпадает со стандартным ортогональным дополнением $H_2 =$ $= H \ominus H_1 = H_1^\perp$ $(\stackrel{def}{=} \{x \in H\colon (x,y)_H = 0, \ y \in H_1\})$. В этом (и только в этом) случае разложение (I11) оказывается прямым (т.е. $H_1 \cap H_2 = \{\mathbb{O}\}$).

Заметим, что комплементарное пространство (I15) существенно зависит от метрики $\|\cdot\|_1$ (унитарной структуры) на H_1, а не только от носителя пространства H_1 (т.е. H_1 как множества); например, замена нормы $\|\cdot\|_1$ на $2\|\cdot\|_1$ весьма существенно изменяет пространство H_2, в том числе и его носитель. Так что по существу приведенная конструкция есть операция над метриками: метрике $\|\cdot\|_1$ сопоставляется (комплементарная) метрика $\|\cdot\|_2$. Свойства (I12)-(I14) позволяют назвать разложение (I11) (а фактически - разложение метрики $\|\cdot\|_H$) квазиортогональным разложением по (взаимно) дополнительным метрикам.

120. О целях и происхождении этой работы. Целью 1-й части работы является построение аппарата квазиортогональных рядов и интегралов, основанного на понятии комплементарного пространства в том же смысле, в каком ортогональные ряды и интегралы строятся, исходя из операции ортогонального дополнения. Соответствующие интегральные представления элементов исходного пространства сопровождаются некоторыми неравенствами (типа неравенства Бесселя) с описанием случаев, когда они превращаются в равенства. Будет показано, что фактически речь идет о коизометрических (т.е. сопряженных с изометрическими) интегральных представлениях, опирающихся на некоммутативный аналог неравенства Коши - Буняковского - Шварца.

Целью 2-й части работы является использование упомянутых неравенств в теории однолистных функций, именно - для оценок коэффициентов Тейлора таких функций. В числе следствий общей теории получаются обобщения неравенств де Бранжа [23], [24], Ровняка [35] и некоторые другие неравенства (см. ниже) и, стало быть, неравенства, известные ранее (до работы [22]) как гипотезы Милина и Бибербаха. Более того, общая теория позволяет с единой точки зрения объяснить операторный смысл известных уравнений Лёвнера и уравнений де Бранжа.

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Поводом к этому исследованию послужила попытка (вылившаяся в весьма непростое занятие) проникнуть в смысл теории де Бранжа, в том виде, как она изложена в (неопубликованной) книге [26] (мы пользовались в основном версией 1985 г.). Начальный этап этого проникновения отражен в статье [33], посвященной сравнению функциональных моделей де Бранжа - Ровняка и Сёкефальви-Надя - Фойаша. Книга [26] заканчивалась, однако, доказательством гипотезы Бибербаха (если функция $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ однолистна (взаимно-однозначна) в круге $\mathbb{D}=\{z: |z|<1\}$, то $|a_n|\leq n$, $n\geq 2$), опиравшимся на идеи теории операторов в гильбертовом пространстве. Связь этих идей с финальной частью доказательства была неочевидной, так что „проверка доказательства", сделанная в Ленинграде весной 1984 г. (об истории вопроса см., например, книгу [20]), свелась по существу к уничтожению упомянутых связей вообще. Не вникая в метафизическую проблему целесообразности доказательств, „использующих лишь циркуль и линейку", мы приступили к работе по реставрации нарушенных связей, будучи уверенными, что адаптация оригинального доказательства де Бранжа к кругу понятий и методов одной только теории однолистных функций была сопряжена с потерей информации. По-видимому, самая существенная потеря состояла в утрате внутреннего смысла многочисленных преобразований, которые стали чисто формальными выкладками, если угодно - „искусственными приемами" (да, признаться, выглядели таковыми и в изложении самого изобретателя метода Л. де Бранжа). Мы взяли за основу теорему 92 книги [26] и, расшифровывая ее смысл, пришли к содержанию части 1 настоящей работы. 2-я часть работы окончательно убедила нас в полезности общего взгляда на предмет - от операторных мер к эволюционным уравнениям и мультипликативному усреднению их решений, что позволяет объяснить не только смысл уравнений де Бранжа и естественность появления специальных функций в конце доказательства, но и роль уравнения Лёвнера, столь важного в геометрической теории функций вообще. Если же говорить об оценках коэффициентов однолистных функций (теме, на самом деле, довольно специальной...), то теперь мы можем суммировать понимание природы этих оценок следующим образом:

(1) источником оценок является неравенство Коши - Буняковского - Шварца (некоммутативная версия) для операторной меры $d\mathcal{E}=d(C_sC_s^*)$, $C_sf=f\circ B_s$, определяемой принципом подчинения (субординации) Литтлвуда $\|C_sf\|_{\mathcal{G}}\le\|f\|_{\mathcal{G}}$ в пространстве $\mathcal{G}$ аналитических функций с конечным интегралом Дирихле, $\iint_{\mathbb{D}}|f'|^2dxdy<\infty$; см. гл. В;

(2) для извлечения оценок из общего операторного неравенства КБШ необходимо знать плотность меры (производную Радона - Никодима) относительно меры Лебега; эта плотность определяется производящим оператором некоторого эволюционного уравнения (уравнения Лёвнера в случае „меры Литтлвуда" $\mathcal{E}$); см. гл. В и С;

(3) если искомая оценка коэффициентов является весовой (относительно нормы пространства $\mathcal{G}$) и точной на некоторых функциях (функциях Кёбе в случае оценок де Бранжа), следует рассмотреть траектории в (весовом) пространстве $\mathcal{G}$, вдоль которых мера пропорциональна длине дуги, и воспользоваться методом мультипликативного усреднения решений эволюционных уравнений; см. гл. С).

Более того, теперь, присоединяясь к де Бранжу [25], можно, по-видимому, надеяться, что операторный метод окажется эффективным и в решении так называемой „проблемы коэффициентов" - задачи, имеющей ясно различимый операторный оттенок: дать полное описание наборов комплексных чисел $(a_2,a_3,\dots,a_n)$, которые могут служить коэффициентами Тейлора однолистных функций $f(z)=z+a_2z^2+\dots+a_nz^n+\dots$.

125. **Структура работы**, по-видимому, ясна из Оглавления: в первой части сосредоточены „абстрактные" операторные конструкции, вторая часть посвящена приложениям к однолистным функциям.

Читатель, заинтересованный в квазиортогональных разложениях, должен обратиться к гл. А и В.

Связанные с квазиортогональными разложениями вопросы операторных дифференциальных уравнений разбираются в гл. В и С.

Читатель же, интересующийся только оценками однолистных функций, может сразу обратиться к ч. 2 (гл. D, E, F), в начале которой воспроизведен и краткий курс квазиортогональных разложений.

Читателю, переживающему лишь индекс цитирования, следует сразу переходить к (весьма неполному) списку литературы. Наконец, читателю, не интересующемуся ничем, помочь, к сожалению, невозможно. Впрочем, Введение к работе содержит очень подробный очерк всего сочинения.

Описание результатов части 1.

130. Переходя к подробностям, сделаем сначала несколько общих замечаний о разложении (111)-(115) как о разложении по взаимно дополнительным метрикам. Именно под таким углом зрения конструкция (111)-(115) возникла в одном частном случае еще в работах Н. Ароншайна [18] и Р. Годемана [31], где рассматривались метрики, порождаемые воспроизводящими ядрами. Именно если $\mathfrak{X}$ есть некоторое множество и k - положительно-определенная функция на $\mathfrak{X}$ (т.е. такая что $\sum_{i,j=1}^{n} a_i\bar{a}_j k(x_i,x_j) \geq 0$ для любых $x_i \in \mathfrak{X}$ и $a_i \in \mathbb{C}$), которая порождает (полу)норму $\| \sum_{i=1}^{n} a_i k(x_i,\cdot) \|_k^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_i\bar{a}_j k(x_i,x_j)$, а k_1 - другая положительно-определенная функция на $\mathfrak{X}$, подчиненная k в том смысле, что разность $k_2=k-k_1$ тоже положительно определена, то вопрос состоит в нахождении формулы, связывающей нормы $\|\cdot\|_{k_2}$, $\|\cdot\|_{k_1}$ и $\|\cdot\|_k$. Эта связь в форме (111)-(115) и была найдена в работах [18], [31]. Более того, Н. Ароншайн ввел естественный *операторный язык,* абстрактным аналогом которого мы будем пользоваться при работе с дополнительными метриками.

Именно, следуя [33], с каждым пространством H_1, $H_1 \subsetneq H$, свяжем порождающий его линейный оператор[3] (сжатие) $T: H \longrightarrow H$ по формуле

$$H_1 = TH, \qquad \|x\|_1 = \|x\|_T, \qquad x \in H_1,$$

где range-норма $\|x\|_T$ определяются равенством

$$\|x\|_T = \min \{\|y\| : y \in H,\ x = Ty\}. \tag{131}$$

Пространство TH, снабженное range-нормой, обозначим символом $\mathcal{M}(T)$. Все операторы T, задающие одно и то же пространство $H_1 = \mathcal{M}(T)$, описываются уравнением $TT^* = ii^*$, где i - естественное вложение пространства H_1 в пространство H (см. [33], лемма 5.7). По определению

$$\|Tx\|_T \leq \|x\|, \qquad \|TT^*x\|_T = \|T^*x\| \tag{132}$$

для всех $x, x \in H$ (последнее равенство следует из того, что $T^*H \subset (\mathrm{Ker}\ T)^{\perp}$). Ниже, в главе А, мы покажем, следуя [33], что в этих обозначениях комплементарное пространство H_2 вычисляется по формуле

$$H_2 = D_{T^*}H$$

и снабжается range-нормой вида (131), т.е. $H_2 = \mathcal{M}(D_{T^*})$, причем единственное экстремальное разложение (113),(114) дается равенством

$$x = TT^*x + D_{T^*}^2 x \ (\equiv x_1 + x_2). \tag{133}$$

Здесь (и всюду далее) символом D_A обозначается положительный квадратный корень

---

[3] Словом оператор всегда обозначаются линейные операторы; множество (пространство) непрерывных операторов из H_1 в H_2 обозначается символом $L(H_1,H_2)$, $L(H)=L(H,H)$. Все встречающиеся пространства предполагаются сепарабельными, если из контекста явно не следует противное.

$(I-A^*A)^{1/2}$, называемый *дефектным оператором* сжатия A, $\|A\|\le 1$. Само *комплементарное пространство* $D_{T*}H$ *будет обозначаться* как $\mathcal{H}(T)$.

Отметим, что в представлении пространства H_1, $H_1\subset H$, в виде операторного образа $H_1=\mathcal{M}(T)$ не обязательно предполагать оператор T заданным на том же пространстве H: это может быть любой оператор $T\in L(H',H)$, решающий уравнение $TT^*=ii^*$, где $i:H_1 \longrightarrow H$ - естественное вложение. То же можно сказать и о комплементарном пространстве H_2: любой оператор D (не обязательно D_{T*}), обладающий свойством $I=TT^*+DD^*$, дает представление $H_2=\mathcal{M}(D)$.

Стоит отметить любопытное следствие формулы (133): оно показывает, что, как правило, экстремальное разложение (113),(114) не сводится к тривиальному, т.е. в нем оба слагаемых x_1, x_2 отличны от нуля, даже если $x\in H_1$ или $x\in H_2$, что контрастирует со случаем ортогонального разложения $H=H_1\oplus H_2$, т.е. случаем частичной изометрии T.

Таким образом, квазиортогональное разложение $H=TH+D_{T*}H$, порождаемое пространством $H_1=\mathcal{M}(T)$, основано фактически на очевидном тождестве $I=TT^*+D^2_{T*}$. Общие квазиортогональные разложения связаны с семействами вложенных гильбертовых пространств и получаются из приведенного двучленного разложения простым итерированием. При этом, однако, возникают интересные дополнительные операторные структуры, которые мы опишем в следующих разделах Введения. Ради краткости, выражение "квазиортогональное разложение" будет заменяться словом "квазиразложение".

140. Общая идея, лежащая в основании теории, чрезвычайно проста и состоит в том, что интегральное среднее

$$Wf = (\lambda\mathfrak{X})^{-1/2}\int_{\mathfrak{X}} f d\lambda$$

на пространстве с мерой $(\mathfrak{X},\lambda)$ задает коизометрическое отображение W пространства $L^2(\lambda)$ в поле скаляров $\mathbb{C}$ (эрмитово сопряженнное отображение W^* имеет вид $W^*c=c(\lambda\mathfrak{X})^{-1/2}\mathbb{1}$, $c\in\mathbb{C}$). Правильный некоммутативный аналог этого наблюдения (при надлежащем прочтении) и составляет самый общий вариант квазиортогонального разложения. Язык коизометрических представлений (т.е. отображений $V:\mathcal{H}\longrightarrow H$ таких, что V^* есть изометрия из H в $\mathcal{H}$) оказывается при этом весьма полезным. Разумеется, коизометрическое отображение V становится унитарным, если сузить его на ортогональное дополнение ядра $(\mathrm{Ker}\ V)^\perp = V^*H$. Но та дополнительная свобода (неединственность) в представлении векторов $h, h\in H$, в виде $h=Vx$, $x\in\mathcal{H}$, с оценкой $\|h\|\le\|x\|$ (вместо равенства $\|h\|=\|x\|$ при унитарном представлении), которая отличает коизометрические отображения от унитарных, на практике нередко оказывается решающим достоинством, позволяющим выбрать удобное, "вычислимое" представление $h=Vx$ вместо наиболее "экономного", но труднодоступного унитарного $h=V(V^*h)$, $\|h\|=\|V^*h\|$.

Таким образом, говоря о первой (общей) части работы, ее предмет можно описать как изучение интегральных коизометрических представлений заданного гильбертова пространства H. Если, скажем, K - некоторое другое гильбертово пространство и $L^2(K,\lambda)$ - пространство всех K-значных L^2-функций на пространстве с мерой $(\mathfrak{X},\lambda)$, то мы, в частности, будем рассматривать отображения вида

$$Vf = \int_{\mathfrak{X}} v(s)f(s)d\lambda(s), \quad f\in L^2(K,\lambda),$$

где $v(s)\in L(K,H)$, и функция $s\longmapsto v(s)$ в каком-то смысле измерима (см. некоторые замечания об этом в п. B10 ниже). Нетрудно проверить, что отображение V коизометрично из $L^2(K,\lambda)$ в H тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathfrak{X}} v(s)v(s)^*d\lambda(s) = I_H.$$

В различных ситуациях нам будет удобно выражать свойство коизометричности отображения разными словами, и поскольку это обстоятельство относится ко всей работе в целом, мы позволим себе привести уже здесь, во Введении, следующее элементарное предложение.

I50. Л е м м а. *Пусть $\mathcal{H},H$ – гильбертовы пространства, и пусть $V\in L(\mathcal{H},H)$. Следующие утверждения равносильны.*

(I51) *V есть коизометрия (т.е. $V^*:H\longrightarrow\mathcal{H}$ – изометрический оператор).*

(I52) $VV^*=I_H$.

(I53) *Любой вектор h, $h\in H$, допускает представление вида $h=Vx$, $x\in\mathcal{H}$, и всегда $\|h\|\le\|x\|$; существует представление (на самом деле, оно единственно), для которого это неравенство превращается в равенство.*

(I54) *Отображение V является сжимающим* ($\|Vx\|\le\|x\|$, $x\in\mathcal{H}$), *и существует подмножество $\mathcal{H}'$ пространства $\mathcal{H}$, на котором V сохраняет норму и* $\operatorname{clos}V\mathcal{H}'=H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\|V^*h\|^2=(VV^*h,h)$, $h\in H$, то ясно, что (I51)$\Leftrightarrow$(I52). Ясно также, что (I51)$\Longrightarrow$(I53) (единственность следует из того, что $\operatorname{Ker}V \perp V^*H$: равенство $Vx=h$ вместе с $VV^*h=h$ влечет $x-V^*h\in\operatorname{Ker}V$ и, стало быть, $\|x\|^2 = \|x-V^*h\|^2 + \|V^*h\|^2 = \|x-V^*h\| + \|h\|^2$; таким образом, $\|x\|=\|h\|\Leftrightarrow x=V^*h$) и что (I53)$\Longrightarrow$(I54) (полагаем $\mathcal{H}'=\mathcal{H}$). Наконец, (I54)$\Longrightarrow$(I51), ибо, не умаляя общности, $\mathcal{H}'=\bigcup_{\lambda>0}\lambda\mathcal{H}'$ и, стало быть, образ $V(\mathcal{H}'\cap S)$ плотен в единичной сфере пространства H (где $S=\{x\in\mathcal{H}\colon \|x\|=1\}$); это дает $\|V^*h\| = \sup\{|(x,V^*h)| : x\in\mathcal{H}, \|x\|=1\} \ge$ $\ge \sup\{|(Vx,h)| : x\in\mathcal{H}', \|x\|=1\} = \sup\{|(g,h)|:g\in H, \|g\|=1\} = \|h\|$ для любого $h, h\in H$. Поскольку, кроме того, $\|V^*\|\le1$, получаем $\|V^*h\|=\|h\|$, $h\in H$. ●

Простейшие квазиразложения порождаются конечными цепочками вложенных гильбертовых пространств.

I60. Квазиразложения по дискретному параметру. Пусть

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset H_{n+1} = \{\mathbb{0}\}$$

есть семейство вложенных гильбертовых пространств, и пусть T_k – соответствующие порождающие операторы (сжатия): $H_k=\mathcal{M}(T_k)$, $0\le k\le n+1$. Условие $\mathcal{M}(T_{k-1}) \supset \mathcal{M}(T_k)$ равносильно неравенству $T_kT_k^*\le T_{k-1}T_{k-1}^*$, т.е. существованию сжатия $T_{k-1,k}$ такого, что $T_k=T_{k-1}T_{k-1,k}$ (последнее предложение известно как лемма Дагласа, [28]). Отсюда следует (лемма A30 ниже), что

$$D^2_{T^*_n} = \sum_{k=0}^{n-1} T_k \, D^2_{T^*_{k,k+1}} T^*_k \,, \qquad I = \sum_{k=0}^{n} T_k \, D^2_{T^*_{k,k+1}} T^*_k \,, \tag{I61}$$

и что

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} T_k \, D_{T^*_{k,k+1}} y_k \Big\|^2 \le \sum_{k=0}^{n} \|y_k\|^2$$

для любых $y_k \in H$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $y_k = D_{T^*_{k,k+1}} T^*_k x$, $x \in H$. Последнее неравенство интерпретируется (теорема A140) как оценка комплементарной нормы элемента x,

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k, \qquad x_k = T_k D_{T^*_{k,k+1}} y_k \,, \tag{I62}$$

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_n)} \le \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k\|^2_{\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})} \,, \tag{I63}$$

где $\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})$ есть пространство, дополняющее $\mathcal{M}(T_{k+1})$ до $\mathcal{M}(T_k)$. Равенство в (I63) обязательно достигается, причем на плотном множестве векторов вида $x = D^2_{T^*_n} f$ это бывает тогда и только тогда, когда $x_k = T_k \, D^2_{T^*_{k,k+1}} T^*_k f$ $(f \in H)$.

Аналогично строятся и квазиразложения, порождаемые бесконечными цепями гильбертовых пространств $\{H_k\}_{k\ge1}$ (теорема A180). Устанавливается, что *обобщенные ряды Фурье* $x \sim \sum_{k\ge1} \mathcal{P}_k x$, связанные с произвольным топологически свободным семейством подпространств E_k, $E_k \subset H$, ($\mathcal{P}_k$ есть проектор на E_k параллельно подпространству $\mathrm{span}(E_j : j\ge1,\ j\ne k)$), могут быть рассмотрены в рамках возникающей техники квазиортогональных рядов. Будучи обязательно сходящимися, эти последние фактически дают некоторый метод суммирования (регуляризации) рядов $\sum_{k\ge1} \mathcal{P}_k x$, см. подробности в A220–A310.

170. Квазиразложения по непрерывному параметру, формально говоря, могут быть получены из предыдущих разложений предельным переходом к произвольному убывающему семейству гильбертовых пространств H_s ($H_s \subset H_r$ при $s \ge r$) от аналогичных кусочно-постоянных семейств. Суммы (I61), (I62) заменяются при этом некоторыми интегралами, которые мы сейчас опишем.

Пусть $H_s = \mathcal{M}(T_s)$, $a \le s \le b$, – убывающее семейство гильбертовых пространств, порождаемое сжатиями T_s некоторого пространства H, $T_a = I$. Тогда $T_s T^*_s \le T_r T^*_r$ при $a \le r \le s \le b$ и, стало быть, равенство

$$\mathcal{E}((r,s]) = T_r T^*_r - T_s T^*_s \tag{I71}$$

определяет операторную меру в H (функция $s \longmapsto T_s T^*_s$ предполагается непрерывной справа), причем $\mathcal{E}((a,b]) = D^2_{T^*_b}$. Оказывается, квазиортогональное разложение можно связать не только с такой мерой $\mathcal{E}$ (и, значит, с упорядоченной цепью гильбертовых пространств), но с произвольной положительной операторной мерой $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H, т.е. счетно-аддитивной функцией множества на измеримом пространстве $\mathfrak{X}$, значения которой - положительные операторы в H, нормированные условием

$$0 \le \mathcal{E}(\delta) \le I, \quad \delta \subset \mathfrak{X} \tag{I72}$$

(последнее соглашение является чисто техническим). Интегрирование H-значных вектор-функций относительно общих мер $\mathcal{E}$ является нетривиальным занятием, ибо стандартным образом такому интегрированию поддаются лишь линейные комбинации функций вида $f=g(\cdot)x$, где $x\in H$, а g - скалярная ограниченная измеримая функция на $\mathfrak{X}$. Откладывая обсуждение соответствующих конструкций до п. B10-B20, мы можем сначала иметь дело со ступенчатыми функциями f, для которых полагаем

$$\int_{\mathfrak{X}} (d\mathcal{E})f = \sum_i \mathcal{E}(\delta_i)f(s_i),$$

$$\int_{\mathfrak{X}} ((d\mathcal{E})f,f) = \sum_i (\mathcal{E}(\delta_i)f(s_i),\ f(s_i)),$$

где $s_i\in\delta_i$, а разбиение δ_i множества $\mathfrak{X}$ выбрано достаточно мелким. Отметим еще, что основные приложения предлагаемой техники связаны по существу с конечномерным случаем $\dim H<\infty$ (см. ч. 2), когда только что приведенные определения распространяются стандартным способом на широкий класс "$\mathcal{E}$-суммируемых" (для второго интеграла - „суммируемых с квадратом") функций f.

Аналогом разложения (I62)-(I63) служит следующее:

$$x = \int_{\mathfrak{X}} (d\mathcal{E})f, \qquad \|x\|^2_{\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2}} \le \int_{\mathfrak{X}} ((d\mathcal{E})f,\ f), \tag{I73}$$

причем это неравенство и можно считать упомянутым ранее некоммутативным аналогом неравенства КБШ. Более того, отображение W, $Wf=\int_{\mathfrak{X}}(d\mathcal{E})f$, продолжается до коизометрического отображения гильбертова пространства $\overline{\mathcal{F}}$, представляющего собой пополнение множества ступенчатых функций, по норме, определяемой правой частью неравенства (I73), в пространство $\mathcal{M}(\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2})$ (теорема B40).

I75. Дилатация меры $\mathcal{E}$. На неравенство (I73) можно посмотреть и с другой общей точки зрения. Именно по известной теореме Наймарка (см., например, [16]) любая мера $\mathcal{E}$ с условием (I72) допускает *дилатацию*, т.е. существует мера $\hat{\mathcal{E}}$, значения которой суть ортогональные проекторы в более широком гильбертовом пространстве $\hat{H}$, $\hat{H}\supset H$, и такая, что $\mathcal{E}$ есть компрессия $\hat{\mathcal{E}}$ на H: $\mathcal{E}(\delta)=P_H\hat{\mathcal{E}}(\delta)|H$, $\delta\subset\mathfrak{X}$. Для такой меры $\hat{\mathcal{E}}$ интегралы из (I73) легко считаются. Предположим, что $\hat{\mathcal{E}}(\mathfrak{X})=I_{\hat{H}}$ (в этом случае и $\mathcal{E}(\mathfrak{X})=I_H$), и пусть мера $\hat{\mathcal{E}}$ реализована по спектральной теореме, т.е. $\hat{H}=L^2(K,\lambda)$, K - вспомогательное гильбертово пространство, и $\hat{\mathcal{E}}(\delta)h=\chi_\delta h$, $h\in\hat{H}$, χ_δ - характеристическая функция множества δ, $\delta\subset\mathfrak{X}$. Пусть $\mathcal{F}$ - пространство H-значных ступенчатых функций на $\mathfrak{X}$, а $\overline{\mathcal{F}}$ - его пополнение по норме $\int_{\mathfrak{X}}((d\hat{\mathcal{E}})f,f)$. Для ступенчатой функции f нетрудно проверить, что

$$(\int_{\mathfrak{X}} (d\hat{\mathcal{E}})f)(s) = (f(s))(s), \qquad s \in \mathfrak{X},$$

т.е. отображение

$$\int_{\mathfrak{X}} d\hat{\mathcal{E}} : \mathcal{F} \longrightarrow \hat{H} \tag{176}$$

является диагональным отображением. Для меры $\hat{\mathcal{E}}$ неравенство (173) превращается в равенство для любой функции $f, f\in\mathcal{F}$. Поэтому отображение (176) продолжается до изометрического отображения из $\overline{\mathcal{F}}$ в $\hat{H}$.

Таким образом, используя дилатацию $\hat{\mathcal{E}}$, неравенство (173) для меры $\mathcal{E}$ можно прочитать и так: при ортогональном проектировании норма вектора не повышается:

$$\|\int_{\mathfrak{X}} (d\mathcal{E})f\|^2 = \|P_H \int_{\mathfrak{X}} (d\hat{\mathcal{E}})f\|^2 \le \|\int_{\mathfrak{X}} (d\hat{\mathcal{E}})f\|^2 = \int_{\mathfrak{X}} ((d\hat{\mathcal{E}})f, f) = \int_{\mathfrak{X}} ((d\mathcal{E})f, f).$$

Подробности этой интерпретации неравенства (173) можно найти в п. А320, А330 и В20, В96, но, на самом деле, дилатация $\hat{\mathcal{E}}$ не оказывает заметного влияния на наши конструкции.

Основным частным случаем неравенства (173) является случай, когда мера $\mathcal{E}$ имеет плотность.

180. Случай существования плотности. Пусть операторная мера $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H и скалярная мера λ, заданные на одном измеримом пространстве $\mathfrak{X}$, таковы, что существует операторная функция w, для которой

$$\mathcal{E}(\delta) = \int_{\delta} w(s)d\lambda(s), \qquad \delta \subset \mathfrak{X}.$$

Функция w называется плотностью меры $\mathcal{E}$ (относительно меры λ), и обязательно $w(s)\ge\mathbb{O}$, $s\in\mathfrak{X}$. Рассматривая некоторую эрмитову факторизацию плотности w : $w(s) = v(s)v(s)^*, s\in\mathfrak{X}$, можно заменить упомянутое в конце п. 170 пространство $\overline{\mathcal{F}}$ стандартным L^2-пространством и свести квазиразложение (173) к следующему утверждению (теорема В70): оператор V,

$$Vf = \int_{\mathfrak{X}} vf d\lambda, \tag{181}$$

осуществляет коизометрическое отображение пространства $L^2(H,\lambda)$ на пространство $\mathcal{M}(\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2})$.

Приложения к оценкам однолистных функций связаны с упоминавшейся на стр. 4 мерой Литтлвуда (по существу с принципом субординации Литтлвуда) и с необходимостью интегрировать по этой мере довольно общие вектор-функции. Фактически мы *вынуждены* работать с операторными мерами Стилтьеса $d(C_sC_s^*)$, $C_sf=f\circ B_s$, отвечающими линейно упорядоченным семействам множеств $\delta_s=B_s(\mathbb{D})$, $a\le s\le b$, поскольку на всей σ-алгебре борелевских подмножеств круга $\mathbb{D}$ соответствующая „мера" теряет свойства однозначности и аддитивности. В этом случае, как и при исследовании „настоящей" операторной меры $\mathcal{E}$ и ее сужений на σ-алгебры, порожденные однопараметрическими семействами $\{\delta_s\}$, центральным становится вопрос о дифференциальной и мультипликативаной структуре семейства операторов $\{T_s\}$, связанного с мерой $\mathcal{E}$ формулой $\mathcal{E}(\delta_s)=I-T_sT_s^*$, $a\le s\le b$.

185. Эволюционные семейства. Итак, вернемся к мерам (171) и займемся вычислением плотностей таких мер. Начнем с использования леммы Дагласа: если $r\le s$, то

$$T_s = T_rT_{rs} \tag{186}$$

для некоторого *сжатия* T_{rs}, $T_{rs}\in L(H)$. Выбор этого сжатия неоднозначен, но эту неоднозначность можно устранить, положив, скажем, $T^*_{rs}=\mathbb{O}$ на $\mathrm{Ker}T_r$. При этом дополнительном условии соблюдается *эволюционное тождество*

$$T_{rt} = T_{rs}T_{st} \tag{187}$$

для всех троек r,s,t таких, что $a\le r\le s\le t\le b$. Ясно также, что $T_{as}= T_s$ и (при указанном выборе T^*_{rs}) $T_{ss}= P_{(\mathrm{Ker}T_s)^\perp}$, $s\in[a,b]$. Однако во всех случаях, которые мы будем рассматривать, существуют и операторы T_{rs} такие, что вместе с (186),(187) имеет место равенство

$$T_{ss} = I, \qquad a \le s \le b. \tag{188}$$

Разумеется, это заведомо так в случае $\mathrm{Ker}T_s=\{\mathbb{O}\}$, $s\in[a,b]$. Такое семейство $\{T_{rs}\}$ будем называть *эволюционным*.

Если семейство операторов $\{T_{rs}: a\le r\le s\le b\}$ удовлетворяет эволюционному тождеству (187), то операторы

$$T_s \overset{\mathrm{def}}{=} T_{as}, \qquad a \le s \le b,$$

связаны с ним равенством (186). И если семейство $\{T_{rs}\}$ было сжимающим, то оператор-функция $T_sT^*_s$ монотонно убывает. Свойство (188) гарантирует при этом, что $D^2_{T^*_s} = T_{aa}T^*_{aa}-T_{as}T^*_{as}$, $s \ge a$. Семейство операторов $\{T_s\}$, для которых функция $T_sT^*_s$ монотонно убывает, будем называть цепью операторов.

Таким образом, убывающая цепь гильбертовых пространств порождает некоторую цепь сжатий и соответствующее сжимающее эволюционное семейство, и обратно, такое семейство всегда происходит от некоторой убывающей цепи пространств. Тем самым цепь порождает не одну меру (171), а целое семейство мер

$$\mathcal{E}_r((s,t]) = D^2_{T^*_{rt}} - D^2_{T^*_{rs}}, \qquad r \le s \le t \le b,$$

что будет весьма удобно для вычисления плотности меры $\mathcal{E}_a=\mathcal{E}$. Впредь мы будем иметь дело преимущественно с эволюционными семействами.

Для описания структуры квазиразложений по непрерывному параметру предположим сейчас, что мы ищем плотность меры $\mathcal{E}$ относительно меры Лебега, и потому (для простоты) рассмотрим гладкое сжимающее эволюционное семейство T_{rs} (зависящее от r и s дифференцируемым образом). Как мы увидим, этого будет достаточно для приложений.

Итак, дифференцируя эволюционное тождество (187) по r и t и полагая затем $s=r$

и $s=t$ соответственно, получим хорошо известные *эволюционные уравнения*

$$\frac{\partial T_{rs}}{\partial r} = \Omega(r)T_{rs}, \qquad \frac{\partial T_{rs}}{\partial s} = -T_{rs}\Omega(s). \tag{189}$$

Оператор-функцию Ω,

$$\Omega(s) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial T_{rs}}{\partial r}\right|_{r=s},$$

называют производящим оператором семейства T_{rs}.

Пользуясь положительностью меры $\mathcal{E}_r$, найдем условие сжимаемости цепи операторов:

$$\frac{\partial}{\partial s}(-T_{rs}T^*_{rs}) = T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs},$$

$$2\mathrm{Re}\Omega(s) = \frac{\partial}{\partial s} D^2_{T^*_{rs}}\Big|_{s=r} \ge \mathbb{O}. \tag{190}$$

Таким образом,

$$d\mathcal{E}_r(s) = T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs}ds, \qquad r \le s \le b. \tag{191}$$

Обратно, любое из уравнений (189) с произвольно заданной суммируемой по параметру s оператор-функцией Ω, $\mathrm{Re}\Omega\ge\mathbb{O}$, определяет сжимающее эволюционное семейство по формуле

$$T_{rt} = \overset{\curvearrowleft}{\int_r^t} \exp\,[-\Omega(s)ds], \qquad a \le r \le t \le b \tag{192}$$

(мультипликативный интеграл; о подробностях см. п. В150-В190). На самом деле, нам придется рассматривать и случаи, когда операторы $\Omega(s)$ не только не ограничены, но даже имеют тривиальную общую область определения: $\bigcap_s \mathrm{Dom}\ \Omega(s)=\{\mathbb{O}\}$. Мы интерпретируем тогда уравнения (189) в некотором слабом смысле, а интеграл (192) определен с помощью специального метода редукции (см. п. В170).

Равенство (191) и условие (190) подсказывают введение оператор-функции Δ, факторизующей $2\mathrm{Re}\Omega$,

$$\Delta(s)\Delta(s)^* = 2\mathrm{Re}\Omega(s), \qquad s \in [a,b],$$

и затем представление меры $\mathcal{E}_r$: $d\mathcal{E}_r=vv^*ds$, где $v(s)=T_{rs}\Delta(s)$, $r\le s\le b$. Теперь теорема В210 об операторе (181) дает следующее квазиразложение: для любой функции y, $y\in L^2(H,ds)$, вектор

$$x = \int_r^b T_{rs}\Delta(s)y(s)ds \tag{193}$$

лежит в пространстве $\mathcal{H}(T_{rb})$ и

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_{rb})} \le \int_r^b \|y(s)\|^2 ds; \tag{194}$$

для любого x, $x\in\mathcal{H}(T_{rb})$, существует представление, для которого последнее неравенство превращается в равенство; для плотного в $\mathcal{H}(T_{rb})$ множества векторов вида $x = D^2_{T^*_{rb}} h$ в этом „экстремальном" представлении $y(s)=\Delta(s)T^*_{rs}h$, $h\in H$, $r\le s\le b$. На самом деле, возможна ситуация, когда любой вектор из $\mathcal{H}(T_{rb})$ допускает лишь единственное представление (193) (которое, тем самым, автоматически оказывается „экстремальным") - это просто означает, что соответствующий оператор (181) является унитарным.

Как и в случае дискретного параметра, квазиразложение (193)-(194) можно переписать в виде

$$x = \int_r^b h(s)ds, \qquad \|x\|^2_{\mathcal{H}(T_{rb})} \le \int_r^b \|h(s)\|^2_{\mathcal{H}_r(s)} ds, \tag{195}$$

где $\mathcal{H}_r(s) = \mathcal{M}(T_{rs}\Delta(s))$, или, в несколько условной форме, в виде

$$\mathcal{H}(T_{rb}) = \int_r^b \mathcal{H}_r(s)ds. \tag{196}$$

Отметим, что пространства $\mathcal{H}_r(s)$ сами не являются комплементарными, это как бы производная от семейства комплементарных пространств $\mathcal{H}(T_{rs})$ в том смысле, что для любого промежутка (s_1,s_2) комплементарное пространство $\mathcal{H}(T_{rs_1},T_{rs_2})$ (т.е. пространство, дополняющее $\mathcal{M}(T_{rs_2})$ до $\mathcal{M}(T_{rs_1})$) является „квазиортогональным средним" пространств $\mathcal{H}_r(s)$ по данному промежутку

$$\mathcal{H}(T_{rs_1},T_{rs_2}) = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{H}_r(s)ds.$$

Другими словами, для каждой функции h, $h\in L^2(\mathcal{H}_r(s),ds)$, вектор x,

$$x = \int_{s_1}^{s_2} h(s)\, ds, \tag{197}$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}(T_{rs_1},T_{rs_2})$ и справедлива оценка

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_{rs_1},T_{rs_2})} \le \int_{s_1}^{s_2} \|h(s)\|^2_{\mathcal{H}_r(s)} ds. \tag{198}$$

А для каждого вектора x, $s\in\mathcal{H}(T_{rs_1},T_{rs_2})$, существует такое (причем единственное) разложение (197), для которого в (198) имеет место равенство.

Еще одно замечание состоит в том, что как в дискретном случае (см. формулы (162)-(163)), так и в непрерывном (представления (193)-(195)) соответствующие разложения можно записать разными способами, подбирая по потребностям (или по вкусу) норму в „промежуточных" пространствах и учитывая, что $\|x\|=\|Ax\|_A$ для любого обратимого оператора A. Например, ниже мы увидим, что, используя технику сжимающих эволюционных семейств (т.е. квазиразложений), естественно придать формулам (193)-(194) следующий вид:

$$x = \int_r^b T_{rs} g(s)ds, \qquad \|x\|^2_{\mathcal{H}(T_{rb})} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Delta(s)} ds. \tag{I99}$$

I100. Весовые квазиразложения. Можно получить формально более общие разложения, если рассматривать сжимающее эволюционное семейство T_{rs} не в фиксированном пространстве H, а в семействе пространств $\{H(s)\}$,

$$T_{rs} : H(s) \longrightarrow H(r), \quad a \le r \le s \le b. \tag{I101}$$

Пространства $H(s)$ будут задаваться скалярным произведением вида $(\sigma(s)x, y)$, $\sigma(s)$ - неотрицательный оператор в H, который в получаемых далее оценках играет роль „операторного веса". На самом деле, в гл. В будет показано, что введение этих масштабных коэффициентов $\sigma(s)$ равносильно рассмотрению оценок операторов (I81) в весовых пространствах функций в том смысле, как это обычно понимается для интегральных операторов. Для упрощения формулировок предположим пока, что рассматриваемые операторы $\sigma(s)$ обратимы, так что встречающиеся ниже комбинации типа $\sigma(r)^{1/2}T_{rs}\sigma(s)^{-1/2}$ и т. д. имеют смысл. Для большей гибкости нашей схемы и для известной симметрии вместо $\sigma^{1/2}$ мы рассмотрим эрмитову факторизацию веса σ:

$$\sigma(s) = \tau(s)^*\tau(s), \quad a \le s \le b. \tag{I102}$$

Пространство $H(s)$ со скалярным произведением $(\sigma(s)x, y)_H$ может быть описано и как образ $H(s) = \tau(s)^{-1}H$ с range-нормой. Операторы (I101) образуют сжимающее эволюционное семейство тогда и только тогда, когда семейство $\{\tilde{T}_{rs}\}$

$$\tilde{T}_{rs} = \tau(r)T_{rs}\tau^{-1}(s), \quad a \le r \le s \le b, \tag{I103}$$

рассматриваемое в пространстве H также является эволюционным и сжимающим. Производящий оператор $\tilde{\Omega}$ семейства $\tilde{T}_{rs}$ находится через соответствующий коэффициент Ω для T_{rs} по формуле

$$\tilde{\Omega} = \tau'\tau^{-1} + \tau\Omega\tau^{-1},$$

так что свойство сжимаемости семейства (I101) (т. е. семейства (I103)) сводится к условию

$$\Lambda \ge \mathbb{O}, \tag{I104}$$

$$\Lambda(s) = \sigma'(s) + 2\mathrm{Re}[\sigma(s)\Omega(s)], \quad a \le s \le b.$$

Весовой аналог разложения выписывается через функцию плотности $\tilde{\Delta}$, такую что

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}^* = 2\mathrm{Re}\tilde{\Omega} = (\tau^*)^{-1}\Lambda\tau^{-1}.$$

Итак,

$$\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt}) = \int_r^t \mathcal{H}^{\sigma}_r(s)ds, \qquad \mathcal{H}^{\sigma}_r(s) = \mathcal{M}(T_{rs}\sigma(s)^{-1}\Lambda(s)^{1/2}),$$

что, как и раньше, означает возможность разложения

$$x = \int_r^t h(s)ds \tag{I105}$$

с оценкой

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})} \le \int_r^t \|h(s)\|^2_{T_{rs}\sigma(s)^{-1}\Lambda(s)^{1/2}} ds . \tag{I106}$$

Здесь h - произвольная функция из $L^2(\mathcal{H}^{\sigma}_r(s),ds)$, и тогда вектор x, вычисляемый по формуле (I105), лежит в пространстве $\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})$ - комплементарном к $T_{rt}H(t)$ в пространстве $H(r)$. В свою очередь для каждого x существует единственная функция h, для которой (I106) обращается в равенство.

К этим весовым разложениям можно сделать такие же замечания, какие были сделаны о разложениях (I93)-(I95).

I110. Квазиразложения для оценки эволюционных семейств. Теперь мы обратимся к приложениям вышеприведенных неравенств к оценкам самих эволюционных семейств T_{rs}. Именно во второй части работы цепи T_{rs}, $a\le r\le s\le b$, будут составлены из операторов композиции $f\mapsto f\circ B_{rs}$ в пространстве $\mathcal{G}$ аналитических функций f с конечным интегралом Дирихле (см. ниже п. I60) и оценке будет подлежать некоторое выражение, зависящее от функции $B=B_{ab}$ (например, $\log(B(z)/z)$, $(B(z)/z)^{\nu}$ и т.д.). Мы интерпретируем такое выражение, как результат „действия" эволюционного семейства T_{rs} на некоторую (подлежащую определению) плотность g, т.е. будем искать его в виде $x=\int_a^b T_{as}g(s)ds$ и затем использовать оценки (I99), (I106).

По существу это означает некоторую перемену ролей - оцениваются, скорее, операторы T_{rs}, чем элементы основного пространства H ($H=\mathcal{G}$ в ч. 2), а это предъявляет новые требования к развитой ранее технике оценивания. Перечислим основные такие требования и затем опишем некоторый способ им удовлетворить, ориентированный на приложения (в ч. 2) к однолистным функциям. Итак, постановка задачи включает в себя следующие три требования (I111, I114, I117).

I111. Рассматривается некоторое множество $\mathcal{T}$ эволюционных семейств T_{rs}(и множество Ξ соответствующих производящих операторов Ω, $\frac{\partial}{\partial r} T_{rs}= \Omega(r)T_{rs}$). Для каждого Ω, $\Omega\in\Xi$, выбирается определенное „управляющее воздействие" $g=g_{\Omega}$ и решается задача Коши

$$\frac{\partial}{\partial r} x(r) = \Omega(r)x(r) - g(r), \qquad a\le r\le b, \tag{I112}$$

с произвольным начальным условием $x(b)$:

$$x(r) = T_{rb}x(b) + \int_r^b T_{rs}g(s)ds, \qquad a\le r\le b. \tag{I113}$$

А оценке подлежит результат, полученный в точке a, т.е. вектор $x(a)$.

Мы умеем оценивать (I113) с $x(b)=\mathbb{0}$ (см. (I99)), или другими словами, вектор $x(a)-T_{ab}x(b)$:

$$\|x(a)-T_{ab}x(b)\|^2_{\mathcal{H}(T_{ab})} \le \int_a^b \|g(s)\|^2_{\Delta(s)}ds.$$

Используя определение (I15) дополнительной нормы и полагая там $x_1=T_{ab}x(b)$ и $x_2=x(a)-T_{ab}x(b)$, получим оценку в исходной норме

$$\|x(a)\|^2 - \|x(b)\|^2 \le \int_a^b \|g(s)\|^2_{\Delta(s)}ds.$$

Теперь вспомним, что нам нужна весовая оценка. Поэтому

I114. Назначается вес $\sigma_0=\tau_0^*\tau_0$ и оцениваться будет весовая норма $\|x(a)\|_{\tau_0^{-1}}$ с помощью соответствующего квазиразложения. Это квазиразложение, тем самым, также оказывается весовым: нужно подобрать операторы $\sigma(s)=\tau(s)^*\tau(s)$, $a\le s\le b$, так, чтобы $\tau(a)=\tau_0$ и чтобы эволюция T_{rs} осталась сжимающей в шкале пространств $H(s)=\tau(s)^{-1}H$. Тогда

$$\mathrm{T}\|x(a)\|^2_a - \|x(b)\|^2_b \le \left\|\int_a^b T_{as}g(s)ds\right\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(a)}(T_{ab})} \le \int_a^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)}ds, \tag{I115}$$

где $\Gamma=\sigma^{-1}\Lambda^{1/2}$, $\Lambda=\sigma'+2\mathrm{Re}(\sigma\Omega)$. Условие упомянутой сжимаемости состоит в том, что

$$\Lambda(s) \ge \mathbb{0}, \qquad a\le s\le b. \tag{I116}$$

I117. Точность сквозного неравенства (I115) для некоторого множества $\mathcal{T}_{ex}$ эволюционных семейств T_{rs} также входит в число новых требований:

$$\|x(a)\|^2_a - \|x(b)\|^2_b = \int_a^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)}ds \tag{I118}$$

для $\Omega\in\Xi_{ex}$. В гл. C будет проверено, что равенство (I118) равносильно уравнению, связывающему σ,Ω и x (функция x определяется формулой (I113)),

$$(\sigma x)' + \Omega^*\sigma x \equiv 0. \tag{I119}$$

Тождество (I119) мы вынуждены рассматривать как уравнение относительно σ (так как Ω и x уже заданы). Именно это обстоятельство и непрозрачность свойств σ в зависимости от свойств Ω являются основными препятствиями к установлению оценок типа I111-I117. Уравнение (I119) нужно совместить с неравенством (I116), а в ч.2 задача будет рассматриваться с переменным правым концом b, и нам будет нужно, чтобы $\lim_{b\to\infty}\sigma(b)=\mathbb{0}$. Некоторый выход подсказывает само неравенство (I115), точнее, свойство выпуклости его относительно Ω, которое мы сейчас опишем.

I120. Выпуклость относительно Ω. Речь идет о выпуклости левой части неравенства

$$\|x(r)\|_r^2 - \|x(t)\|_t^2 \le \int_r^t \|g(s)\|_{\Gamma(s)}^2 ds, \qquad (I121)$$

которое, будучи верным при всех r и t, $a \le r \le t \le b$, по существу является дифференциальным

$$-\frac{\partial}{\partial s}(\sigma(s)x(s),\ x(s)) \le \|\Gamma(s)^{-1} g(s)\|^2. \qquad (I122)$$

Левая часть неравенства (I122), см. п.С50,

$$\frac{\partial}{\partial s}(\sigma x, x) = (\sigma' x, x) + 2\mathrm{Re}(\sigma\Omega x, x) - 2\mathrm{Re}(\sigma g, x),$$

является выпуклой (и даже вещественно-аффинной) относительно пары Ω, g, если мы посмотрим на нее формально-алгебраически (т.е. забыв о зависимости x от Ω и g). Это наводит на мысль, что для множества эволюционных семейств $\mathcal{T}$, *обладающих выпуклой структурой*, требования I111 - I117 могут быть совмещены.

Пусть, скажем, множество $\Xi(s)$,

$$\Xi(s) = \{\ \Omega(s)\ :\ \Omega \in \Xi\ \},$$

не зависит от s и является выпуклым и слабо компактным в $L(H)$. И пусть $\mathfrak{Z}$ - множество его крайних точек. Из сказанного о характере неравенства (I121) ясно, что условие точности (I118) естественно требовать именно от экстремальных цепей $\Xi_{ex}=\{\Omega(\cdot,\ \zeta):\ \Omega(s,\zeta)\equiv\zeta,\ s\in[a,b];\ \zeta\in\mathfrak{Z}\}$. Важно отметить, что *условие сжимаемости* (I116), от которого зависят неравенства (I121), (I115), *также выпукло относительно* Ω, и потому достаточно, чтобы оно было выполнено для эволюций T_{rs} с $\Omega\in\Xi_{ex}$. Далее, условие выпуклости естественно приводит к появлению объектов расслоения меры $d\mathcal{E}_r=T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T_{rs}^{*}ds$: по теореме Крейна - Мильмана операторы записываются интегралами вероятностных мер μ_s по множеству $\mathfrak{Z}$.

$$\Omega(s) = \int_{\mathfrak{Z}} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta), \qquad a \le s \le b. \qquad (I123)$$

Перечисленные соображения и следующие (ниже) из них конструкции могли бы показаться умозрительными, но все решает существование конкретных примеров (приложений): в ч.2, имея дело с однолистными функциями, мы будем находиться именно в таких условиях. В частности, оператор-функции Ω будут действовать в пространстве $\mathcal{G}$ по правилу

$$\Omega(s) = \varphi(s,\cdot)\ z\frac{d}{dz},$$

где $\varphi(s,\cdot)$ - произвольным (измеримым) образом зависящая от s, $s\in[0,\infty)$, аналитическая функция в круге $\mathbb{D}$, для которой $\varphi(s,0)\equiv1$, $\mathrm{Re}\varphi(s,z)\ge0$, $|z|<1$. Крайними точками множества $\Xi(s)$ будут операторы $\dfrac{1+\zeta z}{1-\zeta z}z\dfrac{d}{dz}$, $\zeta\in\mathbb{T}=\{\zeta\in\mathbb{C}: |\zeta|=1\}$, а множество Ξ будет состоять из соответствующих (постоянных) функций $\Omega(s,\zeta)\equiv\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}z\frac{d}{dz}$, $s\ge0$ ($\zeta\in\mathbb{T}$); в последних двух строках (и ниже) роль буквы ζ слегка изменилась, теперь $\mathfrak{Z}$ - это множество, параметризующее множество крайних точек, но это не должно вести к недоразумению. В дополнение к сказанному в предыдущем абзаце здесь можно обнаружить еще одну важную структуру: *все экстремальные функции* $\Omega(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathbb{T}$, *унитарно эквивалентны*. Именно, $\Omega(s,\zeta)=u(\zeta)\Omega(s,1)u(\zeta)^*$, $\zeta\in\mathbb{T}$, где $(u(\zeta)f)(z)=f(\zeta z)$ при $|z|<1$, $f\in\mathcal{G}$. Это обстоятельство, без сомнения, довольно существенно, ибо помогает „правильному" назначению базовых плотностей $g(\cdot,\zeta)=g_\Omega(\cdot,\zeta)$, упомянутых в п. I111: дело в том, что уравнений „на точность" (I119) всё еще слишком много (даже если мы ограничиваемся экстремальными эволюциями $\Omega\in\Xi_{ex}$) и упомянутые плотности не могут быть несогласованными. Разумная точка зрения: одна плотность $g(\cdot,1)$ назначается, и тогда из (I119) находится оператор-функция σ; остальные плотности $g(\cdot,\zeta)$ определяются из уравнений (I119) - если заданы $\Omega(\cdot,\zeta)$ и σ, то из уравнения однозначно восстанавливается функция $x(\cdot,\zeta)$, а тогда (см. (I112)) и функция $g(\cdot,\zeta)$.

Результатом этих рассуждений является следующее правило (алгоритм) построения неравенств, которое и составит по существу основное содержание гл. С.

I130. Построение неравенств методом хронологического усреднения. Алгоритм состоит из следующих шагов.

(I131) Выбирается множество $\mathfrak{Z}$ (измеримое пространство) и семейство $\{u(\zeta)\}$ унитарных операторов в пространстве H, измеримым образом зависящее от ζ, $\zeta\in\mathfrak{Z}$.

(I132) Выбираются оператор-функция $s\longmapsto\Omega_0(s)$ (пусть, для простоты, суммируемая), $\mathrm{Re}\Omega_0(s)\ge\mathbb{O}$, $a\le s\le b$, вектор-функция x_0 и положительный оператор σ_0, $\sigma_0\in L(H)$.

(I133) Из уравнения $(\sigma x_0)'+\Omega_0^*\sigma x_0\equiv0$, $\sigma(a)=\sigma_0$, находится оператор-функция σ, перестановочная со всеми $u(\zeta)$:

$$u(\zeta)\sigma(s)=\sigma(s)u(\zeta)\quad\text{при всех } s \text{ и } \zeta.$$

(I134) Проверяется условие $\Lambda_0(s)\overset{\text{def}}{=}\sigma'(s)+2\mathrm{Re}[\sigma(s)\Omega_0(s)]\ge\mathbb{O}$, $a\le s\le b$.

(I135) З а к л ю ч е н и е: пусть $s\longmapsto\Omega(s)$, $a\le s\le b$ - измеримая оператор-функция с условием

$$\Omega(s)\in\operatorname{conv}\{u(\zeta)\Omega_0(s)u(\zeta)^*:\ \zeta\in\mathfrak{Z}\},\qquad a\le s\le b$$

(замкнутая выпуклая оболочка), и пусть μ_s - вероятностные меры на $\mathfrak{Z}$, для которых

$$\Omega(s)=\int_{\mathfrak{Z}}u(\zeta)\Omega_0(s)u(\zeta)^*d\mu_s(\zeta),\qquad a\le s\le b;\tag{I136}$$

пусть эволюционное семейство T_{rs} отвечает производящему оператору Ω, $g_0=\Omega x_0-x_0'$, и

$$g(s)=\int_{\mathfrak{Z}}u(\zeta)g_0(s)d\mu_s(\zeta),\qquad a\le s\le b;\tag{I137}$$

тогда для векторов

$$x(r) = T_{rt}x(t) + \int_r^t T_{rs}g(s)ds, \qquad a \le r \le t \le b, \tag{I138}$$

имеют место неравенства

$$\|x(r)\|_r^2 - \|x(t)\|_t^2 \le \| \int_r^t T_{rs}\, g(s)ds\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})} \le \|x_0(r)\|_r^2 - \|x_0(t)\|_t^2, \tag{I139}$$

где $\|\cdot\|_r=\|\cdot\|_{\tau(r)^{-1}}$. В случае $\Omega = \Omega(\cdot,\zeta) \overset{\text{def}}{=} u(\zeta)\Omega_0 u(\zeta)^*$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, эти неравенства обращаются в равенства.

Существование решения σ, перестановочного со всеми $u(\zeta)$, упомянутое в (I133), равно как и единственность такого решения, разумеется, имеют место лишь при определенных условиях на операторы $u(\zeta)$; см. об этом п. C90–C110. Условие (I134) является по существу центральным во всей цепочке рассуждений и существенно зависит от начального условия $\sigma(a)=\sigma_0$.

I140. Расслоение меры $d\mathcal{E}_r=T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs}ds$, обещанное в п. I120, не требует выполнения всех условий (I131)-(I134). В оценке (I139) интеграл по расслоенной мере присутствует лишь неявно: поскольку генераторы эволюций $\Omega(\cdot,\zeta)$ получаются действием набора унитарных операторов $u(\zeta)$, этот интеграл вычисляется через заданную „изометрическую траекторию" x_0.

Если же не предполагать, что операторы $\Omega(s,\zeta)$ имеют вид „унитарной орбиты" $u(\zeta)\Omega_0(s)u(\zeta)^*$, то и требования типа (I133) для соответствующих траекторий $x(\cdot,\zeta)$ (т.е. требования точности для них основного неравенства (I115)) уже не помогают упрощению правой части неравенства. В этом случае можно воспользоваться лишь общей конструкцией „расслоения меры" $d\mathcal{E}_r = \int_{\mathfrak{Z}} T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s,\zeta))T^*_{rs}d\mu_s(\zeta)ds$, развитой в гл. B (см. также п. I150). Именно, считая эволюционный коэффициент Ω заданным формулой (I123), а функции $g(\cdot,\zeta)$ - произвольными, положим

$$g(s) = \int_{\mathfrak{Z}} g(s,\zeta)d\mu_s(\zeta),$$

и рассмотрим решение (I138) уравнения $x'=\Omega x-g$. Если при этом при всех ζ, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, выполнено условие

$$\Lambda(s,\zeta) \overset{\text{def}}{=} \sigma'(s) + 2\mathrm{Re}[\sigma(s)\Omega(s,\zeta)] \ge 0, \qquad a \le s \le b,$$

то

$$\|x(r)\|_r^2 - \|x(t)\|_t^2 \le \int_r^t \int_{\mathfrak{Z}} \|g(s,\zeta)\|^2_{\Gamma(s,\zeta)}d\mu_s(\zeta)\, ds, \tag{I141}$$

где $\Gamma(s,\zeta)=\sigma(s)^{-1}\Lambda(s,\zeta)^{1/2}$.

I150. Дифференциальные уравнения. Хронологический интеграл. Теперь стоит объяснить название раздела I130. На самом деле, в нем и в предшествующих ему разделах речь идет об оценке решения дифференциального уравнения

$$x' = \Omega x - g, \quad a \le s \le b; \tag{I151}$$

которому удовлетворяет (и которым определяется) функция (I138):

$$\|x(r)\|_r^2 - \|x(b)\|_t^2 \le \int_r^t \|g(s)\|_{\Gamma(s)}^2 ds, \quad a \le r \le t \le b.$$

Отметим, что эта оценка решений дифференциального уравнения $x'=\Omega x-g$ является „индивидуальной" в том смысле, что она не получается из (по-видимому, более грубых) оценок норм эволюционного семейства $\|T_{rt}\|$, а выражена непосредственно через генератор Ω. Интересно было бы использовать ее в теории устойчивости, сравнив с известными результатами Р. Беллмана и др.; см., например, [6], гл. III, особенно раздел „Задачи и дополнения".

Уравнение „на точность" (I119) соотносит (при фиксированном σ) каждой эволюции T_{rs} (т. е. каждой функции Ω, $\mathrm{Re}\Omega\ge\mathbb{O}$) единственную траекторию x и, значит, единственное управление g (откликом системы на которое и является траектория x) такие, для которых имеет место формула (I118); тогда, кстати, тот же закон сохранения действует и вдоль всей траектории, т. е.

$$\|x(r)\|_r^2 - \|x(b)\|_b^2 = \int_r^b \|g(s)\|_{\Gamma(s)}^2 ds, \quad a \le r \le b.$$

Из таких „изометрических" (см. подробнее гл. С) траекторий $x(\cdot,\zeta)$, отвечающих эволюционным семействам $\Omega(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, в п. I130 строятся траектории, порождаемые общей эволюцией Ω с условием (I136). Они определяются формулой (I138), которая, как было уже вскользь отмечено, на самом деле, включается в общую конструкцию расслоения меры $d\mathcal{E}_r(s)=T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T_{rs}^*ds$ на составляющие $d\mathcal{E}_r(s,\zeta)=T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s,\zeta))T_{rs}^*ds$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$:

$$d\mathcal{E}_r(s) = \int_{\mathfrak{Z}} (d\mathcal{E}_r(s,\zeta))d\mu_s(\zeta), \quad r \le s \le b. \tag{I152}$$

Финальное неравенство (I141) получается просто подстановкой этого конкретного случая в общую лемму о расслоении меры, см. п. В84–В90, где нужно положить $v_1(s)=T_{rs}$, $v_2(s)=\Gamma(s)$, $u_1(s,\zeta)=I$, $u_2(s,\zeta)=\Gamma(s,\zeta)$.

В случае дифференциального уравнения (I151) в отличие от расслоения общей меры можно сказать несколько больше и разложить эволюционное семейство T_{rs}, определяющее решение x по формуле (I138) в специфический мультипликативный интеграл семейств $T_{rs}(\zeta)$, определяемых коэффициентами $\Omega(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$. Этот интеграл строится аналогично уже упоминавшемуся мультипликативному интегралу, но роль „частичных произведений" $(T_{rs})_n$ играют хронологические произведения эволюционных семейств $T_{rs}(\delta_i)$, отвечающих разбиению $\{\delta_i\}$ множества $\mathfrak{Z}$:

$$\frac{\partial T_{rs}(\delta_i)}{\partial r} = \Omega(s,\delta_i)T_{rs}(\delta_i), \qquad \Omega(s,\delta_i) = \int_{\delta_i} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta),$$

$$(T_{rs})_n = T_{rs}(\delta_1) \circledast T_{rs}(\delta_2) \circledast \dots \circledast T_{rs}(\delta_n) ,$$

где $\circledast$ - знак хронологического произведения эволюционных семейств, см. об этом п. С130-С200. Таким образом, можно написать символическую формулу

$$T_{rs} = \int_{\mathfrak{Z}} \circledast\, T_{rs}(\zeta)^{\circledast d\mu_s(\zeta)} , \qquad r \le s \le b,$$

которая вместе с упомянутым выше расслоением (I152) дает разложение решения (I138) по „изометрическим" траекториям $x(\cdot,\zeta)$ и в каком-то смысле объясняет неравенство (I141).

Описание результатов части 2[4]

I160. Оценки однолистных функций. Речь идет об оценках коэффициентов Тейлора $\hat{f}(k)$ однолистных (т.е. аналитических и взаимно-однозначных) функций f, составляющих известный в геометрической теории функций класс S,

$$S = \{ f\colon f \text{ однолистна в } \mathbb{D},\ f(z) = z + \sum_{k\ge2} \hat{f}(k)z^k \}.$$

Общая (и не решенная) задача состоит в описании подмножества $\mathbb{C}^{n-1}$, пробегаемого первыми n коэффициентами функций из S: $\{(\hat{f}(2),\dots,\hat{f}(n))\colon f\in S\}$. В качестве приближения к решению этой „проблемы коэффициентов" рассматривают оценки модулей коэффициентов или различных выражений, составленных из коэффициентов. В ч. 2 этой работы будет показано, как техника операторного интегрирования (и квазиортогональных разложений) позволяет получать некоторые такие оценки.

Исходной точкой для оценок, которые мы получим (равно, как и многих других оценок), является следующий известный „принцип подчинения" (субординации): из двух аналитических в круге $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$ функций та „больше", которая отображает $\mathbb{D}$ на большую область. Если, например, $f(\mathbb{D})\supset g(\mathbb{D})$ и f однолистна, то $g(z)=f(B(z))$, где B аналитична в $\mathbb{D}$, и $|B|\le1$, а в общем случае возможность такого представления (вместе с требованием $B(0)=0$) принимают за *определение подчинения* одной функции другой и пишут $g\prec f$. Если $g\prec f$, то, как известно (см., например, [4]),

$$\| g \| \le \| f \| \tag{I161}$$

для многих норм $\|\cdot\|$, в частности, для норм пространств Харди H^p, $0<p\le\infty$, и для всех весовых ℓ^2-норм $\|f\|_{\ell^2(w_n)} = (\sum_{n\ge1} |\hat{f}(n)|^2 w_n)^{1/2}$ с условием убывания $w_n\downarrow$. Эти утверждения также называют принципом субординации Литтлвуда.

---

[4]Вторая часть работы будет опубликована в одном из ближайших выпусков журнала.

Для однолистных функций B класс норм, для которых имеет место оценка (I161), существенно расширяется и включает, например, все весовые ℓ^2-нормы с условием $\frac{w_n}{n}\downarrow$. В частности, для однолистных функций B, $B(0)=0$, неравенство (I161) верно для пространства функций с конечным интегралом Дирихле:

$$\mathcal{G} = \{\ f\colon\ f(z) = \sum_{n\ge1} \hat f(n)z^n, \qquad \|f\|_{\mathcal{G}} = \sum_{n\ge1} n|\hat f(n)|^2 < \infty\ \},$$

$$\|f\circ B\|^2_{\mathcal{G}} \le \|f\|^2_{\mathcal{G}}, \qquad f\in\mathcal{G}.$$

Более того, верно и аналогичное „индефинитное неравенство"

$$\|f\circ B\|^2_{I\mathcal{G}} \le \|f\|^2_{I\mathcal{G}}\ , \qquad f\in I\mathcal{G}, \tag{I162}$$

$I\mathcal{G}$ есть унитарное пространство всех мероморфных функций $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k)z^k$ с $\sum_{k>0} k|\hat f(k)|^2<\infty$, снабженное индефинитным скалярным произведением $\langle f,g\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\hat f(k)\overline{\hat g(k)}$. На самом деле, неравенство (I162) *характеризует* однолистные функции: если функция B голоморфна в $\mathbb{D}$, $B(0)=0$ и имеет место (I162), то B однолистна. Это - теорема де Бранжа [25], [26], восходящая к известным описаниям однолистных функций в терминах квадратичных форм (Грунский, Голузин, Нехари; сб. об этом [4], [34]).

I170. Уравнение Лёвнера - средство вычисления квазиразложений. Итак, следуя подходу де Бранжа, мы будем смотреть на однолистные функции B как на операторы подстановки $C\colon\ f \longmapsto f\circ B$ в пространстве $\mathcal{G}$, а для получения оценок (уповая на „принцип субординации") использовать упорядоченные цепи таких функций $B_1\prec B_2\prec\ldots\prec B_n\equiv z$ и технику квазиразложений, построенную в ч. 1. Рассмотрим сразу „непрерывный" вариант теории.

Пусть $\{G_s\colon 0\le s<\infty\}$ - семейство вложенных односвязных подобластей единичного круга, содержащих точку 0:

$$\mathbb{D} = G_0 \supset G_r \supset G_s, \qquad r\le s.$$

Пусть A_s - конформные отображения круга $\mathbb{D}$ на области G_s, нормированные условиями $A_s(0)=0$, $\left.\frac{\partial A_s}{\partial z}\right|_{z=0} > 0$. (С точностью до замены параметра можно считать, что $\left.\frac{\partial A_s}{\partial z}\right|_{z=0} = e^{-s}$, $s>0$.) Тогда равенство

$$C_s f = f\circ A_s, \qquad f\in\mathcal{G},$$

определяет цепь сжатий пространства $\mathcal{G}$, причем

$$\|C_s f\|^2 = \frac{1}{\pi}\iint_{G_s} |f'|^2\,dxdy \le \frac{1}{\pi}\iint_{G_r} |f'|^2\,dxdy = \|C_r f\|^2$$

при $s\le r$. Таким образом, $C_s^*C_s \le C_r^*C_r$, и можно рассмотреть соответствующее эволюционное семейство C_{rs}^*, определяемое равенством $C_s^*=C_r^*C_{rs}^*$, $r\le s$. Операторы C_{rs}^*, разумеется, сопряжены некоторым операторам подстановки: $C_{rs}f=f\circ A_{rs}$, где A_{rs} -

однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ в себя, определяемое тождеством

$$A_s = A_r \circ A_{rs}.$$

По некоторым (не вполне нам понятным) причинам для оценок однолистных функций удобнее использовать не эволюцию $\{C^*_{rs}\}$, но *дуальную эволюцию*, т. е., фиксировав произвольную точку $b>0$, рассмотреть эволюцию $\{T_{rs}\}_{0\le r\le s\le b}$, где

$$T_{rs} = C_{b-s,b-r}, \qquad 0 \le r \le s \le b.$$

Положим

$$B_{rs} = A_{b-s,b-r}.$$

Тогда $\{T_{rs}\}_{0\le r\le s\le b}$ - сжимающее эволюционное семейство операторов подстановки в пространстве $\mathcal{G}$ с производящим оператором

$$\Omega(s) = \varphi(s,\cdot)z\frac{d}{dz},$$

где $\varphi(s,\cdot)$ - аналитические в $\mathbb{D}$ функции с положительной вещественной частью,

$$\mathrm{Re}\ \varphi(s,z) \ge 0,\ |z|<1;\ \varphi(s,0) \equiv 1. \qquad (1172)$$

Уравнения (189) принимают вид

$$\frac{\partial B_{rs}}{\partial r} = \varphi(r,\cdot)z\frac{\partial B_{rs}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial B_{rs}}{\partial s} = -B_{rs}\varphi(s,B_{rs}) \qquad (1173)$$

и называются в этом случае *уравнениями Лёвнера*; они играют заметную роль в геометрической теории функций и обычно выводятся из других соображений, см. [4], [32], [34]. Мы же можем здесь заметить, что если встать на точку зрения операторного интегрирования, происходящего из принципа субординации Литтлвуда, то уравнения Лёвнера появляются принудительно при отыскании плотности соответствующей меры $d(T^*_{rs}T_{rs})$ и являются основным средством к явному вычислению всех квазиразложений, связанных с этой мерой.

Семейства однолистных функций B_{rs}, удовлетворяющие уравнениям (1173) (или, что то же, тождеству $B_{rt}=B_{st}\circ B_{rs}$ как следствию эволюционного тождества $T_{rt}=T_{rs}T_{st}$, $r\le s\le t$), называются *цепями Лёвнера*. Обратно, если задано (измеримое по s) семейство функций (1172), то, решая эволюционное уравнение (189) с $\Omega(s)=\varphi(s,\cdot)z\frac{d}{dz}$ по формуле (192), получим, как будет показано, операторы подстановки $T_{rs}f = f\circ B_{rs}$, $r\le s$. Эти операторы окажутся сжатиями пространства $I\mathcal{G}$, и, тем самым, функции B_{rs} будут однолистными.

1180. Весовые неравенства, хронологическое усреднение. Как уже было сказано, мы будем оценивать эволюционные семейства (в рассматриваемом случае - цепи Лёвнера) по их „действию", т.е. по „отклику" системы $x'=\Omega x-g$ на заданное управление g. Сделаем это по рецепту ч. 1: неравенство будет весовым, точным на заданном наборе траекторий и верным для всех цепей Лёвнера.

Всевозможным семействам Лёвнера $\{B_{rs}\}_{r,s\geq 0}$ соответствует выпуклое множество значений порождающих оператор-функций $\Xi = \{\ \Omega(s)=\varphi(s,\cdot)z\frac{d}{dz}\ :\ \operatorname{Re}\varphi(s,z)\geq 0,\ \ z\in\mathbb{D};\ \varphi(s,0)=1\}$, не зависящее от s, $s>0$, и компактное в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах круга $\mathbb{D}$. Крайними точками этого множества являются операторы $\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}z\frac{d}{dz}$, $\zeta\in\mathbb{T}$, которые получаются из оператора $\frac{1+z}{1-z}z\frac{d}{dz}$ действием унитарной группы вращений окружности:

$$u(\zeta)f = f(\zeta z), \qquad \zeta\in\mathbb{T}.$$

Таким образом, „экстремальные" эволюции (семейства Лёвнера) отвечают генераторам $\Omega(\cdot,\zeta)=u(\zeta)\Omega(\cdot,1)u(\zeta)^*$,

$$\Omega(s,1) = \Omega_0(s) \equiv \frac{1+z}{1-z}z\frac{d}{dz}\ , \qquad s \geq 0. \tag{I181}$$

Для использования формул хронологического усреднения (I136)-(I139) остается выбрать базовую „изометрическую" траекторию $x_0=x(\cdot,1)$ или, что то же, соответствующее управление $g_0=g(\cdot,1)$, которые и определят всё остальное: вид и запас функций, подлежащих квазиортогональному разложению и оценке; вид экстремальных функций, на которых неравенство обращается в равенство; и наконец – или, вернее сказать, в первую очередь весовую функцию σ, которая (вместе с g_0) определит и правую часть неравенства. Соответствующие весовые пространства $\mathcal{G}(s)$ задаются скалярным произведением $(x,y)_{\mathcal{G}(s)}=(\sigma(s)x,y)_{\mathcal{G}}$.

Рассмотрим простейший случай, когда „изометрические" траектории $x(\cdot,\zeta)$ постоянны: траектория $x(s,1)\equiv x_0$, $s\geq 0$, $x_0\in\mathcal{G}(s)$ назначается произвольно (что соответствует управлению $g(s,1) = g_0(s) \overset{\text{def}}{=} \Omega(s,1)x_0$), а остальные траектории определяются группой $u(\zeta)$: $x(\cdot,\zeta)=u(\zeta)x(\cdot,1)$ и

$$g(\cdot,\zeta) = u(\zeta)g(\cdot,1) = \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\zeta z x_0'(\zeta z), \qquad \zeta\in\mathbb{T}.$$

Оценке подлежит частное решение уравнения $x'=\Omega x-g$, которое для выбранных $\Omega(\cdot,\zeta)$ и $x(\cdot,\zeta)$ имеет вид

$$x_0(\zeta z) - x_0(\zeta B^{\zeta}_{rs}(z)),$$

где цепь Лёвнера B^{ζ}_{rs} соответствует „экстремальной" эволюции $T_{rs}(\zeta)$, $T_{rs}(\zeta)f=f\circ B^{\zeta}_{rs}$, и находится из уравнения

$$\frac{B^{\zeta}_{rs}}{(1+\zeta B^{\zeta}_{rs})^2} = \frac{e^{r-s}z}{(1+\zeta z)^2}$$

(это уравнение встречается и в вычислениях де Бранжа [23],[24]).

Общая цепь Лёвнера B_{rs} отвечает общему генератору Ω вида (I171), который по теореме Герглотца может быть представлен интегралом

$$\Omega(s) = \int_{\mathbb{T}} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta),$$

где μ_s - вероятностные меры на окружности $\mathbb{T}$, измеримым образом зависящие от параметра s. По формулам (I138),(I139) оцениваться будет решение $r \longmapsto$ $\longmapsto x(r)-T_{rt}x(t)$, $0\le r\le t\le b$, которое мы *обозначим символом* $y(r,t)$; здесь $T_{rt}=f\circ B_{rt}$, а B_{rt} находятся из уравнений (I173). Окончательно,

$$y(r,t) = \int_r^t \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\zeta B_{rs}}{1-\zeta B_{rs}} B_{rs}\zeta x_0'(\zeta B_{rs})d\mu_s(\zeta)ds \ , \tag{I182}$$

$$\|y(r,t)\|^2_{\mathcal{G}(r)} \le \|y(r,t)\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})} \le \sum_{n\ge1} n|\hat{x}_0(n)|^2(\sigma_n(r)-\sigma_n(t)). \tag{I183}$$

I190. Уравнения де Бранжа определяют изометрические траектории. Напомним, что уравнение (I119), которое отвечает за точность неравенства (I183), используется для того, чтобы подобрать вес σ, сохраняющий сжимаемость эволюции T_{rs}, имеющий предписанное начальное значение $\sigma(0)$ и превращающий неравенство КБШ в равенство на заданном семействе функций $x(\cdot,\zeta)$. При наличии унитарной (в данном случае круговой) симметрии ($u(\zeta)\sigma(s)=\sigma(s)u(\zeta)$ при всех s и ζ) весовые операторы будут диагональными $\sigma(s)=\mathrm{diag}\{\sigma_n(s)\}_{n\ge1}$, а уравнение (I119) перепишется в виде системы уравнений

$$\sigma_n'\hat{x}_0(n) - \sigma_{n+1}'\hat{x}_0(n+1) + n\sigma_n\hat{x}_0(n) + (n+1)\sigma_{n+1}\hat{x}_0(n+1) = 0, \qquad n\ge1. \tag{I191}$$

Эти уравнения мы будем называть *обобщенными уравнениями де Бранжа*. При заданных $\sigma_n(0)$ эти уравнения однозначно определяют $\sigma(s)$, $s\ge0$.

I200. Последнее препятствие. Матрицы Якоби. Согласно общей теории, неравенство (I183) имеет место при условии положительности оператора $\Lambda_0(\cdot)=\Lambda(\cdot,1)$:

$$\Lambda_0(s) = \Lambda(s,1) = \sigma'(s) + 2\mathrm{Re}\sigma(s)\Omega(s,1) \ge \mathbb{O}, \qquad s\ge0.$$

В базисе из собственных векторов оператора $\mathrm{Re}\Omega(s,1)$ квадратичная форма $(\Lambda x,x)_{\mathcal{G}}$ определяется матрицей Якоби

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_2 & 0 & 0 & \mathbb{O} \\ \mu_2 & \lambda_2 & \mu_3 & 0 & \\ 0 & \mu_3 & \lambda_3 & \mu_4 & \\ \mathbb{O} & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mu_n &= -\sigma_n'/n, \\ \lambda_n &= \sigma_n'/n + \sigma_{n+1}'/n{+}1 + 2(\sigma_n-\sigma_{n+1}). \end{aligned} \tag{I201}$$

Спектр матриц Якоби, как известно, можно вычислять разными способами, например, через нули соответствующих ортогональных полиномов или как предельное множество полюсов аппроксимаций Падэ, некоторыми другими способами. Считая вес σ оператором конечного ранга ($\sigma_k\equiv0$, $k>n$), мы используем простейший критерий

Сильвестра и рекуррентную формулу для определителей матриц $\mathcal{J}_k$,

$$\mathcal{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \mu_{n+1} & & & \mathbb{O} \\ \mu_{n+1} & \lambda_{n+1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu_n \\ \mathbb{O} & & & \mu_n & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Именно, полагая $\det\mathcal{J}_k/\det\mathcal{J}_{k+1} = \tau_k$, $1 \le k \le n$, $(\det\mathcal{J}_{n+1} \overset{\text{def}}{=} 1)$, получим формулу для отыскания всех τ_k, начиная с $\tau_n=\lambda_n$:

$$\tau_{k-1} = \lambda_{k-1} - \frac{\mu_k^2}{\lambda_k}, \qquad k = n, n-1, \dots, 2. \tag{I202}$$

(Заметим, что эта формула дает разложение $\tau_{n-1},\dots,\tau_1$ в непрерывные дроби). Условие положительности $\det\mathcal{J}_k>0$, $1 \le k \le n$, равносильно условию $\tau_k>0$, $1 \le k \le n$.

Окончательное вычисление проделывается в нескольких частных случаях.

I210. Уравнения де Бранжа. Оценка функции $\log\frac{f(z)}{z}$, $f\in S$. Здесь полагаем $x_0=-2\log(1+z)$. Тогда уравнения (I191) превращаются в *уравнения де Бранжа*

$$\frac{\sigma_k'}{k} + \frac{\sigma_{k+1}'}{k+1} + \sigma_k - \sigma_{k+1} = 0, \qquad k \ge 1,$$

причем оказывается $\tau_k=-\sigma_k'/k$. Таким образом, условие применимости метода $(\Lambda(\cdot,1)\ge\mathbb{O})$ равносильно семейству неравенств $\sigma_k' < 0$, $1 \le k \le n$ для функций σ_k, удовлетворяющих уравнениям де Бранжа. Как известно (см. [19],[23],[26]), после явного вычисления функция σ_k сводится к некоторой сумме полиномов Якоби и оказывается положительной, если начальные данные $\sigma_k(0)$ образуют выпуклую последовательность (т.е. $\sigma_k(0)-\sigma_{k+1}(0) \ge \sigma_{k+1}(0)-\sigma_{k+2}(0)$, $k=1,2,\dots,n$).

Прямое вычисление элемента $y(r,s)$ по формуле (I182) дает

$$y(r,s) = \log\frac{B_{rs}}{zB'_{rs}(0)},$$

а неравенство (I183) превращается в

$$\left\|\log\frac{B_{rs}}{zB'_{rs}(0)}\right\|^2_{\mathcal{G}(r)} \le 4\sum_{n\ge1}\frac{\sigma_n(r)-\sigma_n(s)}{n}.$$

Это - известное неравенство де Бранжа [23],[26], из которого при $r = 0$, $s \longrightarrow +\infty$ стандартным приемом получается оценка для всего класса S

$$\left\|\log\frac{f(z)}{z}\right\|^2_{\mathcal{G}(0)} \le 4\sum_{k\ge1}\frac{\sigma_k(0)}{k}, \qquad f\in S, \tag{I211}$$

а отсюда (при $\sigma_k(0)=n-k+1$, $1\le k\le n$; $\sigma_k(0)=0$, $k>n$) - доказательство гипотезы Милина (а значит, и гипотез Робертсона и Бибербаха; см. об этом [11],[29]).

I220. Малые размерности: $n=2$ $(\sigma_k=0, k>2)$. Здесь можно позволить себе большую свободу и просчитать оценку (I183) для любой постоянной (т.е. не зависящей от s) базовой „изометрической" траектории x_0, а не только для $x_0=-2\log(1+z)$. Среди весов σ, удовлетворяющих обобщенному уравнению де Бранжа (I191), находятся все допустимые, т.е. подчиненные лишь условию $\Lambda_0\geq\mathbb{O}$. В результате получается однопараметрическое семейство оценок первых двух коэффициентов $\hat{f}(2)$ и $\hat{f}(3)$ произвольной функции класса S

$$|\hat{f}(3)-\lambda\hat{f}(2)^2|^2 \leq \begin{cases} (4\lambda-3)^2+2(1-\lambda)(4-|\hat{f}(2)|^2), & \lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq\frac{3}{4}, \\ \frac{1}{3}\ (4-|\hat{f}(2)|^2), & \lambda=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

I230. Другая точка зрения. Как видно из предыдущего и как уже было отмечено, основная трудность в использовании весовых квазиразложений состоит в проверке условия $\Lambda(s)\geq\mathbb{O}$ или, если пользоваться приемом мультипликативного усреднения, базового условия $\Lambda_0(s)\geq\mathbb{O}$. Поэтому представляется естественной следующая процедура, которая во главу угла и ставит как раз это последнее неравенство.

Итак, *начинаем с выбора* (диагонального) *веса* σ такого, что

$$\Lambda_0(s) = \sigma'(s) + 2\mathrm{Re}\sigma(s)\Omega_0(s) \geq \mathbb{O}, \qquad r\leq s\leq t. \tag{I231}$$

Рассматривая эволюции $T_{rs}(\zeta)$, соответствующие генераторам $\Omega(\cdot,\zeta)=u(\zeta)\Omega_0u(\zeta)^*$, и мультипликативно усредняя получающиеся неравенства, приходим к оценке (I141). Результат вполне аналогичен предыдущему, за исключением утверждения о „точности" этого неравенства, поскольку уравнения (I119) теперь не выполняются. Приведем два примера, иллюстрирующих эту более общую точку зрения.

I232. Постоянный вес: $\sigma_n'(s)\equiv 0$, $n=1,2,\ldots$ В этом случае условие (I231) равносильно монотонности весовой последовательности, $\sigma_n\geq\sigma_{n+1}(n\geq1)$, а подсчет правой части неравенства (I106) дает

$$\|\log\frac{B_{rs}}{zB'_{rs}(0)}\|^2_{\mathcal{G}(r)} \leq \|\log\frac{B_{rs}}{zB'_{rs}(0)}\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(s)}_{\sigma(r)}(T_{rs})} \leq 2\sigma_1(s-r).$$

Этот случай другим способом рассмотрен в [35].

I233. Другой источник вывода уравнений де Бранжа – это уравнения для вычисления $\det\mathcal{J}_k$. Снова начинаем с проверки условия $\Lambda_0\geq\mathbb{O}$, но воспользуемся формулами (I201),(I202). Считая, что множители τ_k *линейно* зависят от σ *и* σ', получим уравнения, необходимые и достаточные (при сделанном предположении) для положительности Λ_0:

$$2\sigma_k + \frac{\sigma_k'}{k\rho_k} = 2\sigma_{k+1} - \frac{\sigma'_{k+1}}{(k+1)(1-\rho_{k+1})}, \qquad k\geq1,$$

где $\rho_k=\rho_k(s)$ – (произвольные) измеримые функции с условием $0\leq\rho_k(s)\leq1$. В окончательном неравенстве (вида (I211)) правая часть вычислена в терминах ρ_k,σ_k и базовой траектории x_0. Этот случай (по-видимому, другим способом) рассмотрен в [26].

I240. Уравнения де Бранжа-Ровняка. Оценка функций $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\nu}$, $f\in S$. Изложенная схема может быть использована не только для операторов композиции. Рассмотрим, например, эволюционные семейства T_{rs}, дуальные семействам C_{rs},

$$C_{rs}f = \left(\frac{B_{rs}}{zB'_{rs}(0)}\right)^{\nu}(f\circ B_{rs}),$$

где $\nu\in\mathbb{R}$ и B_{rs} удовлетворяют уравнениям Лёвнера. Семейство T_{rs} удовлетворяет эволюционному уравнению с генератором

$$\Omega_{\nu}(s) = \Omega(s) + \nu(\varphi(s,\cdot)-1),$$

где Ω определяется формулой (I171). Выбирая базовую изометрическую траекторию в виде $x_0=\nu^{-1}((1+z)^{-2\nu}-1)$, приводим уравнение (I191) к виду

$$\frac{n}{n+\nu}\,(\sigma'_n+n\sigma_n) + \frac{2\nu+n}{n+\nu+1}\,[\sigma'_{n+1} -(n+1+2\nu)\sigma_{n+1}] = 0.$$

Опуская подробности, приведем окончательное неравенство

$$\left\| \frac{\left(\frac{f}{z}\right)^{\nu} - 1}{\nu} \right\|^2_{\mathcal{G}(0)} \le 4\sum_{k\ge1} k\sigma_k(0)\left(\frac{\Gamma(k+2\nu)}{k!\,\Gamma(2\nu+1)}\right)^2, \qquad f\in S,$$

которое превращается в равенство для функций $u(\zeta)x_0$, $\zeta\in\mathbb{T}$, и является одним из основных результатов работ [24], [35].

ЧАСТЬ 1. КВАЗИРАЗЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА А. ДИСКРЕТНЫЕ КВАЗИРАЗЛОЖЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

А10. Дискретные цепи. Рассмотрим цепь вложенных гильбертовых пространств H_k:

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_n \supset H_{n+1} = \{\mathbb{O}\}.$$

Как уже было упомянуто во Введении, п. I30, пространства H_k можно считать образами сжимающих операторов T_k: $H_k=T_kH$ с соответствующими range-нормами: $\|\cdot\|_{H_k}=\|\cdot\|_{T_k}$. Также было отмечено, что операторы T_k допускают факторизацию

$$T_{k+1} = T_kT_{k,k+1},\quad T_{k,k+1}\in L(H),\quad \|T_{k,k+1}\| \le 1.$$

В дальнейшем мы предполагаем, что $T_0=I$, $T_{n,n+1}=\mathbb{O}$.

А20. Обозначения. Пусть $1\le k\le n+1$, и $\ell^2_k(H)$ - пространство вектор-столбцов y, $y = \{y_j\colon 0\le j\le k-1\}$, $y_j\in H$, $\|y\|^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \|y_j\|^2$. Определим семейство операторов V_k, действующих из $\ell^2_k(H)$ в H, следующим равенством

$$V_k y = \sum_{j=0}^{k-1} T_j D_{T^*_{j,j+1}} y_j \ .$$

Сопряженные операторы V_k^* действуют из H в $\ell^2_k(H)$ по формуле

$$V_k^* x = \{D_{T^*_{j,j+1}} T_j^* x \ : \ 0 \le j \le k-1\}.$$

А30. Л е м м а.

$$D^2_{T^*_k} = V_k V_k^* = \sum_{j=0}^{k-1} T_j D^2_{T^*_{j,j+1}} T_j^* \ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводим по индукции. При $k=1$ утверждение очевидно: $D^2_{T^*_1} = D^2_{T^*_{01}} = V_1 V_1^*$. Проверим возможность индукционного перехода:

$$V_{k+1}V^*_{k+1} = V_k V_k^* + T_k \ D^2_{T^*_{k,k+1}} T_k^* = D^2_{T^*_k} + T_k(I-T_{k,k+1}T^*_{k,k+1})T_k^* =$$

$$= I - T_k T_k^* + T_k T_k^* - T_{k+1}T^*_{k+1} = D^2_{T^*_{k+1}} . \qquad \bullet$$

А40. С л е д с т в и е. V^*_{n+1} - *изометрический оператор.* $\bullet$

А50. С л е д с т в и е. *Операторы* V_k *допускают факторизацию*

$$V_k = D_{T^*_k} \ \Phi_k \ , \tag{A51}$$

где Φ_k – *частично изометрические операторы с* $\mathrm{Ker}\Phi_k = \mathrm{Ker}V_k$ и $\mathrm{Range}\Phi_k = = \mathrm{clos\ Range}D^2_{T^*_k}$. $\bullet$

А60. С л е д с т в и е. *Для любого набора векторов* y_k, $0 \le k \le n$, *справедливо неравенство*

$$\| \sum_{k=0}^{n} T_k D_{T^*_{k,k+1}} y_k \|^2 \le \sum_{k=0}^{n} \| \ y \ \|^2 \ , \tag{A61}$$

которое обращается в равенство в том и только в том случае, когда существует вектор x *такой, что* $y_k = D_{T^*_{k,k+1}} T^* \ x$. *В этом случае* $x = \sum_{k=0}^{n} T_k^* D_{T^*_{k,k+1}} y_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (А61) - это просто оценка $\|V_{n+1}y\|^2 \le$ $\le \| \ y \ \|^2$ для коизометрического оператора V_{n+1} и вектора y, $y = \{y_k : 0 \le k \le n\}$. Ясно, что для обращения этого неравенства в равенство, т.е. для изометричности оператора V_{n+1} на векторе y, необходимо и достаточно, чтобы $y \in \mathrm{Range}V^*_{n+1}$, т.е. $y = V^*_{n+1}x$ для некоторого x, $x \in H$. Или, другими словами, чтобы $y_k = D_{T^*_{k,k+1}} T_k^* x$. В силу изометричности оператора V^*_{n+1} имеет место равенство $x = V_{n+1}V^*_{n+1}x = V_{n+1}y = \sum_{k=0}^{n} T_k D_{T^*_{k,k+1}} y_k$. $\bullet$

А70. С л е д с т в и е. *Если* T – *сжимающий оператор в* H *и* $y_1, y_2 \in H$, *то*

$$\|D_{T^*}y_1 + Ty_2\|^2 \le \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 \tag{A71}$$

Равенство имеет место в том и только в том случае, когда $y_1 = D_{T^*}x$, $y_2 = T^* x$ *при некотором* x, $x \in H$. *Такой вектор* x *единственен*, $x = D_{T^*}y_1 + Ty_2$. $\bullet$

А80. Обсуждение. Неравенство (А71) - частный случай следствия А60, когда вся цепь состоит из единственного оператора $T_1=T$, т.е. когда $n=1$. Этот случай заслуживает упоминания, так как из него непосредственно следует *существование пространства, дополнительного пространству* TH: переходя в (А71) к нижней грани по всем представлениям $x_1=Ty_2$, $x_2=D_{T*}y_1$, получим оценку

$$\|x_1+x_2\|^2 \le \|x_1\|_T^2 + \|x_2\|_{D_{T*}}^2 \tag{A81}$$

Возможность равенства отмечена в самом следствии, причем любой вектор x, $x\in H$, допускает разложения вида $x = x_1+ x_2 = Ty_2+D_{T*}y_1$, среди которых есть единственное „экстремальное", при котором в (А81) достигается равенство: $y_1=D_{T*}\ x$, $y_2=T^*x$, $x= =T(T^*x)+D_{T*}(D_{T*}x)$, $\|\ x\ \|^2 = \|\ T^*x\ \|^2 + \|\ D_{T*}x\ \|^2 = \|\ TT^*x\ \|_T^2 + \|\ D_{T*}^2\ x\ \|_{D_{T*}}^2$.

Это означает по определению (I11)-(I14), что пространство $D_{T*}H$ является дополнительным пространству TH.

Единственность дополнительного пространства следует фактически из формулы (I15), которая, на самом деле, очевидна и которая в рассматриваемом случае ($H_1=TH$) может быть записана как

$$\|\ h\ \|_{H_2}^2 = \sup\{\|\ h + Tx\ \|^2 - \|\ x\ \|^2 : x\in H\}, \tag{A82}$$

где символом H_2 обозначено (какое-нибудь) пространство, дополнительное пространству TH. Для доказательства единственности, проверим сначала, что множество $\mathcal{H}_2$ всех векторов h, для которых конечен sup в правой части равенства (А82), совпадает с $D_{T*}H$. Включение $D_{T*}H \subset \mathcal{H}_2$ - это неравенство (А71). Противоположное включение содержится в лемме 6.6 работы [33], но здесь мы приведем другое доказательство, основанное на естественном наводящем соображении: следствие А70 показывает, что для векторов h вида $h = D_{T*}^2y$ верхняя грань в правой части (А82) достигается при $x = T^*y = T^*D_{T*}^{-2}\ h$; но поскольку оператор D_{T*} не обратим и мы не знаем, имеет ли смысл выражение $D_{T*}^{-2}\ h$, заменим этот „обратный" оператор его регуляризацией, т.е. рассмотрим семейство векторов $x = x_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} T^*(D_{T*}^2+\varepsilon I)^{-1}h$, $\varepsilon>0$. Тогда

$$\|\ h + Tx_\varepsilon\ \|^2 - \|\ x_\varepsilon\ \|^2 = \|\ (D_{T*}^2 + \varepsilon I)(D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-1}h + Tx_\varepsilon\ \|^2 - \|\ x_\varepsilon\ \|^2 =$$

$$= \|(1 + \varepsilon)(D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-1}h\|^2 - \|T^*(D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-1}h\|^2 = ((1+\varepsilon)^2 I - TT^*)(D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-2}h,h) =$$

$$= ((D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-1}h,h) + \varepsilon(1+\varepsilon)((D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-2}h,h) \ge ((D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-1}h,h).$$

Итак, по условию, $\sup\limits_{\varepsilon>0}((D_{T*}^2 + \varepsilon I)^{-1}h,h) < \infty$. Это означает, что $h\in D_{T*}H$. Включение $\mathcal{H}_2\subset D_{T*}H$, а с ним и равенство $\mathcal{H}_2=D_{T*}H$ доказаны.

Далее, в силу (А82) H_2 есть замкнутое подпространство пространства $D_{T*}\ H=\mathcal{H}_2$. Теперь для произвольного $x, x\in H$, рассмотрим два его экстремальных разложения $x = =x_1+ x_2$, $x_i\in H_i$, и $x = TT^*x + D_{T*}^2x$. Так как (широкое) пространство $D_{T*}H$ является дополнительным к $TH=H_1$, то $D_{T*}^2x = x_2 \in H_2$. Отсюда $D_{T*}^2H \subset H_2 \subset D_{T*}H$. Но D_{T*}^2H плотно в $D_{T*}H$ (относительно range-нормы), что и завершает доказательство единственности: $H_2=D_{T*}H$. ●

А90. Обозначение. Как уже было отмечено в п.130, пространство TH с range-нормой будем обозначать, следуя де Бранжу, символом $\mathcal{M}(T)$, а дополнительное (комплементарное) пространство - символом $\mathcal{H}(T)$. Таким образом,

$$\mathcal{H}(T) = \mathcal{M}(D_{T*}).$$

Иногда бывает полезно знать, в каких случаях точная верхняя грань в (А82) достигается, т.е. *когда* sup *превращается в* max. Запишем вектор h в виде $h = D_{T*}g$ и будем считать, что $\|h\|_{\mathcal{H}(T)} = \|g\|$ (т.е. что $g \perp \mathrm{Ker}D_{T*}$). Тогда интересующий нас вопрос равносилен существованию вектора $f\in H$, для которого

$$\| g \|^2 = \| D_{T*}g + Tf \|^2 - \| f \|^2,$$

а это, как мы видели в А70, бывает тогда и только тогда, когда $g = D_{T*}x$ при некотором x, $x\in H$, т.е. когда $h = D^2_{T*}x$.

Зафиксируем установленный факт в виде следующей леммы.

А100. Л е м м а. *Точная верхняя грань в* (А82) *достигается тогда и только тогда, когда* $h\in D^2_{T*}H$. ●

А110. Когда комплементарное разложение является прямым? Другими словами, вопрос состоит в отыскании условий, при которых квазиразложение $H = \mathcal{H}(T)+\mathcal{M}(T)$ является разложением пространства H в *прямую сумму* указанных слагаемых, т.е. каждый вектор x, $x\in H$, допускает единственное представление вида $x = D_{T*}y_1+Ty_2$ (и это представление автоматически оказывается экстремальным в отмечавшемся выше смысле). Нетрудно видеть, что это может иметь место лишь в тривиальном случае изометрического вложения $\mathcal{M}(T) \subset H$, т.е. только если оператор T является частично изометрическим. Проверим это простое утверждение, придав ему следующую форму.

А115. Л е м м а. *Пусть T - сжатие, действующее в некотором гильбертовом пространстве* (*или из одного такого пространства в другое*). *Следующие утверждения равносильны.*

(А116) $\mathrm{Range}D_{T*} \cap \mathrm{Range}T = \{\mathbb{O}\}$.

(А117) $\mathrm{Range}D_{T*} \perp \mathrm{Range}T$.

(А118) *Оператор T частично изометричен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathrm{Range}D_{T*} \cap \mathrm{Range}T = \{\mathbb{O}\}$, то оператор $D_{T*}T=TD_T$ должен быть нулевым, поскольку его образ содержится в данном пересечении. Но условие $TD^2_T=T-TT^*T=\mathbb{O}$ означает, что операторы T^*T и TT^* являются ортопроекторами, т.е. T - частично изометрический оператор. Итак, (А116) $\Longrightarrow$ (А118).

Далее, если T - частично изометрический оператор, то TT^* и D_{T*} суть проекторы на взаимно ортогональные подпространства, откуда $\mathrm{Range}D_{T*} \perp \mathrm{Range}TT^*=\mathrm{Range}T$, т.е. (А118)$\Longrightarrow$(А117).

Импликация (A117)$\Longrightarrow$(A116) очевидна. $\bullet$

A120. Первая форма квазиразложения относительно заданной цепочки пространств $H_k = \mathrm{Range}T_k$ является по существу небольшим уточнением следствия A60 и получается тем же способом, но с учетом равенства $\mathcal{H}(T) = D_{T^*}H$ и формулы (A51). Оставляя полную формулировку до п. A140, A180, ограничимся сейчас следующим утверждением.

A121. Лемма. *Пусть* $0 \le m \le n$. *Для любого семейства векторов* $y = \{y_k : 0 \le k \le m\}$ *вектор* x,

$$x = \sum_{k=0}^{m} T_k D_{T^*_{k,k+1}} y_k ,$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}(T_{m+1})$ *и*

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_{m+1})} \le \sum_{k=0}^{m} \|D_{T^*_{k,k+1}} y_k\|^2_{\mathcal{H}(T_{k,k+1})} \le \sum_{k=0}^{m} \|y_k\|^2. \qquad \text{(A122)}$$

Эти неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $y \perp \mathrm{Ker}V_{m+1}$, *или другими словами, когда* $y \in \mathrm{Range}\Phi^*_{m+1}$, *где* Φ_{m+1} *– частично изометрический оператор из формулы* (A51).

Доказательство. Используя A50, оцениваем норму вектора $x = V_{m+1}y$ так же, как в следствии A60:

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_{m+1})} = \|D_{T^*_{m+1}} \Phi_{m+1} y\|^2_{\mathcal{H}(T_{m+1})} = \|\Phi_{m+1} y\|^2 \le \|y\|^2.$$

Для обращения этого неравенства в равенство необходимо и достаточно, чтобы $y \perp \mathrm{Ker}\Phi_{m+1} = \mathrm{Ker}V_{m+1}$.

Левое неравенство в (A122) получается отсюда по определению range-нормы: $\|D_{T^*_{k,k+1}} y_k\|_{D_{T^*_{k,k+1}}} = \min\{\|h\| : D_{T^*_{k,k+1}} h = D_{T^*_{k,k+1}} y_k\}$. $\bullet$

Полученное утверждение, как мы сейчас увидим, нетрудно интерпретировать как разложение пространства $\mathcal{H}(T_{m+1})$ в квазиортогональную сумму промежуточных комплементарных пространств $\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})$ (определение ниже), но сначала мы установим одну формулу для этих последних.

A125. Обозначение. Пусть S и T - сжатия в гильбертовых пространствах такие, что $\mathcal{M}(S) \subset \mathcal{M}(T)$. Пространство, комплементарное в $\mathcal{M}(T)$ пространству $\mathcal{M}(S)$, обозначим символом $\mathcal{H}(T,S)$.

A130. Лемма. *Если сжатия* A *и* B *таковы, что произведение* AB *имеет смысл, то* $\mathcal{M}(AB) \subset \mathcal{M}(A)$ *и*

$$\mathcal{H}(A, AB) = A\mathcal{H}(B).$$

Кроме того, если j *– естественное вложение* $\mathcal{M}(AB) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$, *то оператор* D_{B^*} *в существенном (на ортогональном дополнении к* $\mathrm{Ker}\ A$*) сплетается оператором* A *с* *оператором* D_{j*}, *точнее,*

$$D_{j*}\; A = AD_{B*}\; V, \tag{A131}$$

где V – *частичная изометрия в каноническом полярном разложении* $D_{B*}P_{(\mathrm{Ker}A)^{\perp}}=$ $=V|D_{B*}P_{(\mathrm{Ker}A)^{\perp}}|$.

Доказательство. То, что тождественное вложение $j: \mathcal{M}(AB)\longrightarrow\mathcal{M}(A)$ действительно является сжимающим, было отмечено во Введении, но мы проверим это еще раз: если $g\perp \mathrm{Ker}AB$, то

$$\|jABg\|_A = \|ABg\|_A = \|P_{(\mathrm{Ker}A)^{\perp}}Bg\| \le \|g\| = \|ABg\|_{AB},$$

т.е. $\|j\|\le 1$.

Проверим теперь, что оператор j^* действует по формуле

$$j^*\;:\; Af \longmapsto ABB^*f, \qquad f\perp \mathrm{Ker}\; A. \tag{A132}$$

Для вектора g, $g\perp\mathrm{Ker}AB$ напишем цепочку равенств:

$$(j^*Af, ABg)_{AB}=(Af, jABg)_A=(Af, ABg)_A=(f, Bg)=(B^*f, g)=(ABB^*f, ABg)_{AB},$$

из которой и следует формула (A132). Эту формулу можно переписать в виде

$$j^*A = ABB^*P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}},$$

откуда вытекает тождество

$$D^2_{j*}A = A - jj^*A = A - ABB^*P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}} = AD^2_{B*}P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}} = A|D_{B*}P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}}|^2$$

или

$$D_{j*}\; A = A|D_{B*}\; P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}}|. \tag{A133}$$

Пусть, как сказано в формулировке леммы, V – частичная изометрия в полярном разложении оператора $D_{B*}P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}}$, тогда

$$|D_{B*}P_{(\mathrm{Ker}A)^{\perp}}| = V^*D_{B*}P_{(\mathrm{Ker}A)^{\perp}} = P_{(\mathrm{Ker}A)^{\perp}}D_{B*}V.$$

Подставляя это выражение в (A133), получаем искомую формулу (A131).

Еще раз напомним, что $\mathcal{M}(AB) \subsetneq \mathcal{M}(A)$ для любых сжатий A и B, поэтому

$$\mathcal{H}(A,AB) = D_{j*}(AH) = (AD_{B*})VH \subsetneq AD_{B*}H = A\mathcal{H}(B), \tag{A134}$$

здесь H – пространство, из которого действует оператор A.

С другой стороны, используя то, что оператор $I-VV^*$ является ортопроектором на ядро $\mathrm{Ker}(P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}}D_{B*})$, получаем

$$AD_{B*}VV^* = A(P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}}D_{B*})VV^* = A(P_{(\mathrm{Ker}\;A)^{\perp}}D_{B*}) = AD_{B*}\;,$$

и, следовательно,

$$A\mathcal{H}(B) = AD_{B^*}H = (AD_{B^*}V)V^*H \subset AD_{B^*}VH = D_{J^*}AH = \mathcal{H}(A,AB)\ . \tag{A135}$$

Вложения (A134) и (A135) и дают требуемое равенство (включая равенство соответствующих норм)

$$\mathcal{H}(A,AB) = A\mathcal{H}(B). \qquad \bullet$$

A140. Теорема. *Пусть $T_{k,k+1}$ – сжатия гильбертова пространства H, $T_0=I$, и $T_k=T_{0,1}\cdot T_{1,2}\cdot\ldots\cdot T_{k-1,k}$ $(k=1,2\ldots)$. Тогда*

$$\mathcal{H}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} T_k\mathcal{H}(T_{k,k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{H}(T_k, T_{k+1})\ , \tag{A141}$$

в том смысле, что любой вектор x, $x\in\mathcal{H}(T_n)$, допускает разложение

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k, \qquad x_k = T_kD_{T^*_{k,k+1}}y_k\ , \tag{A142}$$

и любой вектор x вида (A142) лежит в пространстве $\mathcal{H}(T_n)$, причем справедлива оценка нормы

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_n)} \le \sum_{k=0}^{n-1}\|x_k\|^2_{\mathcal{H}(T_k,T_{k+1})} \le \sum_{k=0}^{n-1}\|y_k\|^2. \tag{A143}$$

Каждому вектору x из $\mathcal{H}(T_n)$ отвечает единственное представление (A142), для которого (A143) превращается в равенство; при этом если $x\in D^2_{T^*_n}H$, т.е. $x=D^2_{T^*_n}f$, $f\in H$, то это экстремальное разложение задается векторами $y_k=D_{T^*_{k,k+1}}T^*_kf$.

Доказательство. То, что любой вектор x вида (A142) лежит в пространстве $\mathcal{H}(T_n)$, было выведено в следствии A121 вместе с неравенством

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T_n)} \le \sum_{k=0}^{n-1}\|y_k\|^2. \tag{A144}$$

Обратно, если $x\in\mathcal{H}(T_n)$, то $x=D_{T^*_n}h$ при некотором h таком, что $h\perp\mathrm{Ker}D_{T^*_n}=\mathrm{Ker}\Phi^*_n$ (см. следствие A50), т.е. $\Phi_n\Phi^*_nh=h$. Поэтому $x = D_{T^*_n}h = D_{T^*_n}\Phi_n\Phi^*_nh = V_ny$, где $y=\Phi^*_nh\in\ell^2_n(H)$. Итак, $x \in \sum_{k=0}^{n-1} T_k\mathcal{H}(T_{k,k+1})$, и равенства (A141) доказаны.

Далее, чтобы получить левое неравенство из (A143), нужно, как и в A121, перейти в (A144) к точной нижней грани по всем представлениям векторов x_k,

$$\|x_k\|_{T_k\mathcal{H}(T_{k,k+1})} = \inf\ \{\|y_k\| : x_k = T_kD_{T^*_{k,k+1}}y_k\},$$

и воспользоваться леммой A130.

В следствии A121 приведено необходимое и достаточное условие равенства в (A143). Для этого нужно, чтобы $y=\Phi^*_nh$ для некоторого h, $h\in H$, т.е. чтобы $x = V_ny = V_n\Phi^*_nh = D_{T^*_n}\Phi_n\Phi^*_nh = D_{T^*_n}h$, что и справедливо для любого вектора x из $\mathcal{H}(T_n)$.

Если же $x=D^2_{T^*_n}f$, то $h=D_{T^*_n}f$ и $y = \Phi^*_nD_{T^*_n}f = V^*_nf$, т.е. $y_k=D_{T^*_{k,k+1}}T^*_kf$. $\bullet$

A145. Другой подход к доказательству теоремы A140 (и всей конструкции этой главы) мог бы состоять в следующем. Отыскав формулу для $\mathcal{H}(T)$ и доказав лемму A130, нетрудно вывести такое утверждение: если A, B, C - сжатия и $AA^* \geq BB^* \geq CC^*$, то имеет место квазиразложение

$$\mathcal{H}(A,C) = \mathcal{H}(A,B) + \mathcal{H}(B,C) \tag{A146}$$

в том смысле, что пространства из правой части этого равенства сжимающим образом вложены в $\mathcal{H}(A,C)$ и являются в нем взаимно дополнительными. В частном случае $A=I$, $B=T$, $C=\mathbb{O}$, равенство (A146) превращается в квазиразложение

$$H = \mathcal{H}(T) + \mathcal{M}(T).$$

Затем, используя (A146), можно простой индукцией получить теорему A140. Мы предпочли более формальное изложение, так как оно содержит некоторые дополнительные детали и составляет содержательную аналогию (основному) случаю непрерывных квазиразложений (гл. B и C).

A150. Замечание о прямой сумме. Проверим, что квазиразложение (A141) превращается в прямую сумму векторных пространств $\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})$ в том и только в том случае, когда

$$\mathcal{H}(T_k) \cap \mathcal{H}(T_k,\ T_n) \tag{A151}$$

При этом условии каждый вектор $x, x \in \mathcal{H}(T_n)$, допускает единственное разложение (A142), которое автоматически оказывается экстремальным.

Действительно, поскольку по теореме A140

$$\mathcal{H}(T_k, T_m) = \sum_{i=k+1}^{m} \mathcal{H}(T_{i-1}, T_i), \quad k < m,$$

и, в частности, $\mathcal{H}(T_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{H}(T_i, T_{i+1})$, $\mathcal{H}(T_k, T_n) = \sum_{i=k}^{n-1} \mathcal{H}(T_i, T_{i+1})$, то условие (A151) равносильно тому, что при любом k, $1 \leq k \leq n-1$, разбиение вектора x на два слагаемых

$$x = x' + x'', \qquad x' \in \mathcal{H}(T_k), \quad x'' \in \mathcal{H}(T_k, T_n), \tag{A152}$$

может быть произведено лишь одним способом. А значит, и все члены x_i в разложении (A142), которое при любом k, $1 \leq k \leq n-1$, можно интерпретировать как разложение (A152) с $x' = \sum_{i=0}^{k-1} x_i$, $x'' = \sum_{i=k}^{n-1} x_i$, определены однозначно в том и только в том случае, когда выполнено (A151). ●

Отметим еще, что условие (A151) может быть переписано в виде

$$\mathcal{H}(T_k^*) \cap \mathcal{H}(T_{k,n}) \subset \operatorname{Ker} T_k, \qquad k < n.$$

Это вытекает из следующей леммы.

A160. Л е м м а. *Пусть A, B - сжатия, причем B действует в то гильбертово пространство, где определен оператор A. Тогда равносильны следующие утверждения.*

(A161) $\mathcal{H}(A) \cap A\mathcal{H}(B) = \{\mathbb{O}\}$, (A162) $\mathcal{H}(A^*) \cap \mathcal{H}(B) \subset \mathrm{Ker}A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathcal{H}(A) \cap A\mathcal{H}(B) \ne \{\mathbb{O}\}$, то найдутся такие векторы x, y, что $D_{A^*}x = AD_{B^*}y \ne \mathbb{O}$. И поскольку

$$D_{B^*}y = (D_A^2 + A^*A)D_{B^*}y = D_A^2 D_{B^*}y + A^*D_{A^*}x = D_A(D_A D_{B^*}y + A^*x),$$

то $D_{B^*}y \in \mathcal{H}(A^*) \cap \mathcal{H}(B)$. Но вектор y выбран так, что $AD_{B^*}y \ne \mathbb{O}$, т.е. $D_{B^*}y \notin \mathrm{Ker}A$ и, следовательно, $\mathcal{H}(A^*) \cap \mathcal{H}(B) \not\subset \mathrm{Ker}A$.

Обратно, если $\mathcal{H}(A^*) \cap \mathcal{H}(B) \not\subset \mathrm{Ker}A$, то найдется вектор $h = D_A f = D_{B^*}g$, $Ah \ne \mathbb{O}$. Но

$$Ah = AD_A f = D_{A^*}Af \in \mathcal{H}(A^*),$$

$$Ah = AD_{B^*}g \in A\mathcal{H}(B),$$

т.е. $\mathcal{H}(A^*) \cap A\mathcal{H}(B) \ne \{\mathbb{O}\}$. ●

A170. Квазиортогональные ряды. Бесконечное семейство (последовательность) вложенных пространств H_k, $H_k \supset H_{k+1}$, $k \ge 0$, приводит к квазиразложению наибольшего из них $H = H_0$ в ряд промежуточных комплементарных пространств. Почти все, что связано с такими квазиразложениями, можно получить, положив чисто формально $n = \infty$ в изложенной выше схеме. Поэтому мы сделаем лишь несколько кратких замечаний. Пусть сжатия T_k таковы, что $H_k = \mathcal{M}(T_k)$ (включая равенство норм); тогда, как и раньше, $T_k T_k^* \ge T_{k+1}T_{k+1}^*$ и $T_{k+1} = T_k T_{k,k+1}$, где $\|T_{k,k+1}\| \le 1$. Равномерная ограниченность операторов V_k, определенных в A20 (все они суть сжатия), позволяет рассматривать и сжатие $V = V_\infty$, действующее из $\ell^2(H)$ в H по формуле

$$Vy = \sum_{j \ge 0} T_j D_{T^*_{j,j+1}} y_j, \qquad y = \{y_j \colon j \ge 0\} \in \ell^2(H),$$

при этом

$$V^*h = \{D_{T^*_{j,j+1}} T_j^* h \colon j \ge 0\}, \qquad h \in H.$$

Написанный ряд сходится в пространстве H. Модуль $|V^*|$ оператора V^*, $|V^*| = (VV^*)^{1/2}$, будучи положительным сжатием, $\mathbb{O} \le |V^*| \le I$, определяет (неоднозначно) сжатие $T, T \in L(H)$, по формуле

$$D_{T^*} = |V^*|. \tag{A171}$$

Другими словами, $TT^* = D_{V^*}^2$; разумеется, положительный оператор T с таким свойством единствен. Рассматривая полярное разложение оператора V^*, $V^* = \Phi^* D_{T^*}$, как и в следствии A50, получим факторизацию оператора V: $V = D_{T^*}\Phi$, где Φ – частичная изометрия с $\mathrm{Ker}\Phi = \mathrm{Ker}V$ и $\mathrm{Range}\Phi = \mathrm{clos\ Range}D_{T^*}$. Далее мы можем *дословно повторить* доказательство теоремы A140, положив в нем $n = \infty$, $T_n = T$, $V_n = V$, $\Phi_n = \Phi$. Это приводит к следующему варианту теоремы A140, который, ввиду полной аналогии, мы приведем в сокращенной формулировке.

A180. Т е о р е м а. *В обозначениях теоремы* A140 *дополнительное пространство*

$\mathcal{H}(T)$, *отвечающее оператору* T *из* (A171), *разлагается в квазиортогональный ряд гильбертовых пространств*

$$\mathcal{H}(T) = \sum_{k\ge 0} T_k\mathcal{H}(T_{k,k+1}) = \sum_{k\ge 0}\mathcal{H}(T_k,T_{k+1}),$$

причем ряды $\sum_{k\ge 0} x_k$, $x_k\in\mathcal{H}(T_k,T_{k+1})$ *сходятся в пространстве* $\mathcal{H}(T)$, *как только* $\sum_{k\ge 0}\|x_k\|^2_{\mathcal{H}(T_k,T_{k+1})} < \infty$ *и*

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T)} \le \sum_{k\ge 0}\|x_k\|^2_{\mathcal{H}(T_k,T_{k+1})} \le \sum_{k\ge 0}\|y_k\|^2$$

(*последнее неравенство использует запись слагаемых* x_k *в виде* $x_k=T_kD_{T^*_{k,k+1}}y_k$, $y_k\in H$). *Для каждого* $x, x\in\mathcal{H}(T)$, *существует и единственно* „*экстремальное*" *разложение* (*неравенства превращаются в равенства*), *причем для плотного в* $\mathcal{H}(T)$ *множества векторов вида* $x = D^2_{T^*}f$ *это будет как раз при* $y_k= D_{T^*_{k,k+1}}T^*_kf$, $k\ge 0$.

Некоторого пояснения требует разве лишь утверждение о сходимости рядов по норме пространства $\mathcal{H}(T)$. Но так как оператор V является сжатием из $\ell^2(H)$ в $\mathcal{H}(T)$, остается только добавить, что координатные проекторы P_n в $\ell^2(H)$, $P_ny=(y_0,y_1,\dots,y_n,\mathbb{O},\dots)$, сильно сходятся к I: $\lim_n \|P_ny-y\|_{\ell^2} = 0$. ●

A190. Замечания. Из леммы A30, равенства $D^2_{T^*}= VV^*$ и только что упомянутой сходимости рядов следует, что $D^2_{T^*_n} \uparrow D^2_{T^*}$ (слабая, а потому и сильная сходимость, см. [17]). Если при этом $T_n\ge\mathbb{O}$, $T\ge\mathbb{O}$, то будет и (s)-$\lim T_n=T$ (т.е. $\lim_n\|T_nx-Tx\|=0$ $\forall x$). Без упомянутых условий положительности это, конечно, не так (пример: T_n= сдвиг направо на n единиц в пространстве ℓ^2; $T=\mathbb{O}$). При этом ясно, что $\mathcal{H}(T)$ как множество совпадает с H тогда и только тогда, когда оператор D_{T^*} обратим, и что $\mathcal{H}(T)=H$ (вместе с нормой) в единственном случае $T=\mathbb{O}$. Сформулируем это следующим образом.

A200. Следствие. *Каждый элемент пространства* H *допускает разложение в ряд по теореме* A180 (*т.е.* $\mathrm{Range}D_{T^*}=H$) *тогда и только тогда, когда* $\lim\|T^*_nx\| \le \varepsilon\|x\|, x\in H$, *при некотором* $\varepsilon, 0\le\varepsilon<1$. ●

A210. Следствие. $\mathcal{H}(T) = H \iff (s)\text{-}\lim T^*_n = \mathbb{O}$. ●

A220. Ряды Фурье и квазиразложения. Можно ли разложения Фурье рассматривать как частный случай квазиразложений? Этот вопрос мы рассмотрим в следующих нескольких разделах, а пока напомним основные определения. Семейство подпространств $\{X_k\}$ некоторого (скажем, банахова) пространства X называется минимальным, или топологически свободным, если

$$X_k \cap \mathrm{span}(X_j\colon\ j \ne k) = \{\mathbb{O}\}$$

при любом k. Это свойство равносильно непрерывности (при любом k) „спектрального проектора" $\mathcal{P}_k$ - оператора, определяемого на конечных суммах равенством

$$\mathcal{P}_k\left(\sum_j x_j\right) = x_k; \qquad x_j \in X_j.$$

Наличие проекторов $\mathcal{P}_k$ позволяет каждому вектору x, $x \in \operatorname{span}(X_k : k \ge 1)$ сопоставить формальный ряд Фурье

$$x \sim \sum_k \mathcal{P}_k x. \tag{A221}$$

Вопросы сходимости, скорости сходимости и т. д. таких рядов составляют важную часть спектральной теории операторов (когда X_k состоят, скажем, из собственных векторов оператора) и геометрии банаховых пространств. Если $\dim X_k = 1$ при всех k и $x_k \in X_k \setminus \{\mathbb{O}\}$, то проекторы $\mathcal{P}_k$ определяются семейством функционалов $\{f_k\}$, биортогональным семейству $\{x_k\}$: $(x_k, f_n) = \delta_{kn}$; а именно, тогда $\mathcal{P}_k = (\cdot, f_k)x_k$ и ряд Фурье записывается в стандартном виде

$$x \sim \sum_k (x, f_k) x_k.$$

Наконец, если X - гильбертово пространство, то все геометрические свойства семейства $\{x_k\}$ (быть минимальным, быть базисом, безусловным базисом и др.) определяются его матрицей Грама $\{(x_k, x_n)\}_{k,n}$. См. об этом, например, [12], [13].

Итак, рассмотрим (конечные или бесконечные) минимальные семейства подпространств (пусть $\{L_k\}$) гильбертова пространства H и попытаемся отождествить соответствующие разложения $H = \sum_k L_k$ с квазиразложениями из теорем A140, A180. Следующая лемма ставит определенные пределы таким попыткам.

A230. Лемма. *Пусть* $\{ L_k : 1 \le k \le n \}$ *- полное минимальное семейство подпространств. Тогда разложение*

$$H = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

может быть представлено в виде

$$H = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{H}(T_{k-1}, T_k)$$

для некоторой цепи сжатий T_k *(вместе с соответствующим равенством для норм) в том и только в том случае, когда семейство* $\{L_k\}$ *является ортогональным.*

Доказательство. Ясно, что для ортогонального семейства $\{L_k\}$ такая цепь существует. Можно, например, взять в качестве операторов T_k ортопроекторы на подпространства $\sum_{i=k+1}^{n} \oplus L_i$.

Теперь допустим, что $L_k = \mathcal{H}(T_{k-1}, T_k) = \mathcal{M}(T_{k-1} D_{T^*_{k-1,k}})$. Тогда для каждого вектора x из L_k найдется такой вектор h, что $\|h\| = \|x\|$ и $x = T_{k-1} D_{T^*_{k-1,k}} h$. Поэтому $0 = \|h\|^2 - \|x\|^2 =$ $= (\|h\|^2 - \|D_{T^*_{k-1,k}} h\|^2) + (\|D_{T^*_{k-1,k}} h\|^2 - \|T_{k-1} D_{T^*_{k-1,k}} h\|^2) = \|T^*_{k-1,k} h\|^2 + \|D_{T_{k-1}} D_{T^*_{k-1,k}} h\|^2$, т. е. нулю равны оба слагаемых. Следовательно,

$$h \in \operatorname{Ker} T^*_{k-1,k} , \tag{A231}$$

откуда вытекает, что $D_{T^*_{k-1,k}} h = h$, и поэтому

$$h \in \operatorname{Ker} D_{T_{k-1}} . \tag{A232}$$

Используя полученные включения, проверим, что $L_i \perp L_j$ при всех $i \neq j$. Для этого возьмем произвольные векторы x_i, $x_i \in L_i$, и такие h_i, которые удовлетворяют (A231) и (A232), и при этом $x_i = T_{i-1} D_{T^*_{i-1,i}} h_i = T_{i-1} h_i$. В силу (A232) $T^*_{i-1} T_{i-1} h_i = h_i$, поэтому, если $j > i$, то

$$(x_i, x_j) = (T_{i-1} h_i,\ T_{j-1} h_j) = (h_i,\ T_{i-1,j-1} h_j) = (T^*_{i-1,i} h_i,\ T_{i,j-1} h_j) = 0$$

согласно свойству (A231). Таким образом, $\{L_k\}$ - семейство взаимно ортогональных подпространств. ●

A240. Обсуждение. На первый взгляд предыдущая лемма не оставляет надежды на то, что неортогональные разложения можно интерпретировать как квазиразложения по дополнительным пространствам. Но на самом деле, это не так. Всё дело в том, что мы попытались разложить в сумму комплементарных пространств *всё* пространство H (с исходной нормой), зная, что при таком разложении (A142) квадрат нормы суммы будет обязательно (единственность) равен сумме квадратов норм слагаемых. Ясно, что ничего, кроме ортогональных разложений, таким способом получить нельзя. Мы, однако, добьемся нужного квазиразложения, изменив метрику в подпространствах L_k (и в пространстве H). Следующее утверждение показывает, что при таком взгляде на отождествление обсуждаемых разложений можно даже отказаться от условия минимальности.

A250. Л е м м а. *Пусть $\{L_k\}$ - произвольное семейство подпространств. Тогда найдутся семейство сжатий $\{v_k\}$ и цепь неотрицательных сжатий $\{T_k\}$ такие, что* $\operatorname{Range} v_k = L_k$ *и пространства $\mathcal{M}(v_k)$ совпадают с комплементарными пространствами, порожденными цепью $\{T_k\}$, т.е.*

$$\mathcal{H}(T_k, T_{k+1}) = \mathcal{M}(v_k). \tag{A251}$$

Кроме того,

$$\mathcal{H}(T) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{H}(T_k, T_{k+1}), \tag{A252}$$

где $T = T_n$, если рассматриваемое семейство конечно ($0 \leq k \leq n$) *и* $T = (s)\text{-}\lim T_k$, *если оно бесконечно. В любом случае*

$$D^2_{T^*} = \sum_{k \geq 0} v_k v^*_k . \tag{A253}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о начнем с того, что перепишем условие (A251) в виде

$$T_k D_{T^*_{k,k+1}} H = v_k H.$$

Для выполнения этих равенств необходимо и достаточно, чтобы

$$T_k D^2_{T^*_{k,k+1}} T^*_k = v_k v^*_k, \qquad k \geq 0, \tag{A254}$$

а эта последняя система уравнений равносильна (ввиду леммы A30) системе

$$D^2_{T^*_k} = \sum_{j=0}^{k-1} T_j D^2_{T^*_{j,j+1}} T^*_j = \sum_{j=0}^{k-1} v_j v^*_j, \qquad k\ge 1.$$

Для того чтобы все эти уравнения были разрешимыми, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\sum_{j\ge 0} v_j v^*_j$ был сжимающим (в частности, если семейство бесконечно, ряд должен сходиться). В этом случае мы можем положить

$$T_k = (I - \sum_{j=0}^{k-1} v_j v^*_j)^{1/2}, \qquad k\ge 1,$$

что обеспечивает равенство (A251). То, что операторы T_k образуют цепь, вытекает из неравенства

$$T^2_{k+1} = I - \sum_{j=0}^{k-1} v_j v^*_j - v_k v^*_k = T^2_k - v_k v^*_k \le T^2_k .$$

Квазиразложение (A252) следует теперь из теорем A140, A180, а существование предела $T = s\text{-}\lim T_k$ отмечено в A190. ●

A260. Замечание о бесселевых суммах. Квазиразложение вида (A251)-(A252) зависит фактически от операторов v_k, а не от T_k и $T_{k,k+1}$. В связи с этим будем говорить, что семейство линеалов $\mathrm{Range}\, v_i$, где v_i - некоторые ограниченные операторы, суммируемо по Бесселю, если ряд $\sum_{i\ge 0} v_i y_i$ сходится, как только $\sum_{i\ge 0} \|y_i\|^2<\infty$, а бесселевой суммой $(\mathrm{B})\sum_{i\ge 0} \mathrm{Range}\, v_i$ будем называть множество всех сумм таких рядов. В связи с леммой A250 отметим следующий простой факт: *если A - некоторый оператор, то* $\mathrm{Range} A \subset (\mathrm{B}) \sum_{i\ge 0} \mathrm{Range}\, v_i$ *тогда и только тогда, когда* $AA^* \le \mathrm{const} \sum_{i\ge 0} v_i v^*_i$ (и написанный ряд сходится); это утверждение немедленно получается, если к операторам A и $V\colon \ell^2(H)\longrightarrow H$, $Vy = \sum_{i\ge 0} v_i y_i$, применить уже цитированную лемму Дагласа [28], ($\mathrm{Range} A \subset \mathrm{Range} V \iff AA^* \le \mathrm{const}\ VV^*$, const>0).

В частности, $(\mathrm{B})\sum_{i\ge 0} \mathrm{Range}\, v_i = H \iff \sum_{i\ge 0} v_i v^*_i \ge \varepsilon I$ (и написанный ряд сходится), $\varepsilon>0$.

Вернемся теперь к минимальным семействам.

A270. Л е м м а. *Пусть $\{L_k\}$ - минимальное семейство подпространств, $\mathcal{P}_k$ - проектор на подпространство L_k параллельно подпространству* $\mathrm{span}\{L_i\colon i\ne k\}$. *Тогда для любого возможного выбора операторов v_k и T из предыдущей леммы имеет место соотношение*

$$\mathcal{P}_k D^2_{T^*} = v_k v^*_k . \tag{A271}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы проверить формулу (A271) достаточно применить оператор $\mathcal{P}_k$ к обеим частям равенства (A253) и учесть, что $\mathrm{Range}\, v_k = L_k$, т. е. $\mathcal{P}_i v_k = \delta_{ik} v_k$. ●

А280. Замечание. Если в случае минимального семейства подпространств оператор $V_k V_k^* D_{T*}^{-2}$ продолжается до ограниченного оператора на всем пространстве H (и совпадает с проектором $\mathcal{P}_k$), то в случае произвольного семейства оператор $V_k V_k^* D_{T*}^{-2}$ продолжается до сжатия в $\mathcal{H}(T)$, сопоставляющего вектору x его k-й член в экстремальном разложении (А142). Это по существу уже было получено при доказательстве теоремы А140. Действительно, как было указано, экстремальным для вектора $x=D_{T*}h$ является разложение $x=Vy$, где $y=\Phi^* h$, $V=D_{T*}\Phi$, т.е.

$$x = V\Phi^* h = V(V^* D_{T*}^{-1})D_{T*}^{-1}\, x = \sum_{i\geq 0} T_k D^2_{T^*_{k,k+1}} T_k^* \, D_{T*}^{-2}\, x. \qquad \bullet$$

А290. Т е о р е м а. *Пусть* $\{L_k\}$ *– минимальное семейство подпространств гильбертова пространства* H. *Существуют цепи сжатий* $\{T_k\}$ *такие, что на дополнительном пространстве* $\mathcal{H}(T)$, $T=\lim T_k$, *разложение Фурье* (А221) *совпадает с квазиразложением* $\mathcal{H}(T) = \sum_{k\geq 0} \mathcal{H}(T_k, T_{k+1})$. *Точнее, для любого вектора* $x, x\in\mathcal{H}(T)$, *его (единственное) квазиразложение в смысле теоремы* А180 *совпадает с его рядом Фурье* $\sum_{k\geq 0} \mathcal{P}_k x$, *который тем самым сходится в пространстве* $\mathcal{H}(T)$ *(и подавно – в исходном пространстве* H) *к вектору* x,

$$x = \sum_{k\geq 0} \mathcal{P}_k x \tag{A291}$$

и

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2_{\mathcal{H}(T)} = \sum_{k\geq 0} \|\mathcal{P}_k x\|^2_{\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})}. \tag{A292}$$

Обратно, сходимость ряда в (А292) *влечет* $x\in\mathcal{H}(T)$.

Если $\operatorname{span}\{L_k\colon k\geq 0\}=H$, *то* $D_{T*}H$ *плотно в* H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Цепь $\{T_k\}$ строится на основании леммы А250. Формулы (А254) и (А271) означают, что $\mathcal{P}_k x = x_k$, $k\geq 0$, для плотного в $\mathcal{H}(T)$ множества векторов x, $x\in \operatorname{Range} D^2_{T*}$ ($x \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geq 0} x_k$ – квазиразложение такого вектора из теоремы А180). Из (А292) следует, что тогда указанная формула справедлива и на всем $\mathcal{H}(T)$.

Остальное содержание теоремы ясно из описания квазиразложений (теорема А180). $\bullet$

А295. С л е д с т в и е. *В условиях теоремы* А290

$$x \in \mathcal{H}(T) \Longrightarrow \sum_{k\geq 0} \|\mathcal{P}_k x\|^2 \leq \|x\|^2_{\mathcal{H}(T)} < \infty$$

для любого выбора указанной в теореме последовательности $\{T_k\}$.

Это утверждение очевидно ввиду $\|\mathcal{P}_k x\| \leq \|\mathcal{P}_k x\|_{\mathcal{H}(T_k, T_{k+1})}$. $\bullet$

А300. С л е д с т в и е. *В условиях теоремы* А290 *для существования цепи* $\{T_k\}$ *такой, что* $\mathcal{H}(T)$ *(как множество) совпадает со всем пространством* H, *необходимо и* *достаточно, чтобы семейство* $\{L_k\}$ *было безусловным базисом в* H *(т.е. чтобы ряды* (A291) *сходились безусловно для любого* $x, x\in H$).

Действительно, если $\mathrm{Range}D_{T^*}=H$, то оператор D_{T^*} имеет ограниченный обратный. Пусть σ - произвольное подмножество натурального ряда, $\mathcal{P}_\sigma=\sum_{k\in\sigma}\mathcal{P}_k$. Согласно формуле (A271),

$$\mathcal{P}_\sigma = (\sum_{k\in\sigma} v_k v_k^*)D_{T^*}^{-2},$$

и поскольку

$$\sum_{k\in\sigma} v_k v_k^* \le D_{T^*}^2 \le I,$$

все операторы $\mathcal{P}_\sigma$ равномерно ограничены, т.е. $\{L_k\}$ - безусловный базис.

Обратно, пусть семейство $\{L_k\}$ образует безусловный базис, и пусть P_k - ортопроектор на подпространство L_k. Тогда (см. например, [13], с. 182, теорема о базисах Рисса) оператор J,

$$J : H \longrightarrow \ell^2(H), \qquad Jx = \{P_k x\},$$

является ограниченным и ограниченно обратимым. Положим $v_k=rP_k$, $k\ge 0$, т.е. $V=rJ^*$, где r таково, $\|V\|\le 1$. Тогда ограниченно обратимым будет и оператор

$$D_{T^*}^2 = r^2\sum_{k\ge 0} P_k = r^2 J^* J,$$

а следовательно, множество $D_{T^*}H$ совпадает со всем H. ●

A310. Заключительные замечания о базисах. Предыдущие утверждения показывают, что геометрия семейства гильбертовых пространств $\{v_i H\}$, снабженных range-нормами, определяется в основном оператором $D_{T^*}^2 = \lim_n D_{T_n^*}^2$ (в обозначениях леммы A250). К этому мы сделаем еще несколько замечаний.

A311. Оператор $D_{T^*}^2$ - своеобразная „матрица Грама" семейства $\mathfrak{B}=\{v_i H\}$. Напомним, что по формуле (A253) $D_{T^*}^2=\sum_{i\ge 0} v_i v_i^*$. Как и в A170, положим

$$V : \ell^2(H) \longrightarrow H, \qquad Vy = \sum_{i\ge 0} v_i y_i,$$

тогда $V^*x=\{v_i^* x: i\ge 0\}$ и $D_{T^*}^2=VV^*$. Если считать семейство $\mathfrak{B}$ полным в H (т.е. $\mathrm{closRange}V=H$), то в полярном разложении $V=\Psi|V|$ оператор Ψ будет коизометрическим, т.е. оператор $D_{T^*}^2=\Psi V^*V\Psi^*$ окажется унитарно эквивалентным существенной части „оператора Грама" V^*V (т.е. его сужению на ортогональное дополнение ядра $\mathrm{Ker}V$). Оператор V^*V задается в $\ell^2(H)$ матрицей $\{v_i^* v_k\}_{i,k\ge 0}$. Отметим уже упоминавшийся важный частный случай, когда можно выбрать $v_i=rP_i$, $P_i=P_{L_i}$. В этом случае $v_i H=L_i$, и оператор Грама семейства $\mathfrak{B}$ отличается лишь скалярным множителем от оператора Грама семейства подпространств $\{L_i\}$ пространства H, задаваемого матрицей $\{P_i P_k\}_{i,k\ge 0}$ (см., например, [13]).

A312. Количественная иллюстрация. Проиллюстрируем связь геометрии семейства

$\{L_i\}$ со свойствами построенного по ним оператора $D_{\mathrm{T}*}$ на двумерном примере. Пусть H – двумерное пространство, L_i – два одномерных подпространства, натянутые на единичные векторы f_i, расположенные под углом φ, т.е. $|(f_1,f_2)|=\cos\varphi$. Тогда процедура построения цепи, описанная в лемме А250, приводит к оператору

$$D^2_{\mathrm{T}*} = r_1^2(\cdot,f_1)f_1 + r_2^2\,(\cdot,f_2)f_2. \tag{A313}$$

Весь произвол – в выборе положительных чисел r_1 и r_2 с ограничением $\|D^2_{\mathrm{T}*}\|\le 1$. „Наилучшим", как уже говорилось, следует считать такой выбор цепи, при котором оператор $D^2_{\mathrm{T}*}$ возможно более близок к единичному. Мы выберем числа r_1 и r_2 так, чтобы норма оператора $D^{-2}_{\mathrm{T}*}$ была минимальной.

Собственные числа оператора (А313) равны

$$\lambda_\pm = (r\pm\sqrt{r^2-\sin^2\varphi}\,)r_1r_2\,,$$

где $r = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}\right) \ge 1$. Поскольку большее собственное значение λ_+ растет с ростом параметра r, а меньшее λ_- убывает, то „наилучшим" в нашем смысле выбором будет значение $r=1$, $\lambda_\pm=(1\pm\cos\,\varphi)r_1r_2$. Ограничение $\lambda_+\le 1$ дает максимальное значение параметра $r_1r_2=\dfrac{1}{1+\cos\varphi}$ и соответственно $\max\lambda_-=\dfrac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}=\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\varphi}{2}$.

Итак, среди всех операторов (А313) оператор

$$D^2_{\mathrm{T}*} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\Big[(\cdot,f_1)f_1 + (\cdot,f_2)f_2\Big]$$

имеет обратный с минимально возможной при данном расположении подпространств нормой $\|D^{-2}_{\mathrm{T}*}\| = \mathrm{ctg}^2\,\dfrac{\varphi}{2}$. ●

А314. Условные базисы. Язык квазиразложений можно использовать и для описания условных базисов из подпространств, но в этом случае он несколько утрачивает ясность, обнаруженную им, скажем, в следствии А300. Именно формула (А271) показывает, что спектральный проектор $\mathcal{P}_{\sigma_n}$, $\sigma_n=\{1,\dots,n\}$ (который образует частичные суммы ряда Фурье) задается формулой

$$\mathcal{P}_{\sigma_n}D^2_{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{n} v_k^*v_k = D^2_{\mathrm{T}^*_n}\,, \qquad n\ge 1.$$

Поэтому, *семейство подпространств $\{L_i\}$ образует базис* (может быть, условный) *тогда и только тогда, когда*

$$\|D^2_{\mathrm{T}^*_n}\,x\| \le \mathrm{const}\,\|D^2_{\mathrm{T}*}\,x\|, \qquad x\in H,$$

т.е. когда $D^4_{\mathrm{T}^*_n} \le \mathrm{const}\,D^4_{\mathrm{T}*}$. Напомним, что условие $D^2_{\mathrm{T}^*_n}\le D^2_{\mathrm{T}*}$ выполнено по определению $\left(D^2_{\mathrm{T}^*_n}\uparrow D^2_{\mathrm{T}*}\right)$.

А320. Операторные меры, порожденные сжимающими цепями. Имея в виду основной предмет следующей главы – непрерывные операторные цепи, полезно посмотреть на операторы $T_{k-1}D^2_{T^*_{k-1,k}}T^*_{k-1}$ как на нагрузки точечной операторной меры, помещенные, скажем, в целых точках, т. е. рассмотреть на промежутке $(0,\infty)$, меру $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}((r,s]) = \sum_{r<k\le s} T_{k-1}\, D^2_{T^*_{k-1,k}}\, T^*_{k-1} = T_{[r]}T^*_{[r]} - T_{[s]}T^*_{[s]} ,$$

здесь $[s]$ - целая часть числа s. Мера $\mathcal{E}$ сосредоточена в целых точках, полная мера полуоси равна $D^2_{T^*}$.

Согласно теореме Наймарка (см. например, [16]), у меры $\mathcal{E}$ (как у всякой меры с условием $\mathbb{O}\le\mathcal{E}(\delta)\le I$, $\forall\delta$) существует дилатация, т. е. такая операторная мера, скажем, $\hat{\mathcal{E}}$, значения которой суть ортогональные проекторы в некотором более широком гильбертовом пространстве $\hat{H}\supset H$ и компрессия которой на H совпадает с $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}=P_H\hat{\mathcal{E}}|H$. Стоит отметить, что в общепринятой формулировке теоремы Наймарка (в частности, в [16]) дополнительно требуется, чтобы полная мера $\mathcal{E}((0,\infty))$ совпадала с единичным оператором $I=I_H$, и тогда мера $\hat{\mathcal{E}}$ будет ортогональным разложением единицы в $\hat{H}$, т. е. в дополнение к сказанному выше, $\hat{\mathcal{E}}((0,\infty))=I_{\hat{H}}$. В нашем, чуть более общем случае ($\mathcal{E}((0,\infty))\ne I$, если $T\ne\mathbb{O}$), основная часть теоремы Наймарка сохраняется, но полная $\hat{\mathcal{E}}$-мера будет уже, вообще говоря, не единичным оператором, а некоторым ортогональным проектором в $\hat{H}$.

Разложение (A31), переписанное в следующем виде

$$D^2_{T^*} = D^2_{T^*_{01}} + T_{01}(D^2_{T^*_{12}} + T_{12}(D^2_{T^*_{23}} + T_{23}(\ldots)T^*_{23})T^*_{12})T^*_{01} ,$$

приводит к *явной конструкции дилатации* меры $\mathcal{E}$, содержащейся в следующей теореме.

A330. Т е о р е м а. *Пусть $\hat{H}=\ell^2(H)$ - пространство квадратично суммируемых H-значных последовательностей, j_0 - естественное вложение H в множество векторов $\{y: y_i=\mathbb{O}, i>0\}$, $P_0=j_0j_0^*$ - ортопроектор на это подпространство, S - оператор сдвига ($S(y_0,y_1,\ldots)=(\mathbb{O},y_0,y_1\ldots)$), $j_1=Sj_0$. Определим операторы*

$$A_k = j_0T_{k-1,k}j_0^* - j_1D_{T_{k-1,k}}j_0^* + S(I-P_0),\ B_k = j_0D_{T^*_{k-1,k}}j_0^* + j_1\, T^*_{k-1,k}j_0^*;$$

$$\hat{\mathcal{E}}_1 = B_1B_1^*;\quad \hat{\mathcal{E}}_2 = A_1B_2B_2^*\,A_1^*;\quad \hat{\mathcal{E}}_k = A_1A_2\ldots A_{k-1}B_kB_k^*A^*_{k-1}\ldots A_2^*A_1^*.$$

Тогда мера $\hat{\mathcal{E}}$, задаваемая нагрузками $\hat{\mathcal{E}}_k$ в целых точках, есть ортопроекторная мера, которая и будет дилатацией операторной меры $\mathcal{E}$ с нагрузками $\mathcal{E}_k = T_{k-1}D^2_{T^*_{k-1,k}}T^*_{k-1}$, т.е. $\mathcal{E}_k=j_0^*\hat{\mathcal{E}}_kj_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о, вероятно, будет нагляднее, если записать рассматриваемые операторы в матричном виде относительно стандартного базиса пространства $\ell^2(H)$:

$$A_k = \begin{pmatrix} T_{k-1,k} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ -D_{T_{k-1,k}} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ \mathbb{O} & I & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\quad I \\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \ddots \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} D_{T^*_{k-1,k}} & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ T^*_{k-1,k} & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\ldots\mathbb{O}\ldots \\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots \end{pmatrix}$$

Используя либо исходное определение операторов A_k, B_k, либо приведенную их матричную запись, нетрудно проверить соотношения

$$A_k^*A_k = I, \qquad B_k^*B_k = P_0, \qquad A_kA_k^* + B_kB_k^* = I, \qquad A_k^*B_k = \mathbb{O}.$$

Эти соотношения обеспечивают тождество

$$\hat{\mathcal{E}}_i\hat{\mathcal{E}}_j = \delta_{ij}\hat{\mathcal{E}}_j,$$

т.е. мера $\hat{\mathcal{E}}$ действительно является ортопроекторной. Для того чтобы убедиться, что она служит дилатацией меры $\mathcal{E}$, нужно использвать следующие очевидные равенства

$$j_0^*A_k = T_{k-1,k}\, j_0^*, \qquad j_0^*B_k = D_{T^*_{k-1,k}}\, j_0^*.$$

Действительно, используя обозначения

$$\overset{k}{\underset{j=1}{\overset{\curvearrowright}{\prod}}} A_j \overset{\text{def}}{=} A_1A_2\ldots A_k, \qquad \overset{k}{\underset{j=1}{\overset{\curvearrowleft}{\prod}}} A_j \overset{\text{def}}{=} A_kA_{k-1}\ldots A_1,$$

получим

$$j_0^*\left(\overset{k}{\underset{j=1}{\overset{\curvearrowright}{\prod}}} A_j\right) = \left(\overset{k}{\underset{j=1}{\overset{\curvearrowright}{\prod}}} T_{j-1,j}\right) j_0^* = T_k j_0^*\ .$$

Отсюда

$$j_0^*\,\hat{\mathcal{E}}_k j_0 = \left(j_0^* \overset{k-1}{\underset{j=1}{\overset{\curvearrowright}{\prod}}} A_j\right) B_kB_k^* \left(j_0^* \overset{k-1}{\underset{j=1}{\overset{\curvearrowleft}{\prod}}} A_j^*\right) = T_{k-1}j_0^*B_kB_k^*j_0T_{k-1}^* =$$

$$= T_{k-1}D_{T^*_{k-1,k}}\, j_0^*\, j_0\, D_{T^*_{k-1,k}}\, T_{k-1}^* = T_{k-1}D_{T^*_{k-1,k}}\, T_{k-1}^* = \mathcal{E}_k\ ,$$

что и завершает доказательство. •

ГЛАВА В. НЕРАВЕНСТВО КБШ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ МЕР И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

В10. Операторные меры. Переходя к общим квазиразложениям, мы будем иметь дело с операторными мерами, определенными на произвольном измеримом пространстве $\mathfrak{X}$, и с интегральными коизометрическими представлениями, связанными с операторным вариантом неравенства Коши - Буняковского - Шварца. Но начнем мы с некоторых замечаний об операторных мерах Стилтьеса.

В гл. А речь шла о мерах, сосредоточенных на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, и „убывающей" последовательности пространств. Теперь же будем рассматривать семейства гильбертовых пространств $\{H_s\colon a\le s\le b\}$, занумерованные точками некоторого сегмента $[a,b]$ вещественной оси и монотонно убывающие в том смысле, что

$$H_r \supseteq H_s \quad \text{при } a\le r\le s\le b; \qquad H_a = H.$$

Пусть T_s - сжатие пространства H, для которого $H_s=\mathcal{M}(T_s)$, $T_a=I$. Поскольку при этом $T_rT_r^*\ge T_sT_s^*$ $(r\le s)$, возникает операторная мера $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}((r,s]) = T_rT_r^* - T_sT_s^*\ ; \qquad a\le r\le s\le b. \tag{B11}$$

Строго говоря, это равенство определяет меру (сильно счетно-аддитивную операторную функцию множества) только *при* дополнительном *условии сильной непрерывности справа* семейства $T_sT_s^*$, $a\le s\le b$. Это условие всегда предполагается выполненным. Мера $\mathcal{E}$ имеет неотрицательные сжимающие значения

$$\mathbb{O} \le \mathcal{E}(\delta) \le I, \tag{B12}$$

$\delta\subset[a,b]$. Обратно, любая такая мера порождает убывающее семейство сжатий $T_s = (I-\mathcal{E}((a,s]))^{1/2}$, $a\le s\le b$, и, стало быть, убывающее семейство гильбертовых пространств $\{\mathcal{M}(T_s)\colon a\le s\le b\}$.

Теория интегрирования относительно общих операторных (и вообще - векторных) мер[5] содержит много неясностей. Например, даже для простейших ортогональных мер в гильбертовом пространстве (см. подстрочное примечание) невозможно, вообще говоря, интегрировать не только непрерывные, но и C^∞-гладкие векторные функции. В основном известна и используется конструкция интеграла от вектор-функций, все значения которых лежат в фиксированном конечномерном подпространстве (скажем, функций вида $f(s)=g(s)x_0$, где g - скалярная функция, а x_0 - фиксированный вектор). Следующее жесткое условие М. К. Гавурина (существование так называемой „полувариации" меры $\mathcal{E}$) позволяет определить интеграл от любой непрерывной вектор-функции (всё происходит в некотором банаховом пространстве X): существует число $V(\mathcal{E})$ такое, что

$$\sum_i \|\mathcal{E}(\delta_i)^*x^*\| \le V(\mathcal{E})\|x^*\| \tag{B13}$$

для любого набора попарно дизъюнктных множеств δ_i и любого x^*, $x^*\in X^*$. При этом условии интеграл любой X-значной непрерывной функции f существует как предел римановых сумм

$$\int_a^b (d\mathcal{E})f = \lim \sum_i \mathcal{E}(\delta_i)f(s_i), \tag{B14}$$

---

[5]Говоря о таких мерах, мы будем придерживаться следующего словоупотребления. Операторная мера в X - это сильно счетно-аддитивная функция множества, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств некоторого множества $\mathfrak{X}$ („измеримого пространства"), значения которой суть ограниченные операторы в пространстве X; если пространство X гильбертово, то значения меры предполагаются положительными ($\equiv$неотрицательными). Ортогональная мера в гильбертовом пространстве - это операторная мера, значения которой суть ортогональные проекторы.

где, как обычно, $s_i\in\delta_i$, а разбиения $\{\delta_i: 1\le i\le n\}$ промежутка $[a,b]$ измельчаются так, что $\max\ \{|\delta_i|: 1\le i\le n\} \longrightarrow 0$. При этом, $\|\int_a^b (d\mathcal{E})f\| \le V(\mathcal{E}) \max_{a\le s\le b} \|f(s)\|$. См. об этом [8], [27]. К сожалению, немногие операторные меры $\mathcal{E}$ имеют конечную полувариацию; таковы, однако, все меры в конечномерных пространствах и, скажем, меры вида $\mathcal{E}(\delta)=CE(\delta)$, где $E(\cdot)$ - (ограниченная) операторная мера, а C - ядерный оператор.

Несмотря на столь ограниченные возможности интегрирования относительно мер вида (В11), нам будет этого достаточно в основных наших приложениях (см. гл. D, E и F), ибо там по существу мы будем иметь дело лишь со случаем $\dim H<\infty$. Заметим еще, что в случае необходимости можно несколько расширить рамки условия (В13) с помощью известного в теории операторов „метода редукции": выбрать возрастающее семейство (замкнутых) подпространств L_n ($L_n\subset L_{n+1}$) гильбертова пространства H, H = = $\operatorname{span}\{L_n: n\ge1\}$, и рассмотреть операторные меры $\mathcal{E}$ в H, для которых $V(P_n\mathcal{E}P_n)<\infty$ при любом n, $n\ge1$ (P_n - ортопроектор на L_n; например, можно считать $\dim L_n<\infty$); функция f считается тогда интегрируемой, если существуют и имеют предел интегралы $\int(dP_n\mathcal{E}P_n)f$, т.е. $\int(d\mathcal{E})f=\lim_n\int(dP_n\mathcal{E}P_n)f$. В приложениях к однолистным функциям (гл. D, E и F) мы, в некотором смысле, будем использовать именно такой метод редукции.

Аналогичные, но еще более жесткие ограничения нужны для определения интегралов вида $\int(d\mathcal{E}f,f)$, которые также будут использованы ниже. Например, чтобы задать такой интеграл для любой непрерывной H-значной функции (H - гильбертово пространство) как предел римановых сумм

$$\int_a^b ((d\mathcal{E})f,f) = \lim \sum_i (\mathcal{E}(\delta_i)f(s_i),f(s_i)), \tag{B15}$$

приходится требовать уже конечности полной вариации меры $\mathcal{E}$:

$$\operatorname{Var}\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \sup\sum_i \|\mathcal{E}(\delta_i)\| < \infty \tag{B16}$$

(по всем разбиениям $\{\delta_i\}$). Тогда аналогично векторному интегралу неравенство $\int_a^b ((d\mathcal{E})f,f) \overset{\text{def}}{=} \sum_i (\mathcal{E}(\delta_i)f(s_i),f(s_i)) \le \operatorname{Var}\mathcal{E}\ \max\|f(s)\|^2$ справедливо для всех ступенчатых H-значных функций $f(s)=\sum_i \chi_{\delta_i}(s)f_i$, и это дает возможность определить интеграл (В15) для непрерывных функций f. Что касается характера условия (В16), то о нем можно сделать примерно те же замечания, что были сделаны об условии (В13). Ясно, кроме того, что (В16) влечет (В13). На самом деле, как мы увидим чуть позднее (теорема В40), соответствующие интегралы также связаны аналогичной зависимостью: существование (В15) в известном смысле влечет существование (В14).

Разумеется, если в определениях (В14) и (В15) в качестве $\{\delta_i\}$ допускать и подходящие измеримые разбиения (т.е. перейти от сумм Римана к суммам Дарбу), то при тех же условиях (В13) и (В16) можно будет интегрировать любые ограниченные измеримые функции. В этой формулировке интегралы (В14), (В15) имеют смысл для мер $\mathcal{E}$, определенных на любой σ-алгебре.

Последнее предварительное замечание об операторных интегралах связано с теоремой Наймарка, уже упоминавшейся в гл. А. Согласно этой теореме, любая операторная мера $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющая условию (В12), имеет ортогональную дилатацию, т.е. существует ортогональная мера $\hat{\mathcal{E}}$ в объемлющем пространстве $\hat{H}$, $\hat{H}\supset H$, для которой $\mathcal{E}(\delta)=P_H\hat{\mathcal{E}}(\delta)|H$ для любого δ. Это представление вряд ли может помочь в вопросе о существовании (определении) интегралов (В14) и (В15), поскольку, как это очевидно, ортогональная мера имеет конечную полувариацию, только если она сводится к конечной сумме δ-мер. Однако в ряде других вопросов (скажем, в прояснении смысла и даже в доказательстве основного неравенства (ср. В50 и В96)) оно может быть полезным. Следующий простой пример иллюстрирует определения (В14) и (В15).

В20. Пример. Пусть $(\mathfrak{X},\lambda)$ - некоторое пространство с мерой и $E=E_{\mathfrak{X}}$ - ортогональная мера в $L^2(\lambda)$, задаваемая равенством

$$E(\delta)h = \chi_\delta h, \quad h \in L^2(\lambda), \tag{В21}$$

где χ_δ - характеристическая функция (измеримого) множества δ. Пусть f - ступенчатая функция со значениями в $L^2(\lambda)$, $f(s)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{\delta_i}(s)h_i$, $s\in\mathfrak{X}$, где $\{\delta_i\}$ - семейство попарно дизъюнктных множеств, $\delta_i\subset\mathfrak{X}$, и $h_i\in L^2(\lambda)$, $1\le i\le n$. Условимся значение функции $f(s)$ в точке t $(s,t\in\mathfrak{X})$ записывать символом $f(s,t)$, т.е. $f(s,t)= = \sum_{i=1}^{n}\chi_{\delta_i}(s)h_i(t)$. Тогда считая $s_i\in\delta_i$, $1\le i\le n$, получим

$$\Big(\int_{\mathfrak{X}}(dE)f\Big)(s) = \Big(\sum_i E(\delta_i)f(s_i)\Big)(s) = \sum_i \chi_{\delta_i}(s)h_i(s) = f(s,s), \tag{В22}$$

$$\int_{\mathfrak{X}}((dE)f,f) = \sum_i (E(\delta_i)f(s_i),f(s_i)) = \sum\int_{\delta_i}|f(s_i,s)|^2d\lambda(s) = \int_{\mathfrak{X}}|f(s,s)|^2d\lambda(s). \tag{В23}$$

Таким образом, для ступенчатых L^2-значных функций f *отображение* $f\longmapsto \int_{\mathfrak{X}}(dE)f$ *сопоставляет функции* $f=f(s,t)$ *ее сужение на диагональ* $f(s,s)$, $s\in\mathfrak{X}$.

На этом примере ясно видны трудности, связанные с существованием интегралов (В14), (В15) для функций f, более общих, чем ступенчатые. Ясно также, что этот пример по существу охватывает и общий случай ортогональной меры E в гильбертовом пространстве, ибо по спектральной теореме сужение такой меры на Range $E(\mathfrak{X})$ унитарно эквивалентно ортогональной сумме мер вида (В21), т.е. мере $\sum_{i\ge1}\oplus E_{\mathfrak{X}_i}$ в пространстве $\sum_{i\ge1}\oplus L^2(\mathfrak{X}_i,\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} H$ с подходящими λ и $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\supset\mathfrak{X}_2\supset\dots$ (см. об этом, например, [8]). Считая H естественным образом вложенным в пространство $L^2(\ell^2,\lambda)$

всех ℓ^2-значных функций на $\mathfrak{X}$, суммируемых с квадратом, мы и в этом случае сохраним формулы (B22)-(B23), заменив в последней $|f(s,s)|^2$ на $\|f(s,s)\|^2_{\ell^2}$.

B30. **Квазиразложения, порождаемые мерами.** Здесь мы рассмотрим общие операторные меры, обладающие свойством (B12) и определенные на некоторой алгебре подмножеств произвольного множества $\mathfrak{X}$. Плотности порождаемых ими „квазиразложений", напротив, будут очень простыми, именно - (измеримыми) ступенчатыми H-значными функциями (H - гильбертово пространство). Множество всех таких функций обозначим символом $\mathcal{F}$ ($\equiv\mathcal{F}(H,\mathfrak{X})$, если в этом будет потребность). Поскольку для мер $\mathcal{E}$ общего вида описание пополнения пространства $\mathcal{F}$ в соответствующей метрике (см. правую часть (B42) ниже) все равно не представляется возможным, можно отказаться и от свойства счетной аддитивности, т.е. рассматривать аддитивные функции множества.

B40. Т е о р е м а. *Пусть H - гильбертово пространство, $\mathcal{E}$ - аддитивная операторная функция множества, определенная на некоторой алгебре подмножеств множества $\mathfrak{X}$ и обладающая свойством* (B12):

$$\mathbb{O} \le \mathcal{E}(\delta) \le I, \qquad \delta \subset \mathfrak{X}.$$

Пусть, далее, T - оператор, принимающий значения в H и такой, что $TT^*=I-\mathcal{E}(\mathfrak{X})$. Тогда для любой функции f, $f\in\mathcal{F}(H,\mathfrak{X})$, вектор

$$Wf = \int_{\mathfrak{X}} (d\mathcal{E})f \tag{B41}$$

принадлежит комплементарному пространству $\mathcal{H}(T)=\mathcal{M}(\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2})$ и

$$\Big\| \int_{\mathfrak{X}} (d\mathcal{E})f \Big\|_{\mathcal{H}(T)} \le \left(\int_{\mathfrak{X}} ((d\mathcal{E})f,f)\right)^{1/2}. \tag{B42}$$

Оператор W продолжается по непрерывности до коизометрического отображения из $\bar{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{H}(T)$, где $\bar{\mathcal{F}}$ - пополнение $\mathcal{F}$ относительно (полу)нормы из правой части неравенства (B42). *Более того, $W\bar{\mathcal{F}} \supset \mathcal{E}(\mathfrak{X})H$, и единственное „изометрическое" представление $x=Wf$, $f\in\bar{\mathcal{F}}$, $\|x\|_{\mathcal{H}(T)} = \|f\|_{\bar{\mathcal{F}}}$, вектора x, $x\in\mathcal{E}(\mathfrak{X})H$, реализуется на константе: если $x=\mathcal{E}(\mathfrak{X})h$, $h\in(\operatorname{Ker}\mathcal{E}(\mathfrak{X}))^{\perp}$, то $f(s)\equiv h$, $s\in\mathfrak{X}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in\mathcal{F}$ и $f = \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{\delta_k}h_k$, где $h_k\in H$, $0\le k\le n-1$.

Полагаем $T_0=I$ и далее, если оператор T_k уже определен, выбираем T_{k+1} из условия $D^2_{T^*_{k+1}}=D^2_{T^*_k}+\mathcal{E}(\delta_k)$; $k=0,1,\dots,n-1$; $T_n=T$. Тогда семейство $\{T_k\}$ образует сжимающую цепь, $T_{k+1}=T_kT_{k,k+1}$, и действие оператора W можно записать в виде

$$Wf = \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{E}(\delta_k)h_k = \sum_{k=0}^{n-1}(D^2_{T^*_{k+1}} - D^2_{T^*_k})h_k = \sum_{k=0}^{n-1}T_kD^2_{T^*_{k,k+1}}T^*_kh_k = \sum_{k=0}^{n-1}T_kD_{T^*_{k,k+1}}y_k,$$

где $y_k = D_{T^*_{k,k+1}}T^*_k h_k$. Теперь можно воспользоваться теоремой A140 и написать оценку (A143) для вектора $x = Wf$:

$$\|Wf\|^2_{\mathcal{H}(T)} \le \sum_{k=0}^{n-1}\|y_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(T_k D^2_{T^*_{k,k+1}} T^*_k h_k, h_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(\mathcal{E}(\delta_k)h_k, h_k) = \int_{\mathfrak{X}}((d\mathcal{E})f,f) = \|f\|^2_{\mathcal{F}},$$

т.е. W - сжимающий оператор.

С другой стороны, если $h\in(\operatorname{Ker}\mathcal{E}(\mathfrak{X}))^{\perp}$ и $f(s)\equiv h$, $s\in\mathfrak{X}$, то $Wf=\mathcal{E}(\mathfrak{X})h$, $\int_{\mathfrak{X}}((d\mathcal{E})f,f) = (\mathcal{E}(\mathfrak{X})h,h)$ и

$$\|Wf\|^2_{\mathcal{H}(T)} = \|\mathcal{E}(\mathfrak{X})h\|^2_{\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2}} = \|\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2}h\|^2 = (\mathcal{E}(\mathfrak{X})h,h) = \int_{\mathfrak{X}}((d\mathcal{E})f,f).$$

Всё остальное следует из леммы I50. ●

B50. Другое доказательство получится, если вместо ссылки на неравенство (A143) напрямую использовать прием, которым это неравенство было выведено. Именно, достаточно заметить, что отображение j, определенное на плотном в $\mathcal{H}(T)=\mathcal{M}(\mathcal{E}(\mathfrak{X})^{1/2})$ множестве $\operatorname{Range}\mathcal{E}(\mathfrak{X})$ равенством[6] $j\mathcal{E}(\mathfrak{X})h=h$, продолжается до изометрического отображения из $\mathcal{H}(T)$ в $\mathcal{F}$: $\|\bar{h}\|^2_{\mathcal{F}} = \int_{\mathfrak{X}}((d\mathcal{E})h,h) = (\mathcal{E}(\mathfrak{X})h,h) = \|\mathcal{E}(\mathfrak{X})h\|^2_{\mathcal{H}(T)}$. Заканчивает рассуждение простое вычисление сопряженного оператора j^*:

$$(\mathcal{E}(\mathfrak{X})h, j^*f)_{\mathcal{H}(T)} = (h,f)_{\mathcal{F}} = (h,\int_{\mathfrak{X}}(d\mathcal{E})f) = (\mathcal{E}(\mathfrak{X})h, Wf)_{\mathcal{H}(T)}\,.$$

Таким образом, оператор $W=j^*$ является коизометрическим. ●

B60. Существование плотности. Другие квазиразложения $\mathcal{H}(T)$. Говорят, что операторная мера $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H имеет (операторную) *плотность* w относительно скалярной меры λ, заданной на той же алгебре подмножеств множества $\mathfrak{X}$, если w есть слабо суммируемая $L(H)$-значная функция на $\mathfrak{X}$, и для любых x,y из H и любого δ, $\delta\subset\mathfrak{X}$,

$$(\mathcal{E}(\delta)x,y) = \int_{\delta}(w(s)x,y)d\lambda(s). \tag{B61}$$

Нетрудно видеть, что при этом $w(s)\ge\mathbb{O}$ λ-почти всюду. Существование плотности резко расширяет класс $\mathcal{E}$-интегрируемых вектор-функций; например, таковыми будут все H-значные (измеримые) функции x, для которых $\int_{\mathfrak{X}}\|w(s)x(s)\|d\lambda(s)<\infty$. Легко указать примеры „хороших" (ортогональных) мер, не имеющих плотности: скажем, мера $E(\delta)f=\chi_{\delta}f$, рассмотренная в примере B20, как правило, не имеет плотности (относительно какой бы то ни было скалярной меры); в частности, это так для стандартного пространства Лебега $H=L^2(\mathbb{R})$. С другой стороны, нетрудно видеть, что мера $\mathcal{D}$, мажорируемая мерой $\mathcal{E}$, имеющей плотность, т.е. такая, что $\mathcal{D}(\delta)\le\mathcal{E}(\delta)$, $\delta\subset\mathfrak{X}$, также обладает этим свойством (если $\mathcal{E}(\delta) = \int_{\delta}w(s)d\lambda(s)$, то из неравенства $(\mathcal{D}(\delta)x,x) \le \int_{\delta}(w(s)x,x)d\lambda$ и теоремы Радона - Никодима следует представление

[6] Правая часть равенства рассматривается как функция на $\mathfrak{X}$, тождественно равная h.

$(\mathcal{D}(\delta)x,y) = \int_\delta u_{x,y}(s)d\lambda(s)$ с $u_{x,y}\in L^1(\lambda)$ и оценка $0\le u_{x,x}(s)\le(w(s)x,x)$ для п.в. s и для всех x, $x\in H$; поэтому, при п.в. s форма $u_{x,y}(s)$ порождается ограниченным оператором $u(s)$: $u_{x,y}(s)=(u(s)x,y)$, $x,y\in H$, и стало быть, $\mathcal{D}(\delta) = \int_\delta u(s)d\lambda(s)$). В частности, это так, если $\mathcal{D}(\delta) \le \lambda(\delta)\cdot I$, $\delta\subset\mathfrak{X}$. Последнее условие называют также *липшицевостью* меры $\mathcal{D}$ относительно меры λ.

Существование плотности у меры $\mathcal{E}$ позволяет написать другие квазиразложения пространства $\mathcal{H}(T)$, $TT^*=I-\mathcal{E}(\mathfrak{X})$, эквивалентные квазиразложению (В41), но свободные от отмеченного выше (см. В30) недостатка (пополнение $\overline{\mathcal{F}}$ в общем случае трудно поддается описанию).

В70. Теорема. *Пусть $\mathcal{E}$ – операторная мера в гильбертовом пространстве H, имеющая плотность w относительно скалярной меры λ (все происходит на некотором измеримом пространстве $\mathfrak{X}$). Пусть далее*

$$w(s) = v(s)v(s)^*, \qquad s \in \mathfrak{X},$$

– некоторая „эрмитова факторизация" плотности w и $s \longmapsto v(s)$ – измеримая оператор-функция, $v(s)\in L(H)$, $s\in\mathfrak{X}$. Тогда оператор V, определенный равенством

$$Vy = \int_{\mathfrak{X}} vyd\lambda \tag{В71}$$

для всех H-значных L^2-функций y (пишем: $y\in L^2(H,\lambda)$), является коизометрическим отображением пространства $L^2(H,\lambda)$ на $\mathcal{H}(T)$, $TT^*\overset{\mathrm{def}}{=}I-\mathcal{E}(\mathfrak{X})$, причем если $x\in D^2_{T^*}H = \mathcal{E}(\mathfrak{X})H$ и $x=D^2_{T^*}h$, $h\in H$, то единственное „изометрическое" представление $x = Vy$, $\|x\|_{\mathcal{H}(T)}=\|y\|_{L^2}$ реализуется на функции $y(s)=v(s)^*h$, $s\in\mathfrak{X}$.

Доказательство немедленно следует из теоремы В40, если заметить, что для ступенчатых функций f

$$\int_{\mathfrak{X}}(d\mathcal{E})f = \int_{\mathfrak{X}} v(v^*f)d\lambda = \int_{\mathfrak{X}} vyd\lambda\ , \qquad y \overset{\mathrm{def}}{=} v^*f\ ,$$

$$\int_{\mathfrak{X}}((d\mathcal{E})f,f) = \int_{\mathfrak{X}} (wf,f)d\lambda = \int_{\mathfrak{X}} \|y(s)\|^2_H\, d\lambda(s)\ ,$$

и что соответствующие функции $y = v^*f$ образуют множество, плотное в следующем подпространстве пространства $L^2(H,\lambda)$:

$$\{y\ :\ y\in L^2(H,\lambda),\ y(s) \in (\mathrm{Ker}v(s))^\perp = \mathrm{clos}(v(s)^*H)\}. \tag{В72}$$

Пространства такого типа обычно называют прямыми интегралами гильбертовых пространств и пишут $\int_{\mathfrak{X}}^{\oplus} H(s)d\lambda(s)$; в нашем случае $H(s)=(\mathrm{Ker}v(s))^\perp$, $s\in\mathfrak{X}$. На ортогональном дополнении $\int_{\mathfrak{X}}^{\oplus}(\mathrm{Ker}v(s))d\lambda(s)$ подпространства (В72) оператор V равен нулю. ●

В80. Следствие. *Если мера $\mathcal{E}$ обладает плотностью w с эрмитовой факторизацией $w = vv^*$ и $TT^*=I-\mathcal{E}(\mathfrak{X})$, то имеет место квазиразложение*

$$\mathcal{H}(T) = \int_{\mathfrak{X}} \mathcal{M}(v(s))d\lambda(s) \tag{B81}$$

в том смысле, что для любой вектор-функции h, $h(s)\in\mathcal{M}(v(s))$, $\int_{\mathfrak{X}} \|h(s)\|^2_{v(s)}d\lambda(s)<\infty$, *интеграл*

$$x = \int_{\mathfrak{X}} h(s)d\lambda(s) \tag{B82}$$

сходится в $\mathcal{H}(T)$, *и*

$$\| \int_{\mathfrak{X}} h(s)d\lambda(s) \|^2_{\mathcal{H}(T)} \le \int_{\mathfrak{X}} \|h(s)\|^2_{v(s)}d\lambda(s). \tag{B83}$$

И обратно, любой вектор x, $x\in\mathcal{H}(T)$, *допускает представления вида* (B82), *среди которых есть единственное „экстремальное" представление, когда* (B83) *превращается в равенство. Если* $x = D^2_{T^*}h$, $h\in H$, *то это представление дается функцией* $h(s) = w(s)h$, $s\in\mathfrak{X}$.

Действительно, к сказанному в теоремах B70 и B40 нужно только добавить, что правая часть равенства (B71) зависит не от y, а от $h=vy$, и поэтому в неравенстве $\|Vy\|^2_{\mathcal{H}(T)} \le \int_{\mathfrak{X}} \|y(s)\|^2_H\, d\lambda(s)$ можно перейти к точной нижней грани по всем y, представляющим фиксированную функцию h: $h(s)=v(s)y(s)$. Это даст неравенство (B83), а с ним и всё утверждение. ●

B84. З а м е ч а н и е. Возможны и „промежуточные" (между B70 и B80), квазиразложения, когда оператор v факторизуется на два (нетривиальных) множителя $v(s)=v_1(s)v_2(s)$. Это позволяет записать квазиразложение B70–B80 в виде

$$x = \int_{\mathfrak{X}} v_1(s)g(s)d\lambda(s),\ g(s)\in\mathcal{M}(v_2(s)), \tag{B85}$$

$$\| x \|^2_{\mathcal{H}(T)} \le \int_{\mathfrak{X}} \|g(s)\|^2_{v_2(s)}\, d\lambda(s)$$

и т.д. (см. формулировки B70 и B80).

Отметим еще одну переформулировку полученного неравенства. Для этого запишем $\mathcal{E}(\mathfrak{X})$ в виде $\mathcal{E}(\mathfrak{X})=DD^*$. Таким образом, разложение

$$DD^* = \int_{\mathfrak{X}} v_1(s)v_2(s)v_2(s)^*v_1(s)^*d\lambda(s) \tag{B86}$$

влечет оценку

$$\|\int_{\mathfrak{X}} v_1(s)g(s)d\lambda(s)\|^2_D \le \int_{\mathfrak{X}} \|g(s)\|^2_{v_2(s)}d\lambda(s), \tag{B87}$$

причем для каждого вектора x, $x\in\mathcal{M}(D)$, существует единственная функция g, $g\in L^2(\mathcal{M}(v_2),\lambda)$, через которую вектор x выражается по формуле (B85) и для которой (B87) обращается в равенство. Другими словами, оператор V_1, определенный равенством

$$V_1 g = \int_{\mathfrak{X}} v_1(s) g(s) d\lambda(s),$$

является коизометрическим отображением пространства $L^2(\mathcal{M}(v_2),\lambda)$ на $\mathcal{M}(D)$.

Отметим еще, что в силу однородности формул (В86) и (В87) по D и v_2 оператор D уже не обязательно считать сжимающим.

В90. Расслоение меры $\mathcal{E}$. Так будем называть сопоставление мере $\mathcal{E}$ на $\mathfrak{X}$ новой меры, скажем $\tilde{\mathcal{E}}$, на некотором пространстве расслоения $\tilde{\mathfrak{X}}$ с базой $\mathfrak{X}$ и проекцией π: $\tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{X}$; при этом должно быть выполнено соотношение

$$\mathcal{E}(\delta) = \int_{\pi^{-1}(\delta)} d\tilde{\mathcal{E}}.$$

У нас будет только тривиальное расслоение $\tilde{\mathfrak{X}}=\mathfrak{X}\times\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}$ - некоторое вспомогательное пространство, т. е.

$$\mathcal{E}(\delta) = \int_{\delta\times\mathfrak{Z}} d\tilde{\mathcal{E}}.$$

Например, в условиях п. В60 можно взять просто спектральное разложение самосопряженных операторов $w(s)$

$$w(s) = \int_{\mathbb{R}} t dE_s(t),$$

т. е. $\mathfrak{Z}=\mathbb{R}$, и формула (В61) при таком расслоении превратится в

$$\mathcal{E}(\delta) = \int_{\delta}\int_{\mathbb{R}} t dE_s(t) d\lambda(s).$$

Но нам потребуется чуть более специальное расслоение. Обратимся к формуле (В86) и допустим, что оператор $v_2(s)v_2(s)^*$ имеет аналогичное разложение по некоторой мере μ_s:

$$v_2(s)v_2(s)^* = \int_{\mathfrak{Z}} u_1(s,\zeta)u_2(s,\zeta)u_2(s,\zeta)^* u_1(s,\zeta)^* d\mu_s(\zeta). \tag{В91}$$

Тогда можно записать оценку (В87) для оператора $v_2(s)$ вместо оператора D:

$$\left\| \int_{\mathfrak{Z}} u_1(s,\zeta) g(s,\zeta) d\mu_s(\zeta) \right\|^2_{v_2(s)} \le \int_{\mathfrak{Z}} \| g(s,\zeta)\|^2_{u_2(s,\zeta)} d\mu_s(\zeta). \tag{В92}$$

Это неравенство мы теперь можем подставить в (В87) с $g(s) = \int_{\mathfrak{Z}} u_1(s,\zeta)g(s,\zeta)d\mu_s(\zeta)$.

В результате такой итерации получаем для вектора x,

$$x = \int_{\mathfrak{X}} v_1(s) \left[\int_{\mathfrak{Z}} u_1(s,\zeta) g(s,\zeta) d\mu_s(\zeta) \right] d\lambda(s), \tag{В93}$$

оценку

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(T)} \le \int_{\mathfrak{X}}\int_{\mathfrak{Z}} \|g(s,\zeta)\|^2_{u_2(s,\zeta)} d\mu_s(\zeta)\, d\lambda(s). \tag{В94}$$

В95. Замечание. Сделаем теперь одно терминологическое замечание, ограничившись для простоты случаем скалярных мер. Пусть λ - конечная мера на $\mathfrak{X}$, $\{\mu_s: s\in\mathfrak{X}\}$ - измеримое семейство вероятностных мер на пространстве $\mathfrak{Z}$ и μ - мера на произведении $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Z}$, которую мы назвали расслоением меры λ: $d\mu(s,\zeta)=d\mu_s(\zeta)d\lambda(s)$. Очевидно, что $\lambda(\delta)=\mu(\pi^{-1}(\delta))$ для любого δ, $\delta\subset\mathfrak{X}$, где $\pi(s,\zeta)=s$. Обратно, по теореме Бурбаки о дезинтегрировании мер (см. [2], из этого последнего соотношения вытекает, что μ есть расслоение λ. Семейство мер $\{\mu_s\}$ называется (по Бурбаки) дезинтегрированием меры μ, а мера λ - псевдообразом меры μ.

B96. Замечание. Следствие B80 в качестве частных случаев содержит теоремы A140 и A180. Действительно, нужно взять меру λ, имеющую единичные нагрузки в точках множества $\mathfrak{X}=\{0,1,\dots,n-1\}$ в случае теоремы A140, или множества $\mathfrak{X}=\{0\}\cup\mathbb{N}$ в случае теоремы A180, и функцию $v(k)=T_kD_{T^*_{k,k+1}}$. Тогда оператор V, заданный формулой (B71), совпадает с оператором из A20, а разложения (B81), (B82) и оценка (B83) превратятся соответственно в разложения (A141), (A142) и оценку (A143).

B97. Дилатация меры $\mathcal{E}$, как и в дискретном случае, - это ортогональная мера $\hat{\mathcal{E}}$ в некотором („более широком") пространстве $\hat{H}$, компрессия которой на H совпадает с $\mathcal{E}$, т.е.

$$\mathcal{E}(\delta) = i^*\hat{\mathcal{E}}(\delta)i,$$

где i - изометрическое вложение H в $\hat{H}$. Сейчас мы просто предъявим требуемые пространство $\hat{H}$, вложение i и меру $\hat{\mathcal{E}}$.

Положим $\hat{H}=\overline{\mathcal{F}\oplus H}$ и проверим, что отображение i: $H \longrightarrow \mathcal{F}\oplus H$, действующее по формуле

$$ix = x \oplus T^*x,$$

является изометрическим оператором. Поясним, что первой компонентой вектора ix является функция из $\mathcal{F}$, тождественно равная x, а в определении второй компоненты участвует оператор T, связанный с полной мерой $\mathcal{E}(\mathfrak{X})$ равенством $\mathcal{E}(\mathfrak{X})=D^2_{T^*}$.

Итак, проверяем изометричность оператора i:

$$\|ix\|^2_{\hat{H}} = \int((d\mathcal{E})x,x) + \|T^*x\|^2 = \|D_{T^*}x\|^2 + \|T^*x\|^2 = \|x\|^2.$$

На плотном в $\hat{H}$ множестве $\mathcal{F}\oplus H$ зададим меру $\hat{\mathcal{E}}$ формулой

$$\hat{\mathcal{E}}(\delta)(f\oplus h) = \chi_\delta f \oplus \mathbb{O}.$$

Тогда

$$(i^*\hat{\mathcal{E}}(\delta)ix,x)_H = (\hat{\mathcal{E}}(\delta)ix,ix)_{\hat{H}} = (\chi_\delta x,x)_{\mathcal{F}} = \int_\delta((d\mathcal{E})x,x) = (\mathcal{E}(\delta)x,x)$$

для всех $x, x\in H$, т.е. $i^*\hat{\mathcal{E}}(\delta)i=\mathcal{E}(\delta)$, что и требовалось. ●

B100. Однопараметрические цепи сжатий $\{T_s: a\le s\le b\}$, или - что то же самое - вполне упорядоченные семейства гильбертовых пространств $\{H_s\}$, как уже было отмечено, порождают операторную меру $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}((r,s]) = T_rT_r^* - T_sT_s^*, \qquad a\le r\le s\le b. \tag{B101}$$

Теперь мы перепишем конструкции квазиразложений B40, B80 в терминах операторов T_s, считая что мера $\mathcal{E}$ имеет плотность относительно меры Лебега ds на прямой $\mathbb{R}$. Случай, когда $\mathcal{E}$ имеет плотность относительно произвольной *непрерывной* (т.е. не имеющей точечных нагрузок) меры μ, сводится к мере Лебега простой заменой переменной: если μ - такая мера, то, во-первых, не умаляя общности, можно считать, что непрерывная функция ν, $\nu(s) \overset{\text{def}}{=} \mu((a,s])$, строго монотонна (иначе заменим μ на меру $\mu+\chi_{\mathbb{R}\setminus\sigma}ds$, где $\sigma=\operatorname{supp}\mu$), а затем положить $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}\circ\nu^{-1}$, т.е. $\mathcal{E}_1((r,s]) = \mathcal{E}((\nu^{-1}(r),\nu^{-1}(s)])$ для $0=\nu(a)\le r\le s\le\nu(b)$; ясно тогда, что если w - плотность меры $\mathcal{E}$ относительно μ, то $w\circ\nu^{-1}$ - плотность $\mathcal{E}_1$ относительно ds, и наоборот.

Достаточным условием существования плотности (относительно меры Лебега) меры (B101) является липшицевость семейства операторов $\{T_s^*\}$:

$$0 \le \|T_r^*x\|^2 - \|T_s^*x\|^2 \le \operatorname{const}(s-r).$$

Как и в случае определения операторных интегралов относительно меры $\mathcal{E}$, мы можем ослабить это последнее требование гладкости семейства $\{T_s^*\}$, использовав „метод редукции" в духе замечаний из п. B10 (см. подробности в п. B140-B190 ниже).

Для вычисления плотности меры (B101) весьма существенна не только гладкость семейства $\{T_s\}$, но и его мультипликативная структура. Именно, как подробно объяснялось во Введении (п. I85), убывающая сжимающая цепь $\{T_s\colon a\le s\le b\}$ определяет (с небольшим произволом, если $\operatorname{Ker}T_s\ne\{\mathbb{O}\}$) по формуле

$$T_s = T_rT_{rs}, \qquad r \le s, \tag{B102}$$

двупараметрическое *эволюционное семейство* сжатий $\{T_{rs}\}$, для которого имеет место *эволюционное тождество*

$$T_{rt} = T_{rs}T_{st}, \qquad a\le r\le s\le t\le b. \tag{B103}$$

Любое семейство, удовлетворяющее тождеству (B103), называется эволюционным. Как отмечалось в п. I85, *мы всегда будем предполагать выполненным условие*

$$T_{ss} = I, \qquad a \le s \le b.$$

Это не нужно оговаривать специально, если $\operatorname{Ker}T_s=\{\mathbb{O}\}$, $s\in[a,b]$. Если, кроме того, операторы T_s обратимы, то из формулы (B102) следует $T_{rs}=T_sT_r^{-1}$ и, стало быть, (слабая) липшицевость цепи $\{T_s\}$ влечет (слабую) липшицевость оператор-функции $s\longmapsto T_{rs}$. В последующем мы будем нуждаться в такого рода условиях (но не обязательно в ограниченности T_r^{-1}). Однако для упрощения выкладок предположим выполненным более сильное условие:

функции $s\longmapsto T_{rs}^*x$, $r\longmapsto T_{rs}^*x$, $r \le s$, *дифференцируемы при любом* $x, x\in H$. (B104)

Основные свойства эволюционных семейств излагаются в большинстве книг по дифференциальным уравнениям (см. например, [6], [7], [10]), но на некоторые нужные нам подробности подобрать ссылку довольно трудно. Поэтому мы кратко изложим те факты общей теории и в той интерпретации, которые необходимы для дальнейшего анализа квазиразложений.

Отметим кстати, что стандартным начальным условием для исследования общих эволюционных уравнений $x'=\Omega x-g$ является условие „равномерной корректности задачи Коши", состоящее в существовоании непрерывно зависящего от r и s фундаментального решения T_{rs}, сильно дифференцируемого по s (см., например, [10]). Наша форма этого условия (т.е. (В104)) указывает на то, что мы скорее интересуемся сопряженным семейством T^*_{rs}, чем T_{rs}.

В110. Лемма. *Если эволюционное семейство* $\{T_{rs}\}_{r\le s}$ *дифференцируемо в смысле* (В104), *то выполнены эволюционные уравнения*

$$\frac{\partial T_{rs}}{\partial r} = \Omega(r)T_{rs}\ , \tag{B111}$$

$$\frac{\partial T_{rs}}{\partial s} = -T_{rs}\Omega(s), \tag{B112}$$

где функция T_{rs} *дифференцируется в слабой топологии пространства* $L(H)$ *и где*

$$\Omega(s) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial T_{rs}}{\partial r}\right|_{r=s}.$$

Кроме того (также в слабом смысле),

$$\frac{\partial}{\partial s}(-T_{rs}T^*_{rs}) = T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs} \tag{B113}$$

и, в частности,

$$2\mathrm{Re}\Omega(s) = \left.\frac{\partial}{\partial s}(-T_{rs}T^*_{rs})\right|_{r=s}. \tag{B114}$$

Доказательство. Из (В104) следует, что семейство T_{rs} дифференцируемо по r и s в слабой топологии пространства $L(H)$. Дифференцируя (В103) по r и полагая затем $s=r$, получим (В111). Поскольку функция $s\longmapsto T^*_{st}T^*_{rs}$ сильно дифференцируема по s (и имеет место стандартная формула Лейбница), то $\mathbb{O} = \frac{\partial T_{rs}}{\partial s}T_{st} + T_{rs}\frac{\partial T_{st}}{\partial s}$. Полагая здесь $r=s$ и $t=s$, дифференцируя (В103) по переменной t и полагая $s=t$, получим (В112).

Ясно также, что произведение $T_{rs}T^*_{rs}$ слабо дифференцируемо и что $\frac{\partial}{\partial s}(-T_{rs}T^*_{rs}) = -\frac{\partial T_{rs}}{\partial s}T^*_{rs} - T_{rs}\frac{\partial T^*_{rs}}{\partial s} = T_{rs}\Omega(s)T^*_{rs} + T_{rs}(T_{rs}\Omega(s))^* = T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs}$. ●

В120. Следствие. В условиях (В104) *эволюционное семейство* $\{T_{rs}\}$ *является сжимающим* (*т.е.* $\|T_{rs}\|\le 1$ *при всех* r *и* s, $r\le s$) *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Re}\ \Omega(s) \ge \mathbb{O}, \qquad a\le s\le b. \tag{B121}$$

Действительно, из (В103) и сжимаемости семейства $\{T_{rs}\}$ следует, что функция $t\longmapsto T_{rt}T^*_{rt}$, $t\ge r$, убывает, а тогда из (В114) вытекает (В121). Обратно, это последнее условие по формуле (В113) влечет $\frac{\partial}{\partial s}\|T^*_{rs}x\|^2\le 0$ при $s\ge r$ и $x\in H$, так что

$\|T^*_{rs}x\|^2 \le \|T^*_{rr}x\|^2 = \|x\|^2$ для всех x, $x\in H$, т.е. $\|T_{rs}\|\le 1$. ●

B130. Следствие. *Пусть* $\{T_{rs}\}$, $a\le r\le s\le b$, *– сжимающее эволюционное семейство, и пусть* $\mathcal{E}_r$ *– операторная мера в* H, *определенная на промежутке* $(r,b]$ *равенством*

$$\mathcal{E}_r((s,t]) = T_{rs}T^*_{rs} - T_{rt}T^*_{rt}, \qquad r\le s\le t\le b.$$

В условиях леммы B110, *мера* $\mathcal{E}_r$ *имеет плотность относительно меры Лебега* ds, *и эта плотность равна* $T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs}$, *так что*

$$\mathcal{E}_r(\delta) = \int_\delta T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T^*_{rs}ds. \tag{B131}$$

Действительно, если δ – промежуток, то билинейные формы левой и правой частей этого равенства совпадают ввиду (B113). ●

Откладывая до п. B200 приложения формулы (B131) к квазиразложениям, порождаемым непрерывными однопараметрическими цепями сжатий, приведем еще несколько общих утверждений об эволюционных семействах T_{rs}, которые будут нужны в дальнейшем. Возможно, основное из них – теорема B170 – и известно специалистам, но нам проще привести его здесь, чем проводить специальное расследование. Это же способствует и замкнутости изложения. Речь идет об излагаемом ниже методе редукции.

B140. Метод редукции для эволюционных уравнений (B111)-(B112) необходим не только для вывода явной формулы для решения, но и для корректной интерпретации самих уравнений и доказательства существования решения в тех случаях, когда значения $\Omega(s)$ оператор-функции Ω являются неограниченными операторами, возможно с тривиальным пересечением областей определения: $\bigcap_s \mathrm{Dom}\Omega(s)=\{\mathbb{O}\}$. В основных приложениях излагаемой теории (к оценкам однолистных функций во второй части работы) будет выполнена следующая совокупность условий:

(B141) операторы $\Omega(s)$ плотно определены в гильбертовом пространстве H и аккретивны, т.е. $\mathrm{Re}(\Omega(s)x,x)\ge 0$ $\forall x\in\mathrm{Dom}\Omega(s)$;

(B142) пересечение областей $\bigcap_s \mathrm{Dom}\Omega(s)^* \overset{\mathrm{def}}{=} D$ плотно в H и, более того, существует возрастающее семейство подпространств L_n, $L_n\subset L_{n+1}$, таких, что $L_n\subset D$ и $\Omega(s)^*L_n\subset L_n$ для любых n и s, и $\mathrm{clos}\bigcup_{n\ge 0} L_n = H$;

(B143) оператор-функции Ω_n: $s\longmapsto(\Omega(s)^*|L_n)^*$ измеримы и, более того, суммируемы на рассматриваемом промежутке (a,b):

$$\int_a^b \|\Omega_n(s)\|\, ds < \infty, \quad n = 1,2\ldots .$$

Условие (B142) позволяет интерпретировать уравнение (B111) *в слабом смысле*: мы ищем такую „слабо дифференцируемую" оператор-функцию $F(s)=T_{st}$, $a\le s\le t$, что $F(t)=I$ и при п.в. s

$$\frac{\partial}{\partial s}(F(s)x,y) = (F(s)x,\Omega(s)^*y) \tag{B144}$$

для всех $x\in H$ и $y\in D$. *Метод редукции* (для всего промежутка (a,b)) состоит в том, чтобы заменить это уравнение серией уравнений - компрессий (B144) на подпространства L_n, т.е. положить $\Omega_n=(\Omega^*|L_n)^*$, решить уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}F_n = \Omega_n F_n, \qquad a\le s\le b, \qquad F_n(b)=I,$$

и доказать существование предела $\lim F_n=F$, который и будет слабым решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s) = \Omega(s)F(s), \qquad a\le s\le b; \qquad F(b)=I. \tag{B145}$$

Следующее предложение является классическим, и мы лишь наметим его доказательство (см. подробности, например, в [3],[10]).

B150. Лемма. *Пусть Ω - измеримая оператор-функция со значениями в $L(H)$, и пусть*

$$\int_a^b \|\Omega(s)\|\, ds < \infty. \tag{B151}$$

Тогда решение уравнения (B145) *существует и задается мультипликативным интегралом*

$$F(s) = \widetilde{\int_s^b} e^{-\Omega(t)dt}, \qquad a\le s<b, \tag{B152}$$

сходящимся по норме пространства $L(H)$

$$\widetilde{\int_s^b} e^{-\Omega(t)dt} \overset{\text{def}}{=} \lim \exp[-\int_s^{s_1}\Omega(t)dt]\, \exp[-\int_{s_1}^{s_2}\Omega(t)dt]\dots\exp[-\int_{s_n}^{b}\Omega(t)dt] \tag{B153}$$

при измельчении дробления $s<s_1<\dots<s_n<b$ промежутка $[s,b]$.

Опуская технический вопрос о сходимости интеграла, заметим, что непосредственно из его определения следует равенство

$$F(s+\delta) - F(s) = (I - \exp\,[-\widetilde{\int_s^{s+\delta}}\Omega(t)dt])\, F(s+\delta),$$

которое после деления на δ, $\delta>0$, и предельного перехода $\delta\longrightarrow 0$ дает и дифференцируемость при почти всех s и равенство $F'(s)=\Omega(s)F(s)$. ●

B160. Лемма. *Пусть оператор-функция Ω удовлетворяет условиям* (B141)-(B143). *Тогда решения F_n, $F_n\in L(L_n)$, уравнений $F_n'=\Omega_nF_n$, $F_n(b)=I$ таковы, что*

$$F_n(s)^*L_k\subset L_k, \qquad F_k(s) = P_{L_k}F_n(s)|L_k; \qquad 1\le k<n, \tag{B161}$$

$$\|F_n(s)\| \le 1; \quad n\ge1, \qquad a\le s\le b. \tag{B162}$$

Доказательство последнего неравенства хорошо известно и эквивалентно по существу доказательству фундаментального неравенства Хайнца - фон Неймана (см., например, [16]): если $\mathrm{Re}A\le\mathbb{O}$, то оператор e^A допускает корректное определение, и $\|e^A\|\le 1$. Это неравенство и формула (В153) влекут $\|F_n(s)\|\le 1$ при всех n и s.

Из той же формулы (В153), определяющей функцию F_n по генератору $\Omega=\Omega_n$, и из условия (В142) следует сначала, что $\exp(-\int_{s_i}^{s_{i+1}} \Omega_n(t)^* dt)L_k \subset L_k$ при $1\le k\le n$, а затем, что $F_n(s)^* L_k \subset L_k$ и $F_k(s)^* = F_n(s)^* | L_k$, $1\le k<n$. Равенства $F_k = P_{L_k} F_n | L_k$, $1\le k<n$, теперь очевидны. ●

В170. Т е о р е м а. *Если оператор-функция* Ω *удовлетворяет условиям* (В141)-(В143), *то решения* F_n, *описанные в лемме* В160, *сильно сходятся к оператор-функции* F, $F(s)x = \lim_n F_n(s)P_{L_n} x$, $x\in H$. *Функция* F *слабо дифференцируема (на функционалах из* $\bigcup_{n\ge 1} L_n$ *- см.п.* В140 *- т.е. дифференцируемы все функции* $s \longmapsto$ $\longmapsto (F(s)x,y)$, $x\in H$, $y\in \bigcup_{n\ge 1} L_n$) *и является слабым решением уравнения* $F'=\Omega F, F(b)=I$ *в смысле* (В144) *(на функционалах из* $\bigcup_{n\ge 1} L_n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (В161) означают „треугольность" операторов $F_n(s)$ относительно ортогонального разложения $L_n = \sum_{k=1}^{n} (L_k \ominus L_{k-1})$, $L_0 \overset{\text{def}}{=} \{0\}$, что, в частности, влечет равенство $F_n(s)P_n x = \sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1})F_n(s)P_n x = \sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1})F_k(s)P_k x$ для любого x, $x\in H$ (здесь $P_k = P_{L_k}$). Отсюда и из условия (В162) следует, что $\sum_{k\ge 1} \|(P_k-P_{k-1})F_k(s)P_k x\|^2 < \infty$, и что $\|F_n(s)P_n x - F_m(s)P_m x\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|(P_k-P_{k-1})F_k(s)P_k x\|^2$ для $n>m$. В частности, существует предел $\lim_n F_n(s)P_n x \overset{\text{def}}{=} F(s)x$ для всех x, $x\in H$.

Построенная функция F слабо (на функционалах y, $y\in \bigcup_{k\ge 1} L_k$) дифференцируема: если $y\in L_k$ и $n\ge k$, то ввиду (В161) $F_n(s)^* y = F_k(s)^* y$ и $F_n'(s)^* y = F_k'(s)^* y$, что дает и равенство $F(s)^* y = F_k(s)^* y$, и дифференцируемость функции $s \longmapsto (F(s)x,y)$ при любом x, $x\in H$.

Ясно также, что F есть слабое (в смысле (В144) на функционалах из $\bigcup_{n\ge 1} L_n$) решение уравнения (здесь нужно использовать и то, что $\Omega(s)^* y = \Omega_n(s)^* y$ при $y\in L_n$). ●

В180. З а м е ч а н и е. Теорема В170 фактически дает корректное определение (методом редукции) мультипликативного интеграла $\overset{\frown}{\int_s^b} e^{-\Omega(t)dt}$ для функций Ω, удовлетворяющих условиям (В141)-(В143). Ниже мы используем это понятие под именем *слабого мультипликативного интеграла.*

Следующее утверждение В190 содержит общую форму эволюционного семейства в виде мультипликативного интеграла. Отметим еще, что существует некоторое обобщение этого понятия, так называемое хронологическое усреднение, которое позволяет изготавливать эволюционные семейства T_{rs}, исходя из произвольных двупараметрических семейств операторов U_{rs}, для которых сходится упомянутое усреднение:

$$T_{rs} = \lim U_{rr_1} U_{r_1 r_2} \dots U_{r_n s}, \tag{B181}$$

когда ранг дробления $r < r_1 < \dots < r_n < s$ стремится к нулю. Если $U_{rs} = \exp(-\Omega(s)(s-r))$ и функция $s \longmapsto \Omega(s)$ непрерывна, то предел (B181) существует и совпадает с $\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_r^s} e^{-\Omega(t)dt}$. См. об этом [7].

B190. С л е д с т в и е. *Если функция* Ω *такова, как в теореме* B170, *то соответствующее эволюционное семейство* T_{rt}, *определяемое уравнениями* (B111), (B112), *существует как слабый мультипликативный интеграл*

$$T_{rt} = \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_r^t} e^{-\Omega(s)ds}, \quad a \le r \le t \le b,$$

и является сжимающим: $\|T_{rt}\| \le 1$.

Утверждение немедленно следует из B170. ●

B195. **Индефинитная сжимаемость.** Стоит подчеркнуть еще раз, что основной вопрос, который обсуждался в п. B140-B190, - это *существование* решения уравнения (B145) и явная формула для него (в условиях (B141)-(B143)). Что же касается *сжимаемости* решения (т.е. свойства $\|F(s)\| \le 1$), то фактически еще из следствия B120 видно, как оно следует из уравнения и условия $\mathrm{Re}\,\Omega(s) \ge \mathbb{O}$ (предполагается, что $\Omega(s) \in L(H)$, $a \le s \le b$): $\frac{d}{ds}\|F(s)x\|^2 = 2\mathrm{Re}(\Omega(s)F(s)x,\ F(s)x) \ge 0$, откуда $\|F(s)x\|^2 \le \|F(b)x\|^2 = \|x\|^2$, $x \in H$.

Теперь мы хотим отметить, что только что приведенная элементарная выкладка может быть приспособлена и к условиям (B141)-(B142), причем так, чтобы получить сжимаемость решения не только в гильбертовой, но и в индефинитной метрике. Это последнее свойство будет использовано в приложениях, ч. 2. Коротко напомним некоторые определения в том виде, как они нам понадобятся; все справки об этом предмете см. в [1]. Пусть H - гильбертово пространство и $H_\pm$ - его подпространства такие, что $H = H_- \oplus H_+$. Положив $J = P_+ - P_-$, введем индефинитное скалярное произведение: $[x,y] = (Jx,y)$; $x,y \in H$, и обозначим пространство H, снабженное произведением $[\cdot,\cdot]$ символом IH. Формула $[Ax,y] = [x,A^c y]$ определяет для каждого оператора A, непрерывного в H, его индефинитный сопряженный A^c (равый, JA^*J). Как и в п. B140, будем предполагать, что заданы плотно определенные в H (замкнутые) операторы $\Omega(s)$, обладающие свойствами:

(B196) существуют замкнутые в H подпространства L_n такие, что $L_n \subset L_{n+1}$, $\mathrm{clos} \bigcup_n L_n = H$ и $\Omega(s)^c L_n \subset L_n$ при всех n и s;

(B197) $\mathrm{Re}[\Omega^c(s)x,x] \ge 0$ при $x \in \bigcup_{n \ge 1} L_n$;

(B198) $JP_n = P_n J$, где $P_n = P_{L_n}$ - ортопроектор на L_n.

Утверждение, которое нам будет нужно, состоит в следующем.

B199. Лемма. *Пусть выполнены условия* (B196)-(B198) *и пусть слабо дифференцируемая в* IH *функция* F *слабо над* $\bigcup_{n\ge1} L_n$ *удовлетворяет уравнению* $F'=\Omega F$, $F(b)=I$, *т.е.*

$$[F'(s)x,y] = [F(s)x,\ \Omega^c(s)y]; \quad x\in H, y\in \bigcup_{n\ge1} L_n.$$

Тогда $F(s)$ – J*-сжимающие операторы*: $[F(s)x,y]\le[x,y]$ *для всех* $x,y\in H$.

Доказательство. Пусть $x,y\in H$. Тогда

$$\frac{d}{ds}[P_nF(s)x,\ P_nF(s)x] = \frac{d}{ds}[F(s)x,\ P_nF(s)x] = [P_nF(s)x,\ \Omega^c(s)P_nF(s)x] +$$

$$+ [\Omega^c(s)P_nF(s)x,\ P_nF(s)x] = 2\mathrm{Re}[\Omega^cP_nFx,\ P_nFx] \ge 0$$

при всех $s, a\le s\le b$. Отсюда, $[P_nF(s)x,\ P_nF(s)x] \le [P_nx,P_nx]$ при всех s. Остается перейти к пределу по n. •

B200. Эволюционные квазиразложения. Теперь мы вернемся к квазиразложениям, порождаемым сжимающими цепями $\{T_s\}$ и соответствующими им эволюционными семействами $\{T_{rs}\}$. Напомним, что связь между ними $T_s=T_rT_{rs}$, $a\le r\le s\le b$ (вместе с условием $T_a=I$), включает и равенство $T_s=T_{as}$, $a\le s\le b$, и поэтому мы можем иметь дело сразу *с семейством* сжимающих цепей $\{T_{rs}\}_{s\ge r}$ и мерами $\mathcal{E}_r$ из B130 ($a\le r\le b$), что технически имеет некеоторые преимущества.

В следствии B130 вычислена плотность w_r меры $\mathcal{E}_r$, причем сразу в такой форме, которая позволяет использовать предложения B70 и B80 и получить явное коизометрическое L^2 представление комплементарных пространств $\mathcal{H}(T_{rt})$, $a\le r\le t\le b$. Именно, поскольку

$$w_r(s) = T_{rs}(2\mathrm{Re}\Omega(s))T_{rs}^*, \qquad r\le s\le b,$$

естественно определить функцию $\Delta(s)$ равенством

$$\Delta(s)\Delta(s)^* = 2\mathrm{Re}\Omega(s), \qquad a\le s\le b, \tag{B201}$$

и положить

$$v_r(s) = T_{rs}\Delta(s), \qquad r\le s\le b.$$

Тогда $w_r=v_rv_r^*$ и можно подставить эти значения в предложения B70 и B80.

B210. Теорема. *В обозначениях п.* B200 *пространство* $\mathcal{H}(T_{rb})$, $a\le r\le b$, *допускает квазиразложение*

$$\mathcal{H}(T_{rb}) = \int_r^b \mathcal{H}(r,s)ds, \qquad \mathcal{H}(r,s) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}(T_{rs}\Delta(s)),$$

или, иначе, любая функция y_r, $y_r\in L^2(H)=L^2(H,ds)$ *порождает элемент* x_r *пространства* $\mathcal{H}(T_{rb})$,

$$x_r = \int_r^b T_{rs}\Delta(s)y_r(s)\ ds, \tag{B211}$$

$$\|x_r\|^2_{\mathcal{H}(T_{rb})} \le \int_r^b \|y_r(s)\|^2\ ds. \tag{B212}$$

И обратно – любой вектор x_r, $x_r\in\mathcal{H}(T_{rb})$ *может быть представлен в этом виде, причем* *существует ровно одно представление* (B211), *для которого в* (B212) *имеет место знак равенства; если* $x_r=D^2_{T^*_{rb}}h$, *то эта „экстремальная" плотность* y_r *имеет вид* $y_r(s)=\Delta(s)^*T^*_{rs}h$, $r \le s \le b$. ●

B215. Дуальные эволюционные семейства. Может случиться так, что естественное эволюционное семейство будут образовывать не те операторы, которые мы хотим изучать, а сопряженные с ними. (Что в действительности имеет место, например, для операторов подстановки, определенных в I170, которые и будут ведущим примером во второй части работы).

Итак, пусть семейство C_{rs}, $a\le r\le s\le b$, удовлетворяет условиям $C_{rt}=C_{st}C_{rs}$, $C_{rr}=I$, т.е. семейство сопряженных сжатий является эволюционным:

$$C^*_{rt} = C^*_{rs}C^*_{st} .$$

Дуальным к этому семейству мы будем называть семейство T_{rs} , полученное из семейства C_{rs} заменой переменных в индексах

$$T_{rs} \overset{\text{def}}{=} C_{a+b-s,a+b-r} , \qquad a\le r\le s\le b.$$

Отметим, что оператор-функция $\Omega(s)$ (генератор семейства T_{rs}), определенная в лемме B110, простой заменой переменных получается из функции $\Omega_C(s)$ аналогично определяемой семейством C_{rs}

$$\Omega_C(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial C_{rs}}{\partial r}\bigg|_{r=s}.$$

Действительно,

$$\Omega(s) = -\frac{\partial T_{rs}}{\partial s}\bigg|_{r=s} = -\frac{\partial C_{a+b-s,a+b-r}}{\partial s}\bigg|_{r=s} = \Omega_C(a+b-s),$$

и, следовательно, $\Delta(s)=\Delta_C(a+b-c)$. Поэтому, если в формулах (B211),(B212) (при $r=a$) сделать замену переменной интегрирования $s \longmapsto a+b-s$ и функцию $y(a+b-s)$ снова обозначить буквой y, то для вектора

$$x = \int_a^b C_{sb}\Delta_C(s)y(s)ds$$

мы получим оценку, совпадающую с оценкой для эволюционных семейств:

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}(C_{ab})} \le \int_a^b \|y(s)\|^2 ds.$$

B220. Весовые квазиразложения. Теперь вернемся к интегральным представлениям (B211)-(B212) пространства $\mathcal{H}(T_{rb})$. Этим представлениям можно придать некоторые другие формы (см. об этом п. B84), одна из которых будет особенно удобной. Речь идет о квазиразложении

$$\mathcal{H}(T_{rb}) = \int_r^b T_{rs}\mathcal{M}(\Delta(s))\, ds$$

и соответствующем неравенстве

$$\Big\| \int_r^b T_{rs} g(s)ds \Big\|^2_{\mathcal{H}(T_{rb})} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Delta(s)} \, ds, \tag{B221}$$

которые сразу следуют из соображений, изложенных в п. B84. Чтобы извлечь максимум информации из неравенства (B221), мы рассмотрим всевозможные его „весовые" модификации, т.е. оценки того же интегрального оператора, но в нормах, порожденных другими операторными весами, скажем, ρ_r и $\Gamma(s)$, т.е. оценки вида

$$\Big\| \int_r^b T_{rs} g(s)ds \Big\|^2_{\rho r} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)} \, ds. \tag{B222}$$

Покажем сначала, что при определенных условиях этот подход равносилен намеченному в гл. I введению масштабных коэффициентов в пространстве H, т.е. интерпретации эволюционного семейства T_{rs} как действующего в шкале пространств $H(s) = \sigma(s)^{-1/2}H$ со скалярными произведениями $(x,y)_{H(s)} = (\sigma(s)x,y)_H$, $\sigma(s)\ge\mathbb{O}$,

$$T_{rs} : H(s) \longrightarrow H(r), \qquad a\le r\le s\le b. \tag{B223}$$

Следует подчеркнуть, что, на самом деле, мы при этом попрежнему останемся в рамках основного неравенства (B221), но введем лишь новый параметр, чтобы было удобнее пользоваться этим неравенством.

B230. Л е м м а. *Пусть T_{rs} – эволюционное семейство с суммируемым производящим оператором Ω, и пусть Γ – квадратично суммируемая оператор-функция в H. Тогда существует такая положительная оператор-функция σ, что неравенство* (B221) *для семейства* (B223) *(вместо $T_{rs}\in L(H)$) есть в точности весовое неравенство* (B222), *в котором $\rho(r)$ определяется функцией Γ по формуле*

$$\rho(r)\rho(r)^* = \int_r^b T_{rs}\Gamma(s)\Gamma(s)^* T^*_{rs} \, ds. \tag{B231}$$

Если обратимый положительный оператор $\sigma(r)$ выбран так, что оператор $\sigma(r)^{-1} - \rho(r)\rho(r)^*$ также обратим, то искомая функция σ определена на промежутке $[r,b]$ единственным образом, дифференцируема, операторы $\sigma(t)$ обратимы и находятся по формуле

$$\sigma(t)^{-1} = T^{-1}_{rt}\, \sigma(r)^{-1}\, T^{*-1}_{rt} - \int_r^t T^{-1}_{st}\, \Gamma(s)\Gamma(s)^* T^{*-1}_{st} \, ds. \tag{B232}$$

Отметим, что, хотя неравенство (B221) получено для семейства T_{rs}, действующего в (одном) пространстве H, оно в том же виде справедливо и для операторов, действующих в семействе пространств. Однако мы поступим по-другому – семейство (B223) заменим унитарно эквивалентным ему семейством $\tilde{T}_{rs}$, действующим в исходном пространстве H.

Отложим доказательство леммы B230 до п. B280, а пока выясним, при каких условиях семейство T_{rs} является сжимающим в шкале пространств $H(s)$.

B240. Л е м м а. *Пусть эволюционное семейство T_{rs} удовлетворяет условию* (B104), *и пусть $\sigma(s)$ – неотрицательная ограниченная оператор-функция,* *дифференцируемая в слабой операторной топологии. Определим пространство* $H(s)$ *как пополнение фактор-пространства* $H/\mathrm{Ker}\sigma(s)$ *по норме* $\|x\|^2_{H(s)}=(\sigma(s)x,x)$. *Тогда семейство* T_{rs} *задает сжимающее эволюционное семейство в шкале пространств* $H(s)$:

$$T_{rs} : H(s) \longrightarrow H(r), \qquad a\le r\le s\le b,$$

в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\Lambda(s) \overset{\text{def}}{=} \sigma'(s) + 2\mathrm{Re}[\sigma(s)\Omega(s)] \ge \mathbb{O}. \tag{B241}$$

Доказательство. Для того чтобы оператор T_{rs} задавал сжатие из $H(s)$ в $H(r)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$T^*_{rs}\sigma(r)T_{rs} \le \sigma(s), \qquad a\le r\le s\le b. \tag{B242}$$

Действительно, если это неравенство выполнено, то оператор T_{rs} переводит $\mathrm{Ker}\sigma(s)$ в $\mathrm{Ker}\sigma(r)$, а следовательно, корректно задает оператор из $H/\mathrm{Ker}\sigma(s)$ в $H(r)$. Неравенство (B242) можно переписать в квадратичных формах:

$$\|T_{rs}x\|^2_{H(r)} \le \|x\|^2_{H(s)}, \qquad x\in H/\mathrm{Ker}\sigma(s). \tag{B243}$$

Поэтому T_{rs} - сжимающий оператор из $H/\mathrm{Ker}\sigma(s)$ в $H(r)$, и по непрерывности он продолжается до сжатия, определенного на всем пространстве $H(s)$.

Нам, таким образом, нужно проверить равносильность условий (B241) и (B243).

Пусть выполнено условие (B241), тогда

$$\mathbb{O} \le T^*_{st}\Lambda(s)T_{st}=T^*_{st}\sigma'(s)T_{st} + T^*_{st}\,\sigma(s)\Omega(s)T_{st} + T^*_{st}\,\Omega(s)^*\sigma(s)T_{st}=\frac{\partial}{\partial s}\,[T^*_{st}\sigma(s)T_{st}]$$

в силу уравнения (B111). И следовательно,

$$\sigma(t) - T^*_{rt}\sigma(r)T_{rt} = \int\limits_r^t \frac{\partial}{\partial s}\,[T^*_{st}\sigma(s)T_{st}]ds \ge \mathbb{O}.$$

Теперь допустим, что выполнено условие (B243), которое мы перепишем в виде

$$([\sigma(s)-\sigma(r)]x,x) -(\sigma(r)[T_{rs}-I]x,x) - ([T^*_{rs}-I]\sigma(r)T_{rs}x,x) \ge \mathbb{O}, \quad x\in H.$$

Поделив это неравенство на $s-r$, устремляя s к r и пользуясь (B112), получаем

$$\sigma'(r) + \sigma(r)\Omega(r) + \Omega(r)^*\sigma(r) \ge \mathbb{O}. \quad \bullet$$

На примере предыдущей леммы мы видим, что существенную часть рассуждений занимает аккуратное оформление технических деталей, связанных, например, с необратимостью веса σ (факторизация по ядру, пополнение). Чтобы упростить формулировки и рассуждения, в дальнейшем мы будем предполагать операторы $\sigma(s)$ обратимыми. В тех приложениях, которые излагаются в ч.2, этого будет достаточно.

B250. Пересадка семейства T_{rs} в исходное пространство. Поскольку все формулы мы писали для эволюционных семейств, действующих в одном пространстве, построим в пространстве H эволюционное семейство $\tilde{T}_{rs}\in L(H)$, которое будет унитарно эквивалентно семейству $T_{rs}\in L(H(s),H(r))$.

Для этого рассмотрим произвольную дифференцируемую эрмитову факторизацию оператор-функции σ:

$$\sigma(s) = \tau(s)^*\tau(s), \tag{B251}$$

при этом операторы $\tau(s)$, как и $\sigma(s)$, будем предполагать обратимыми. Тогда неравенство (В242) можно переписать в виде

$$T^*_{rs}\ \tau(r)^*\tau(r)\ T_{rs} \le \tau(s)^*\tau(s),$$

что равносильно существованию сжатия $\tilde{T}_{rs}$, удовлетворяющего тождеству

$$\tau(r)\ T_{rs} = \tilde{T}_{rs}\tau(s). \tag{B252}$$

Это тождество представим в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H(s) & \xrightarrow{T_{rs}} & H(r) \\ \tau(s)\downarrow & & \downarrow\tau(r) \\ H & \xrightarrow{\tilde{T}_{rs}} & H \end{array} \tag{B253}$$

Операторы $\tau(s)$, задаваемые равенством (В251) как операторы в H, можно рассматривать и как унитарные отображения пространств $H(s)$ на H.

В254. Обозначения. В отличие от обычного знака *, которым мы обозначаем сопряженный оператор, символом [*] будем обозначать сопряжение в случае, если оператор задан на пространстве $H(s)$ и действует в какое-либо другое пространство. Так, например, $\tau(s)^{[*]}\in L(H,H(s))$ - сопряженный с унитарным оператором $\tau(s)\in L(H(s),H)$, а $T^{[*]}_{rs}\in L(H(r),H(s))$ - сопряженный с оператором $T_{rs}\in L(H(s),\ H(r))$.

Используя эти обозначения и формулу (В252), мы можем написать соотношения

$$\tilde{T}^*_{rs} = \tau(s)T^{[*]}_{rs}\tau(r)^{[*]} \tag{B255}$$

и

$$D_{\tilde{T}^*_{rs}} = \tau(r)D_{T^{[*]}_{rs}}\tau(r)^{[*]}. \tag{B256}$$

Вычислим теперь оператор-функции $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\Delta}$, ассоциированные с семейством $\tilde{T}_{rs}$. Коэффициент $\tilde{\Omega}$ в эволюционном уравнении $\dfrac{\partial\tilde{T}_{rs}}{\partial r} = \tilde{\Omega}(r)\tilde{T}_{rs}$ получим дифференцированием по r равенства (В252):

$$\tau'(r)T_{rs} + \tau(r)\Omega(r)T_{rs} = \tilde{\Omega}(r)\tilde{T}_{rs}\tau(s) = \tilde{\Omega}(r)\tau(r)T_{rs}.$$

Полагая теперь $r = s$, получаем

$$\tilde{\Omega}\tau = \tau' + \tau\Omega. \tag{B257}$$

Так же как в (В201) по оператору Ω определялся оператор Δ, зададим $\tilde{\Delta}$ аналогичным равенством

$$\tilde{\Delta}\ \tilde{\Delta}^* = 2\ \mathrm{Re}\ \tilde{\Omega}. \tag{B258}$$

Тогда, используя (В257), получаем

$$\tau^*\tilde{\Delta}\ \tilde{\Delta}^*\tau = \tau^*\Omega\ \tau + \tau^*\tilde{\Omega}^*\tau = \tau^*\tau' + \tau^*\tau\ \Omega + \tau^{*\prime}\tau + \Omega^*\tau^*\tau = \sigma' + \sigma\ \Omega + \Omega^*\sigma = \Lambda \tag{B259}$$

В260. Обозначение. Как уже отмечено в п. I100, символом $\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})$, следуя де Бранжу, будем обозначать пространство, которое является дополнительным пространству $T_{rb}H(b)$ в пространстве $H(r)$, т. е.

$$\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb}) = \mathcal{M}(D_{T^*_{[rb]}}).$$

Формула (В256) показывает, что оператор $\tau(r)$ осуществляет унитарную эквивалентность пространств $\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})$ и $\mathcal{H}(\tilde{T}_{rb})$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы написать оценку (В221) для семейства $\tilde{T}_{rs}$, и воспользовавшись унитарными операторами $\tau(s)$, записать ее в терминах семейства (В223).

В270. Л е м м а. *Пусть сжимающее эволюционное семейство* T_{rs} , $T_{rs}\in L(H)$, *удовлетворяет условию* (В104). *Пусть* σ *– слабо дифференцируемая функция, принимающая значения в множестве положительных обратимых операторов в* H. *Тогда если выполнено условие* (В241) *и* $\Gamma\Gamma^* = \sigma^{-1}\Lambda\ \sigma^{-1}$, *то для любой функции* g, $g\in L^2(\mathcal{M}(\Gamma(s)),ds)$ *вектор* $x(r)$,

$$x(r) = \int_r^b T_{rs}g(s)ds, \tag{В271}$$

лежит в пространстве $\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})$, *и справедлива оценка*

$$\|x(r)\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)} ds. \tag{В272}$$

Обратно, любой вектор из $\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})$ *допускает представления вида* (В271) *и среди них есть ровно одно, для которого в* (В272) *имеет место знак равенства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим семейство $\tilde{T}_{rs}$, определенное формулой (В252), в оценку (В221):

$$\Big\| \int_r^b \tilde{T}_{rs}\tilde{g}(s)ds \Big\|^2_{\mathcal{H}(\tilde{T}_{rb})} \le \int_r^b \|\tilde{g}(s)\|^2_{\tilde{\Delta}(s)} ds$$

и возьмем $\tilde{g}=\tau g$, тогда

$$\Big\| \tau(r)\int_r^b T_{rs}g(s)ds \Big\|^2_{\mathcal{H}(\tilde{T}_{rb})} \le \int_r^b \|\tau(s)g(s)\|^2_{\tilde{\Delta}(s)} ds \tag{В273}$$

Как уже отмечалось в В260, оператор $\tau(r)$ изометрически отображает $\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})(=D_{T^*_{[rb]}}H(r))$ на $\mathcal{H}(\tilde{T}_{rb})(=D_{\tilde{T}^*_{rb}}H)$, поэтому левые части неравенств (В272) и (В273) совпадают.

Теперь подставим в (В259) $\Lambda=\sigma\Gamma\Gamma^*\sigma$, тогда получим $\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}^* = \tau\Gamma\Gamma^*\tau^*$, в частности, можно выбрать $\tilde{\Delta}=\tau\Gamma$. Поскольку операторы $\tau(s)$ обратимы, $\|\tau(s)g(s)\|_{\tau(s)\Gamma(s)} = \|g(s)\|_{\Gamma(s)}$. ●

В280. Доказательство леммы В230. Если оператор-функция Ω является суммируемой, то соответствующее эволюционное семейство T_{rs} состоит из обратимых операторов. Поэтому имеет смысл выражение, стоящее в правой части равенства

(B232). Обозначим это выражение, например, символом $\hat{\sigma}(t)$. Тогда

$$T_{rt}\hat{\sigma}(t)T_{rt}^{*} = \sigma(r)^{-1} - \int_{r}^{t} T_{rs}\Gamma(s)\Gamma(s)^{*}T_{rs}^{*}ds \geq$$

$$\geq \sigma(r)^{-1} - \int_{r}^{b} T_{rs}\Gamma(s)\Gamma(s)^{*}T_{rs}^{*}ds = \sigma(r)^{-1} - \rho(r)\rho(r)^{*}.$$

Согласно условиям леммы, последний оператор обратим. Вместе с ним обратимыми будут операторы $T_{rt}\hat{\sigma}(t)T_{rt}^{*}$, а следовательно, и $\hat{\sigma}(t)$ при всех $t, r\leq t\leq b$.

Положим $\sigma(t)=\hat{\sigma}(t)^{-1}$ и проверим, что функция σ является искомой. Воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial A(t)^{-1}}{\partial t} = -A(t)^{-1}\,\frac{\partial A(t)}{\partial t}\,A(t)^{-1} \tag{B281}$$

для произвольной дифференцируемой обратимой оператор-функции $A(t)$. Для семейства T_{st}^{-1} получим уравнение (см. (B112))

$$\frac{\partial T_{st}^{-1}}{\partial t} = \Omega(t)T_{st}^{-1}.$$

Поэтому из определения функции $\hat{\sigma}$ вытекают ее дифференцируемость и соотношение

$$\hat{\sigma}' = \Omega\hat{\sigma} + \hat{\sigma}\Omega^{*} - \Gamma\Gamma^{*}.$$

Умножая это равенство с двух сторон на оператор σ и пользуясь соотношением (B281) для $\hat{\sigma}$, получаем

$$\Lambda = \sigma' + \sigma\Omega + \Omega^{*}\sigma = \sigma\Gamma\Gamma^{*}\sigma.$$

Таким образом, мы оказались в условиях леммы B270, которая переписывает оценку (B221) в виде (B272). Чтобы получить искомую формулу (B222), нужно лишь убедиться в том, что $\mathcal{H}_{\sigma(r)}^{\sigma(b)}(T_{rb}) = \mathcal{M}(\rho(r))$. Для этого воспользуемся сделанным в п. B260 замечанием о том, что оператор $\tau(r)$ унитарно переводит $\mathcal{H}_{\sigma(r)}^{\sigma(b)}(T_{rb})$ в $\mathcal{H}(\tilde{T}_{rb})$, и проверим справедливость равенства $\mathcal{H}(\tilde{T}_{rb}) = \mathcal{M}(\tau(r)\rho(r))$:

$$\tau(r)\rho(r)\rho(r)^{*}\tau(r)^{*} = \tau(r)\left[\sigma(r)^{-1} - T_{rb}\sigma(b)^{-1}T_{rb}^{*}\right]\tau(r)^{*} =$$

$$= I - \tau(r)T_{rb}\tau(b)^{-1}\tau(b)^{*-1}T_{rb}^{*}\tau(r)^{*} = I - \tilde{T}_{rb}\,\tilde{T}_{rb}^{*} = D_{\tilde{T}_{rb}^{*}}^{2}. \qquad \bullet$$

ГЛАВА C. МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

C1. Изменение точки зрения. В двух предшествующих главах была реализована следующая часть программы, объявленной во Введении:

- доказано общее неравенство КБШ для операторных мер;
- вычислена плотность сужения операторной меры на σ-алгебру, порожденную

упорядоченным семейством множеств, а неравенство КБШ интерпретировано как квазиортогональное (коизометрическое) разложение пространства;

- упомянутое вычисление плотности (производной Радона - Никодима) сведено к отысканию фундаментального решения некоторого эволюционного уравнения $x' = \Omega x - g$, а само неравенство КБШ представлено как оценка общего решения этого уравнения;

- исследовано возмущение заданного эволюционного семейства (фактически операторной меры), вносимое весовой оператор-функцией σ, а также описана еще одна специальная операция, приводящая по существу к загрублению неравенства КБШ и названная расслоением меры (в некотором смысле, расслоение - обратная операция к сужению на подалгебру).

Теперь в интересах приложений (см. ч.2), мы слегка изменим изложенную теорию и *вместо* оценок *всех* решений *фиксированного уравнения* займемся оценками *специальных решений* $r \longmapsto x(r)$, некоторым фиксированным образом связанных с эволюцией T_{rs} (в приложениях будет $T_{rs} = f\circ B_{rs}$, $x(r) = \log\frac{B_{rs}}{zB'_{rs}(0)}$), но уже *для всевозможных уравнений* некоторого выбранного класса $\mathcal{T}$. Основная трудность состоит при этом в том, что соответствующее интегральное представление для $x(r)$ (см. ниже формулу (C16)) далеко от изометрического (неравенство КБШ для $x(r)$ не обязано обращаться в равенство при фиксированной форме решения $x(s)$). Для построения оценки, точной на наперед заданном семействе траекторий $x(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, мы будем искать оператор-функцию σ так, чтобы $x(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, оказались „изометрическими" траекториями того же уравнения, но в весовой шкале пространств $H(s)=\sigma(s)^{-1/2}H$, а затем применим новую процедуру, называемую хронологическим усреднением. При этом усреднении произвольная эволюция $\{T_{rs}\}$ класса $\mathcal{T}$ будет разложена в хронологический интеграл (см. C160) по выбранным эволюциям $\{T_{rs}(\zeta)\}$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$. На уровне неравенства КБШ это фактически будет соответствовать расслоению меры $d(T_{rs}T^*_{rs})$ по мерам $d(T_{rs}(\zeta)T^*_{rs}(\zeta))$.

C10. Базовая оценка решения. Итак, мы будем оценивать норму вектор-функции x, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$x' = \Omega x - g, \tag{C11}$$

решения которого, используя эволюционное семейство T_{rs}, можно записать в виде

$$x(r) = T_{rb}x(b) + \int_r^b T_{rs}g(s)ds \overset{\text{def}}{=} x_1(r) + x_2(r). \tag{C12}$$

Зависимость от начального значения $x(b)$ входит в первое слагаемое x_1, которое лежит в $\mathcal{M}(T_{rb})$. Второе же слагаемое x_2 принадлежит дополнительному пространству $\mathcal{H}(T_{rb})$, если $g\in L^2(\mathcal{M}(\Delta(s)),ds)$ (что мы всегда будем предполагать выполненным) и

$$\left\| \int_r^b T_{rs}g(s)ds \right\|_{\mathcal{H}(T_{rb})} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Delta(s)}ds \tag{C13}$$

(см. теорему B210 и оценку (B221)).

Сразу перейдем к весовым оценкам в том виде, как это объяснялось в п. B220-B280, т. е. вместо оценки (C13) будем пользоваться неравенством (B272):

$$\| \int_r^b T_{rs}g(s)ds \|_{\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)}ds. \tag{C14}$$

Напомним формулу (A82) для вычисления дополнительной нормы:

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}(T)} = \sup \{\|h + Tx\|^2 - \|x\|^2 : x\in H\}.$$

В нашем случае, когда опоератор $T=T_{rb}$ действует из одного пространства в другое, $T_{rb}:H(b) \longrightarrow H(r)$, эта формула запишется в виде

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}(T_{rb})} = \sup \{\|h + T_{rb}x\|^2_{H(r)} - \|x\|^2_{H(b)} \ :\ x\in H(b)\}. \tag{C15}$$

Если теперь применить ее к вектору h, $h = \int_r^b T_{rs}g(s)ds$, вместо x писать $x(b)$, и ослабить неравенство (C14), опустив sup в (C15), то получим, используя (C12):

$$\|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(b)\|^2_{H(b)} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)}ds. \tag{C16}$$

Это неравенство формально слабее неравенства (C14), но последнее немедленно восстанавливается из (C16) - для этого достаточно в левой части перейти к supremum'у по всем $x(b)\in H(b)$.

C20. Прямое доказательство оценки (C16). Вычислим производную функции F,

$$F(r) \overset{\text{def}}{=} \|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(b)\|^2_{H(b)} - \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(r)}ds, \tag{C21}$$

предварительно напомнив, что $\|x(r)\|^2_{H(r)}=(\sigma(r)x(r),x(r))$, $\sigma(s)\Gamma(s)=\Lambda(s)^{1/2}$, и оператор $\Lambda(s)=\sigma(s)'+2\mathrm{Re}\sigma(s)\Omega(s)$ предполагается неотрицательным при всех s, $a\le s\le b$. Выбирая функцию h так, что $g=\Gamma h$ и $\|g\|_\Gamma=\|h\|$, и пользуясь уравнением (C11), получаем

$$F'=(\sigma' x,x)+2\mathrm{Re}(\sigma x',x)+\|g\|^2_\Gamma = (\sigma' x,x)+2\mathrm{Re}(\sigma\Omega x,x)-2\mathrm{Re}(\sigma\Gamma h,x)+\|h\|^2=$$

$$= (\Lambda x,x)-2\mathrm{Re}(\Lambda^{1/2}h,x)+\|h\|^2 = \|\Lambda^{1/2}x-h\|^2. \tag{C22}$$

Приведенная выкладка, обеспечивающая неотрицательность производной F', вместе с начальным условием $F(b)=0$ доказывает неравенство (C16). •

C30. Точность оценки (C16). Теперь мы хотим описать те вектор-функции x и веса σ, при которых в оценке (C16) имеет место равенство, т. е. найти те x и σ, при которых функция F, определенная в (C21), тождественно равна нулю. Так как $F(b)=0$, то в силу (C22) для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda^{1/2}x = h. \tag{C31}$$

Применяя к обеим частям равенства оператор $\Lambda^{1/2}$, получим

$$\Lambda x = \sigma\Gamma h = \sigma g. \tag{C32}$$

Вспоминая определение Λ (B241) и уравнение (C11), мы можем переписать это равенство в виде

$$\sigma' x + \sigma\Omega x + \Omega^*\sigma x = \sigma\Omega x - \sigma x'$$

или

$$(\sigma x)' + \Omega^{*}\sigma x = 0. \tag{C33}$$

Решение этого уравнения можно записать, используя эволюционное семейство T_{rs}:

$$\sigma(s)x(s) = T^{*}_{rs}\sigma(r)x(r), \qquad a\le r\le s\le b. \tag{C34}$$

(Мы воспользовались уравнением, сопряженным с (B112)).

Отметим, что уравнения (C31)-(C34) попарно равносильны. Действительно, единственное необратимое преобразование, которое было сделано, - это применение оператора $\Lambda^{1/2}$ при переходе от (C31) к (C32). Однако $\mathrm{Ker}\Gamma=\mathrm{Ker}\Lambda^{1/2}$ и, следовательно, выбранный вектор h ортогонален ядру $\mathrm{Ker}\Lambda^{1/2}$. С другой стороны, $\Lambda^{1/2}x\in\mathrm{Range}\Lambda^{1/2}\perp \mathrm{Ker}\Lambda^{1/2}$, и, таким образом, (C32) равносильно (C31).

Приведем, наконец, еще одну переформулировку условия (C34), воспользовавшись тождеством

$$T^{*}_{rs}\sigma(r) = \sigma(s)T^{[*]}_{rs},$$

в котором (как и в других местах) сопряжение [*] определено для операторов, действующих в паре пространств: $H(s) \longrightarrow H(r)$. Именно,

$$x(s) = T^{[*]}_{rs}x(r).$$

Соберем теперь полученные результаты в следующей теореме.

C40. Т е о р е м а. *Пусть семейство* T_{rs} *и оператор-функции* σ, Γ, Λ,

$$\Lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \sigma' + 2\mathrm{Re}\sigma\Omega, \tag{C41}$$

$\Lambda=\sigma\Gamma\Gamma^{*}\sigma$, *удовлетворяют условиям леммы* B270. *Тогда для любой вектор-функции* g, $g\in L^2(\mathcal{M}(\Gamma(s)),ds)$, *решение уравнения*

$$x' = \Omega x - g \tag{C42}$$

выражается через семейство T_{rs} *формулой*

$$x(r) = T_{rb}x(b) + \int_r^b T_{rs}g(s)ds. \tag{C43}$$

и для него имеет место оценка

$$\|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(b)\|^2_{H(b)} \le \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Gamma(s)}\, ds. \tag{C44}$$

Равенство достигается в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(C45) $(\sigma x)'+\Omega^{*}\sigma x = 0$;

(C46) $\sigma(s)x(s) = T^{*}_{rs}\sigma(r)x(r)$, $r \le s \le b$;

(C47) $x(s) = T^{[*]}_{rs}x(r)$, $r \le s \le b$. ●

C50. Использование выпуклой структуры. Роль выпуклости неравенств (C14), (C16) и (C44) относительно Ω и g подробно обсуждалась во Введении (п. I120). Теперь же отметим только (еще раз), что общей базой для использования выпуклой структуры является выпуклость (относительно Ω) условий $\mathrm{Re}\Omega(s)\ge\mathbb{O}$ и (в весовом случае) $\Lambda(s)\ge\mathbb{O}$.

Рассмотрим следующую общую ситуацию. Пусть $\mathfrak{Z}$ - некоторое измеримое пространство, и пусть для каждого s, $a\le s\le b$, фиксировано некоторое множество операторов $\Xi_{ex}(s)$, параметризованное множеством $\mathfrak{Z}$:

$$\Xi_{ex}(s) = \{\Omega(s,\zeta):\ \zeta\in\mathcal{Z}\};$$

причем $\mathrm{Re}\,\Omega(s,\zeta)\geq\mathbb{O}$ при всех s и ζ. Положим

$$\Xi(s) = \mathrm{conv}\ \Xi_{ex}(s)$$

(замкнутая выпуклая оболочка), и впредь будем рассматривать множество эволюций $\mathcal{T}$, определяемое генераторами Ω такими, что

$$\Omega(s) \in \Xi(s), \qquad a \leq s \leq b.$$

При небольших дополнительных предположениях (скажем, предположении слабой компактности множеств $\Xi(s)$) существуют вероятностные меры μ_s на множестве $\mathcal{Z}$ такие, что

$$\Omega(s) = \int_{\mathcal{Z}} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta), \ \ a \leq s \leq b. \tag{C51}$$

Рассмотрим теперь усредненное эволюционное уравнение

$$x' = \Omega x - g, \tag{C52}$$

где „управление" g также записано формулой вида (C51):

$$g(s) = \int_{\mathcal{Z}} g(s,\zeta)d\mu_s(\zeta), \qquad a \leq s \leq b. \tag{C53}$$

Имеет место следующее утверждение.

C60. Теорема. *Пусть функции $\Omega(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathcal{Z}$, порождают дифференцируемые в смысле* (B104) *эволюционные семейства, пусть σ – обратимый дифференцируемый операторный вес* ($\sigma(s)\geq\mathbb{O}$), *и соответствующие генераторам $\Omega(\cdot,\zeta)$ оператор-функции $\Lambda(\cdot,\zeta)$ (см., например,* (C41)) *являются неотрицательными, и пусть операторы $\Gamma(s,\zeta)$ таковы, что*

$$\Lambda(s,\zeta) = \sigma(s)\Gamma(s,\zeta)\Gamma(s,\zeta)^*\sigma(s).$$

Если функция Ω определена формулой (C51) *и соответствующая ей эволюция T_{rs}* (см. (B111)) *дифференцируема в смысле* (B104), *то для любого семейства вектор-функций $g(\cdot,\zeta)$, $g(\cdot,\cdot)\in L^2(\mathcal{M}(\Gamma(s,\zeta)),d\mu_s(\zeta)ds)$, функция g из* (C53) *принадлежит пространству $L^2(\mathcal{M}(\Gamma(s)),ds)$, и решение x уравнения* (C52) *допускает оценку*:

$$\|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(b)\|^2_{H(s)} \leq \int_r^b \int_{\mathcal{Z}} \|g(s,\zeta)\|^2_{\Gamma(s,\zeta)}d\mu_s(\zeta)ds. \tag{C61}$$

Доказательство основано на возможности расслоения соответствующей меры, как это описано в п. B84–B90.

Поскольку меры μ_s вероятностные, имеют место разложения

$$\Lambda(s) = \int_{\mathcal{Z}}\Lambda(s,\zeta)d\mu_s(\zeta) = \sigma'(s) + 2\mathrm{Re}\left[\sigma(s)\int_{\mathcal{Z}}\Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta)\right]$$

и

$$\Gamma(s)\Gamma(s)^{[*]} = \int_{\mathcal{Z}} \Gamma(s,\zeta)\Gamma(s,\zeta)^{[*]}d\mu_s(\zeta).$$

Осталось воспользоваться формулами (B91) и (B92), где положить $v_2(s)=\Gamma(s)$, $u_1(s,\zeta)=I$, $u_2(s,\zeta)=\Gamma(s,\zeta)$. Тогда (B92) примет вид

$$\|g(s)\|^2_{\Gamma(s)} \le \int_{\mathfrak{Z}} \|g(s,\zeta)\|^2_{\Gamma(s,\zeta)} d\mu_s(\zeta).$$

После подстановки этого неравенства в (C44) получим требуемую оценку (C61). •

C70. Выбор управлений $g(\cdot,\zeta)$. Как уже было отмечено во Введении, для получения точных неравенств вида (C61) базовые управления $g(\cdot,\zeta)$ следует выбирать так, чтобы решения $x=x(\cdot,\zeta)$ были „изометрическими" траекториями уравнения

$$x' = \Omega(\cdot,\zeta)x - g(\cdot,\zeta), \tag{C71}$$

т.е. чтобы для них неравенство (C44) обращалось в равенство. В приложениях мы делаем этот выбор в обратном порядке: *назначаются „изометрические" траектории* $x(\cdot,\zeta)$, а управления $g(\cdot,\zeta)$ находятся из уравнения (C71), где положено $x=x(\cdot,\zeta)$.

Заметим еще, что „изометричность" траекторий, удовлетворяющих условиям (C45)-(C47), можно понимать не только в том смысле, что отображение $\{x(b),g\}\longmapsto x(r)$, $a\le r\le b$, переводящее пару „начальное условие + управление" в соответствующую траекторию, изометрично относительно выбранных норм: $\|x(r)\|^2 = \|x(b)\|^2 + \int_r^b \|g(s)\|^2_{\Delta(s)}ds$ (пишем для простоты безвесовой вариант). На самом деле, вдоль такой траектории $x(\cdot)$ совпадают дифференциалы меры $\mathcal{E}_r$ и длины вектора: из (C46) имеем $x(t)=T^*_{rt}x(r)$, $r\le t$, и потому $\|x(r)\|^2 - \|x(b)\|^2 = \|D^2_{T^*_{rt}}x(b)\|^2 = (\mathcal{E}_r((r,t])x(r),x(r))$, что дает $\left(-\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2\right)\Big|_{t=r} = \left(\frac{d\mathcal{E}_r}{dt}\Big|_{t=r}x(r),x(r)\right)$.

C80. С л е д с т в и е. *Пусть* $\Omega(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, *и* σ *– таковы, как в теореме* C60, *и пусть* $x(\cdot,\zeta)$ *– дифференцируемые вектор-функции, удовлетворяющие уравнениям*

$$(\sigma x(\cdot,\zeta))' + \Omega(\cdot,\zeta)^*\sigma x(\cdot,\zeta)\equiv\mathbb{O}, \tag{C81}$$

а функции $g(\cdot,\zeta)$ *найдены из* (C71), *где* $x=x(\cdot,\zeta)$. *Тогда для любого семейства вероятностных мер* μ_s *на множестве* $\mathfrak{Z}$, *для которого* (C51) *определяет дифференцируемую эволюцию, решение* x *уравнения* (C52) *с управлением* (C53) *допускает оценку*

$$\|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(b)\|^2_{H(b)} \le \int_r^b \int_{\mathfrak{Z}} \left(-\frac{\partial}{\partial s}\|x(s,\zeta)\|^2_{H(s)}\right)d\mu_s(\zeta)ds \le$$

$$\le \int_r^b \sup_\zeta \left(-\frac{\partial}{\partial s}\|x(s,\zeta)\|^2_{H(s)}\right)ds. \tag{C82}$$

Для тривиальных семейств $\mu_s\equiv\delta_\xi$, $a\le s\le b$ (δ_ξ *– мера Дирака в точке* ξ, $\xi\in\mathfrak{Z}$), *первое из этих неравенств обращается в равенство.*

Это утверждение сразу следует из предыдущего, если заметить, что (C81) влечет (по теореме C40)

$$\|g(s,\zeta)\|^2_{\Gamma(s,\zeta)} = -\frac{\partial}{\partial s}\|x(s,\zeta)\|^2_{H(s)}. \qquad \bullet$$

C85. Замечание. Стоит еще раз отметить (см. об этом п. С10), что неравенства (С44), (С61) и (С82) останутся верными, если левые их части заменить на комплементарную норму $\|\cdot\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(b)}_{\sigma(r)}}$ вектора

$$x(r) - T_{rb}x(b) = \int_r^b T_{rs} \int_{\mathfrak{Z}} g(s,\zeta)d\mu_s(\zeta)ds. \tag{C86}$$

C90. Унитарная орбита. Оценка (С82) существенно упростится, если „изометрические" траектории $x(\cdot,\zeta)$ унитарно эквивалентны ($\|x(s,\zeta)\|_{H(s)}=\|x(s,\zeta')\|_{H(s)}$). Этот случай имеет место, если базовые эволюции $\Omega(\cdot,\zeta)$ порождаются действием некоторого семейства унитарных операторов $u(\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, т. е. если

$$\Omega(s,\zeta) = u(\zeta)\Omega_0(s)u(\zeta)^*, \qquad g(s,\zeta) = u(\zeta)g_0(s), \tag{C91}$$

где Ω_0, g_0 - фиксированные оператор- и вектор-функция. Тогда решения $x = x(\cdot,\zeta)$ уравнений

$$x' = \Omega(\cdot,\zeta)x - g(\cdot,\zeta)$$

связаны с решением x_0 уравнения

$$x_0' = \Omega_0 x_0 - g_0 \tag{C92}$$

формулой

$$x(s,\zeta) = u(\zeta)x_0(s), \qquad a \le s \le b. \tag{C93}$$

Кроме того, если $\Lambda_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma' + 2\mathrm{Re}\sigma\Omega_0 \ge \mathbb{O}$, то и $\Lambda(\cdot,\zeta) = \sigma' + \mathrm{Re}\sigma\Omega(\cdot,\zeta) = u(\zeta)\Lambda_0 u(\zeta)^* \ge \mathbb{O}$. Таким образом, *в случае* (С91) *неравенство* (С82) *переписывается в виде*

$$\|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(b)\|^2_{H(b)} \le \|x_0(r)\|^2_{H(r)} - \|x_0(b)\|^2_{H(b)} \tag{C94}$$

(для любого решения x уравнения (С52), (С53)), *причем для траекторий* (С93) *это неравенство превращается в равенство.* Разумеется, уравнения для „изометрических" траекторий (С81) *предполагаются выполненными*, и, как уже отмечалось, мы вынуждены рассматривать их как уравнения относительно оператор-функции σ.

Теперь эти уравнения имеют вид

$$(u(\zeta)^*\sigma\, u(\zeta)x_0)' + \Omega_0^*(u(\zeta)^*\sigma\, u(\zeta)x_0) = \mathbb{O}, \tag{C95}$$

$\zeta\in\mathfrak{Z}$. Без дополнительных предположений об операторах $u(\zeta)$ (или, в общем случае, о функциях $x(\cdot,\zeta)$) эта система уравнений может оказаться переопределенной.

C100. Групповая структура. В приложениях к однолистным функциям (ч. 2) семейство $\{u(\zeta):\zeta\in\mathfrak{Z}\}$ всегда будет *коммутативной компактной группой* унитарных операторов в H. В этом случае если система (С95) имеет решение σ, то она имеет и решение σ_*, перестановочное со всеми операторами $u(\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$:

$$\sigma_*(s)u(\zeta) = u(\zeta)\sigma_*(s), \qquad a\le s\le b,\ \zeta\in\mathfrak{Z}. \tag{C101}$$

Чтобы увидеть это, достаточно проинтегрировать уравнения (С95) по мере Хаара группы $\mathfrak{Z}$: оператор-функция

$$\sigma_*(s) = \int_{\mathfrak{Z}} u(\zeta)^* \sigma(s) u(\zeta) d\zeta \tag{C102}$$

будет, очевидно, обладать нужными свойствами. На самом деле, оператор в правой части (C102) есть просто диагональная часть $\operatorname{diag}\,\sigma(s)$ оператора $\sigma(s)$ в ортогональном базисе $\{e_\alpha\}$, составленном из собственных векторов группы $\{u(\zeta):\zeta\in\mathfrak{Z}\}$:

$$u(\zeta)e_\alpha = \alpha(\zeta)e_\alpha, \quad \zeta\in\mathfrak{Z}, \tag{C103}$$

где α пробегает группу (часть группы) характеров группы $\mathfrak{Z}$. Легко видеть, что оператор $\operatorname{diag}\sigma(s)$ сохраняет основные свойства весовой функции $\sigma(s)$ (он положителен, если $\sigma(s)\ge\mathbb{O}$; он обратим, если обратим $\sigma(s)$).

С другой стороны, уравнение

$$(\sigma x_0)' + \Omega_0^*(\sigma x_0) \equiv \mathbb{O} \tag{C104}$$

обязательно имеет диагональное решение (диагональное относительно любого наперед заданного ортогонального базиса $\{e_\alpha\}$). При этом вектор-функция σx_0 однозначно определена уравнением (C104) и начальным условием $\sigma(a)x_0(a)$, а если все коэффициенты Фурье $(x_0(s),e_\alpha)$ отличны от нуля, то однозначно определены и операторы $\sigma(s)$. Если в качестве базиса выбран базис из собственных векторов (C103), то ясно, что полученные операторы $\sigma(s)$ обладают свойством перестановочности (C101).

Суммируем часть изложенной теории в виде следующего утверждения.

C110. Теорема. *Пусть $\{u(\zeta):\zeta\in\mathfrak{Z}\}$ – коммутативная компактная группа унитарных орператоров в гильбертовом пространстве H, и пусть оператор-функция Ω_0, $\operatorname{Re}\Omega_0(s)\ge\mathbb{O}$ $(a\le s\le b)$ порождает дифференцируемую эволюцию в H. Пусть, далее, дифференцируемая H-значная функция x_0 такова, что диагональное решение σ уравнения*

$$(\sigma x_0)' + \Omega_0^*(\sigma x_0) \equiv \mathbb{O}$$

поточечно положительно и обратимо, неотрицательна оператор-функция Λ_0,

$$\Lambda_0(s) = \sigma'(s) + 2\operatorname{Re}\sigma(s)\Omega_0(s) \ge \mathbb{O}, \qquad a \le s \le b,$$

а функция g_0, определяемая из уравнения $x_0'=\Omega_0 x_0 - g_0$, принадлежит пространству $L^2(\mathcal{M}(\Gamma_0(s)),ds)$, где $\Gamma_0(s)\Gamma_0(s)^*=\sigma(s)^{-1}\Lambda_0(s)\sigma(s)^{-1}$. Пусть, далее, семейство вероятностных мер μ_s(на группе $\mathfrak{Z}$) таково, что оператор-функция Ω,

$$\Omega(s) = \int_{\mathfrak{Z}} u(\zeta)^*\Omega_0(s)u(\zeta)d\mu_s(\zeta),$$

порождает дифференцируемую эволюцию T_{rs}, и пусть, наконец,

$$g(s) = \int_{\mathfrak{Z}} u(\zeta)g_0(s)d\mu_s(\zeta), \qquad a \le s \le b.$$

Тогда для решения x уравнения

$$x' = \Omega x - g$$

при всех r и s, $a\le r\le s\le b$, имеют место неравенства

$$\|x(r)\|^2_{H(r)} - \|x(s)\|^2_{H(s)} \le \|x(r)-T_{rs}x(s)\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(s)}_{\sigma(r)}(T_{rs})} \le \|x_0(r)\|^2_{H(r)}-\|x_0(s)\|^2_{H(s)},$$

которые при $\mu_s \equiv \delta_\xi, \xi\in\mathfrak{Z}$ (т.е. при $x(s)=u(\xi)x_0(s)$, $a\le s\le b$) *переходят в равенства.* •

C120. З а м е ч а н и е. В частном случае $x_0(s)\equiv\text{const}$, который будет важен для доказательства неравенства де Бранжа, имеем $g_0(s)=\Omega_0(s)x_0$ и

$$x(r) - T_{rs}x(s) = \int_r^s T_{r\alpha}\left(\int_{\mathfrak{Z}} u(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\right)\Omega_0(\alpha)x_0 d\alpha. \tag{C121}$$

C130. Хронологическое усреднение. Для завершения картины (но не для получения новых оценок или улучшения старых) мы разложим эволюционное семейство T_{rs} , порождаемое генератором $\Omega(\cdot)$,

$$\Omega(s) = \int_{\mathfrak{Z}} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta), \tag{C131}$$

в своего рода мультипликативный интеграл по элементарным эволюциям $T_{rs}(\zeta)$, соответствующим $\Omega(\cdot,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$. Тем самым правые части формул (C86) и (C121) будут записаны полностью в терминах этих элементарных эволюций. Слова о „мультипликативном усреднении" решений уравнения

$$x' = \Omega x - g$$

при обычном (аддитивном) усреднении генератора $\Omega(\cdot)$ относятся, конечно, не к самим вектор-функциям x, а к соответствующим фундаментальным решениям (эволюциям) T_{rs},

$$\frac{\partial}{\partial r} T_{rs} = \Omega(r)T_{rs}\ , \qquad a \le r \le s \le b,$$

$T_{ss}\equiv I$. Ясно, что для генераторов Ω_1,Ω_2 с попарно коммутирующими значениями ($\Omega_i(r)\Omega_j(s) = \Omega_j(s)\Omega_i(r)$ при всех r,s и $1\le i,j\le 2$) арифметическому среднему $\Omega=\frac{1}{2}(\Omega_1+\Omega_2)$ соответствует геометрическое (мультипликативное) среднее эволюций $T_{rs} = (T_{rs}(1)T_{rs}(2))^{1/2}$. Точно так же интегральному среднему $\Omega(s) = \int_{\mathfrak{Z}}\Omega(s,\zeta)d\mu(\zeta)$ при аналогичном условии попарной коммутации соответствует мультипликативный интеграл эволюций

$$T_{rs} = \int_{\mathfrak{Z}} T_{rs}(\zeta)^{d\mu(\zeta)}.$$

В более общих случаях следует использовать хронологическое усреднение и хронологический интеграл, которые мы сейчас опишем. При этом мы не будем гнаться за максимальной возможной общностью, а рассмотрим лишь случай *гладких* эволюций.

Напомним определение хронологического усреднения, упомянуторе в п. B180. О подробностях и об истории вопроса см. [7], гл. VI. Пусть U_{rs}, $a\le r\le s\le b$ - семейство (ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве H, $U_{ss}\equiv I$, $\tau = \{a=t_0<t_1\ldots<t_n=b\}$ - некоторое разбиение, и пусть

$$U_{rs}(\tau) = U_{rt_j}\overset{\curvearrowright}{\prod_{k=j}^{m-1}} U_{t_k t_{k+1}} U_{t_m s}$$

при $t_{j-1}<r\le t_j<t_m\le s<t_{m+1}$. Если существует предел

$$T_{rs}x = \lim_{\tau} U_{rs}(\tau)x, \quad x\in H, \quad r \le s, \tag{C132}$$

по направлению всех разбиений, то он называется *хронологическим усреднением* семейства U_{rs}.

Если семейства $U_{rs}(\tau)$ равномерно ограничены (и усреднение существует), *то* T_{rs} *– эволюционное семейство:* $T_{rt}=T_{rs}T_{st}$, $r\le s\le t$; $T_{ss}\equiv I$.

Достаточным условием существования предела (C132) является уже упомянутая равномерная ограниченность $\sup\{\|U_{rs}(\tau)\|:\ \tau; r\le s\}<\infty$ (которая следует, например, из неравенства $\|U_{rs}\|\le e^{c(s-r)}$) вместе с условием

$$\|U_{rt} - U_{rs}U_{st}\| \le \mathrm{const}(s-r)(t-s), \quad r \le s \le t. \tag{C133}$$

Некоторые частные случаи хронологического усреднения хорошо известны, см. [7]. Один из них – мультипликативный интеграл

$$T_{rt} = \widetilde{\int_r^t} e^{-\Omega(s)ds} \tag{C134}$$

был уже упомянут в п. B180 как хронологическое усреднение семейства $U_{rs}=\exp(-\Omega(r)(s-r))$, $r\le s$. Отметим, однако, что мультипликативный интеграл как предел произведений (B153) существует в более широком классе случаев, чем это обеспечивает общее условие (C133), см. B140–B190, а также [3], [6], [15].

C140. Хронологическое произведение двух эволюционных семейств $T_{rs}(1)$ и $T_{rs}(2)$ определяется как хронологическое усреднение произведения $U_{rs}=T_{rs}(1)T_{rs}(2)$, $r\le s$.

Обозначение: $$T_{rs}(1) \circledast T_{rs}(2). \tag{C141}$$

Нетрудно видеть, что оценка $\|I-T_{rs}(j)\| \le c(s-r)$, $j = 1,2$, обеспечивает выполнение условия (C133), а значит, и существование произведения (C141). Если производящие операторы $\Omega_j(\cdot)$ семейств $T_{rs}(j)$ равномерно ограничены (на отрезке $[a,b]$), то нужные оценки, очевидно, имеют место. Проверяется, что эволюция $T_{rs}=T_{rs}(1)\circledast T_{rs}(2)$ имеет своим генератором сумму $\Omega_1+\Omega_2$:

$$\frac{\partial}{\partial r} T_{rs} = (\Omega_1(r)+\Omega_2(r))T_{rs} .$$

На самом деле, как эта формула, так и существование произведения (C141) могут быть доказаны при значительно более общих предположениях, см. [5], [7].

Самый известный пример хронологического произведения доставляет формула Ли-Троттера

$$e^{A+B} = \lim_{n} \left(e^{A/n}\cdot e^{B/n}\right)^n,$$

верная не только для непрерывных A и B, но и для генераторов ограниченных полугрупп (см. [14], [15]).

C150. Хронологическая степень эволюционного семейства T_{rs}, удовлетворяющего уравнению $\partial T_{rs}/\partial r = \Omega(r)T_{rs}$, проще всего может быть определена как эволюция, задаваемая производящим оператором $\alpha\Omega(\cdot)$, $\alpha>0$. Остается, однако, вопрос существования, равно как и при попытке „арифметического" определения степени, исходя из хронологического произведения (C141): сначала определяется натуральная степень $T_{rs}^{\circledast n}$, затем корень степени n: $T_{rs}^{\circledast\frac{1}{n}}$, затем рациональная степень $T_{rs}^{\circledast\frac{k}{n}}$ и, наконец, вещественная хронологическая степень $T_{rs}^{\circledast\alpha}$, $\alpha>0$.

Первое, конструктивное определение требует некоторых условий на производящий оператор Ω. Если, например, выполнены какие-нибудь условия существования интеграла (C134) (см. B140-B190, [3],[6],[15]), то они выполнены и для функции $\alpha\Omega$, $\alpha>0$, и позволяют, тем самым, *определить хронологическую степень:*

$$T_{rt}^{\circledast\alpha} = \overset{\leftarrow}{\int_r^t} e^{-\alpha\Omega(s)ds}, \qquad r \le t.$$

C160. Хронологический интеграл *семейства эволюций* $T_{rs}(\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, по мере μ на измеримом пространстве $\mathfrak{Z}$ может быть определен теперь как предел частичных произведений Римана

$$\lim_{\tau} \left(T_{rs}(\zeta_1)^{\circledast\mu(\delta_1)} \circledast T_{rs}(\zeta_2)^{\circledast\mu(\delta_2)} \circledast \dots \circledast T_{rs}(\zeta_n)^{\circledast\mu(\delta_n)}\right) \tag{C161}$$

по некоторому (измельчающемуся) направлению разбиений $\tau=\{\delta_n\}$ пространства $\mathfrak{Z}$; здесь $\zeta_i\in\delta_i$. Для того чтобы иметь в виду что-то определенное, мы приведем сейчас одно достаточное условие существования такого предела, который будем обозначать символом

$$T_{rs} = \int_{\mathfrak{Z}}^{\circledast} T_{rs}(\zeta)^{\circledast d\mu(\zeta)}. \tag{C162}$$

Конечно, эта усредненная эволюция T_{rs} должна будет иметь своим генератором среднее $\Omega = \int_{\mathfrak{Z}} \Omega(\cdot,\zeta)d\mu(\zeta)$ производящих операторов $\Omega(\cdot,\zeta)$ для эволюций $T_{rs}(\zeta)$. На самом деле, как это было в основной части этой главы, нам нужно охватить и случаи усреднений семейства $\Omega(s,\zeta)$, $\zeta\in\mathfrak{Z}$, в которых усредняющая мера зависит от s, см. (C131). Это будет сделано вместе с отысканием условий существования предела (C161). Получаемое ниже условие существования хронологического интеграла (C162) нисколько не претендует на степень общности, принятую в теории дифференциальных уравнений (см., скажем условия существования мультипликативных интегралов в цитированных выше источниках), но, напротив, имеет чисто иллюстративный характер, скорее, для обозначения конструкции, чем для применения. Это условие охватывает, однако, случай, в котором мы будем использовать мультипликативное усреднение в ч.2 (непрерывность по ζ и суммируемость по s „эталонных" генераторов $\Omega(s,\zeta)$).

C170. Л е м м а. *Пусть $\mathfrak{Z}$ – компактное метрическое пространство, и пусть $\Omega(s,\zeta)$ – оператор-функция на произведении $[a,b]\times\mathfrak{Z}$, непрерывная по ζ и суммируемая по s в том смысле, что*

$$\int_a^b \max_\zeta \|\Omega(s,\zeta)\| ds < \infty. \tag{C171}$$

Пусть, далее $\mu_s, a\le s\le b$, *– измеримое семейство вероятностных мер на* $\mathfrak{Z}$ *и* $\tau_n=\{\delta_{i,n}: 1\le i\le n\}$ *– измельчающаяся последовательность разбиений пространства* $\mathfrak{Z}$ ($\lim\limits_n \max\limits_i \operatorname{diam} \delta_{i,n}=0$). *Пусть, наконец,*

$$\Omega(s) = \int_{\mathfrak{Z}} \Omega(s,\zeta) d\mu_s(\zeta), \qquad \Omega_n(s) = \sum_{i=1}^n \Omega(s,\zeta_{i,n})\mu_s(\delta_{i,n}),$$

где $\zeta_{i,n}\in\delta_{i,n}$. *Тогда*

$$\lim \int_a^b \|\Omega(s) - \Omega_n(s)\| ds = 0. \tag{C172}$$

Доказательство. Ввиду непрерывности функций $\Omega(s,\cdot)$ имеем $\lim\limits_n \Omega_n(s) = \Omega(s)$ при всех $s\in[a,b]$ и, кроме того, $\|\Omega_n(s)\| \le \max\limits_\zeta \|\Omega(s,\zeta)\|$. Поэтому (C172) имеет место по теореме Лебега о доминантной сходимости. ●

C180. Лемма. *Если* Ω_n, Ω *– суммируемые на промежутке* $[a,b]$ *оператор-функции и выполнено условие* (C172), *то соответствующие эволюции* $(T_{rs})_n$, $\partial(T_{rs})_n/\partial r=\Omega_n(r)(T_{rs})_n$, *равномерно сходятся к* T_{rs}, $\partial T_{rs}/\partial r=\Omega(r)T_{rs}$:

$$\lim_n \|(T_{rs})_n - T_{rs}\| = 0, \qquad r \le s.$$

Доказательство является небольшой модификацией (загрублением) известного рассуждения, [10]. Однородное уравнение $x'=\Omega x$ рассматриваем как неоднородное: $x'=\Omega_n x+g$, $g=(\Omega-\Omega_n)x$. Тогда для всех r и t, $a\le r\le t\le b$, и любого начального значения x_0 получим

$$T_{rt}x_0 = (T_{rt})_n x_0 - \int_r^t (T_{rs})_n (\Omega(s)-\Omega_n(s)) T_{st} x_0 ds,$$

откуда

$$\|T_{rt}x_0 - (T_{rt})_n x_0\| \le \|x_0\| \cdot \sup_{r,s,n} \|(T_{rs})_n\| \cdot \sup_{r,s} \|T_{rs}\| \cdot \int_a^b \|\Omega-\Omega_n\| ds.$$

Но нормы $\|(T_{rs})_n\|$, $\|T_{rs}\|$ ограничены в совокупности (не превосходят, скажем, $\exp(\sup\limits_n \int_a^b \|\Omega_n\| ds)$), что и доказывает лемму. ●

C190. Теорема. *Пусть выполнены условия леммы* C170 *и пусть меры* μ_s *не зависят от* s, $\mu_s\equiv\mu$ ($a\le s\le b$). *Тогда для любой последовательности измельчающихся разбиений* τ_n *существует предел* (C161), *определяющий хронологический интеграл* (C162). *Эволюция* (C162) *имеет своим производящим оператором среднее* $\Omega = \int_{\mathfrak{Z}} \Omega(\cdot,\zeta) d\mu(\zeta)$.

В общем случае измеримого семейства вероятностных мер μ_s *также существует предел эволюций* $(T_{rs})_n$, *генераторами которых являются скользящие средние* $\Omega_n(s) = \sum_{i=1}^n \Omega(s,\zeta_{i,n})\mu_s(\delta_{i,n})$. *Производящий оператор семейства* T_{rs} *есть* $\Omega(s) =$

$$= \int_{\mathfrak{Z}} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta), \quad a\le s\le b. \quad \bullet$$

C200. Заключительные замечания. Этот последний предел T_{rs} также можно называть хронологическим интегралом семейства $T_{rs}(\zeta)$ и писать

$$T_{rt} = \int_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} T_{rs}(\zeta)^{\otimes d\mu_s(\zeta)} .$$

Заметим, что приведенная конструкция, как и представление разрешающего оператора (эволюции) мультипликативным интегралом, по-видимому, может быть истолкована в терминах функционального интегрирования по траекториям, см. об этом [7],[15]. Наконец, отметим, что интерпретация этой „суммарной" эволюции T_{rs} как некоторого хронологического среднего эволюций $T_{rs}(\zeta)$ возможна и без предельного перехода: если семейства $T_{rs}(\delta_{i,n})$ соответствуют порождающим $\Omega(\delta_{i,n})$,

$$\Omega(s,\delta_{i,n}) = \int_{\delta_{i,n}} \Omega(s,\zeta)d\mu_s(\zeta),$$

и $\tau=\{\delta_{i,n}: 1\le i\le n\}$ есть некоторое разбиение множества $\mathfrak{Z}$, то при всех n

$$T_{rs} \equiv T_{rs}(\delta_{i,n}) \otimes T_{rs}(\delta_{i,n}) \otimes \ldots \otimes T_{rs}(\delta_{i,n}).$$

Конструкция теоремы C190 следует, однако, общей схеме интеграла Римана.

Список литературы

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986. 352 с.

[2] Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М.: Наука, 1970. 320 с.

[3] Гинзбург Ю.П. О мультипликативных представлениях J-нерастягивающих оператор-функций //*Математические исследования*. 1967. Т.2, вып.27. С.52–83. Вып.3. С.20–51.

[4] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

[5] Далецкий Ю.Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными дифференциальными уравнениями // Успехи матем.наук, т.17, вып.5. 1962. с.3–115.

[6] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

[7] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983. 383 с.

[8] Данфорд Р., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т.1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.

[9] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т.2. Спектральная теория. М.: Мир, 1966. 1063 с.

[10] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[11] Милин И.А. Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука. 1971. 256 с.

[12] Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

[13] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. 384 с.

[14] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977, 357 с.

[15] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978, 395 с.

[16] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 588 с.

[17] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.:Мир, 1970. 352 с.

[18] Aronszajn N. Theory of reproducing kernels // Trans.Amer.Math.Soc. 1950. Vol.68, N 3. P.337-404.

[19] Askey R., Gasper G. Inequalities for polynomials // The Bieberbach Conjecture. Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof. Providence: AMS, 1986. P.7-32.

[20] The Bieberbach conjecture. Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof. Providence: AMS, 1986. 218 p.

[21] de Branges L., Rovnyak J. Canonical models in quantum scattering theory // Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics. New York: Wiley, 1966. P.295-391.

[22] de Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. Preprint LOMI. E-5-84. Leningrad: LOMI, 1984. 21 p.

[23] de Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. Vol.154. P.137-152.

[24] de Branges L. Powers of Riemann Mapping Functions // The Bieberbach Conjecture. Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof. Rrovidence: AMS, 1986. P.51-67.

[25] de Branges L. Underlying Concepts in the Proof of the Bieberbach Conjecture // Proccedings of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, California, USA, 1986. Berkeley, 1987. P.25-42.

[26] de Branges L. Square summable power series. Heidelberg: Springer (to appear).

[27] Dinculeanu N. Vector measures. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966. 432 p.

[28] Douglas R.G. On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol.17. P.413-415.

[29] Duren P.L. Univalent functions. Springer, 1983.

[30] Gawurin M. Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen // Fund. Math. 1936. Vol.27. S.255-268.

[31] Godement R. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes // Trans. Amer.Math. Soc. 1948. Vol.63. P.1-84.

[32] Korevaar J. Ludwig Bieberbach's conjecture and its proof by Louis de Branges // Amer. Math. Monthly. August - September, 1986. Vol.93, N 7. P.505-514.

[33] Nikol'skii N.K., Vasyunin V.I. Notes on two function models // The Bieberbach Conjecture. Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof. Providence: AMS, 1986. P.113-141.

[34] Pommerenke Chr. Univalent functions. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. 376 p.

[35] Rovnyak J. Coefficient estimates for Riemann mapping functions // J. d'Analyse Math. 1989. Vol.52. P.53-93.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР
191011, Ленинград, Фонтанка, 27

Поступило 9 марта 1990 г.