J. V. Kochetova, Prime radicals of $\mathcal{K}$-ordered algebras as Kurosh radicals,
Chebyshevskii Sb., 2013, Volume 14, Issue 3, 65–74

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.552+512.545

ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ $\mathcal{K}$-УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБР КАК РАДИКАЛ В СМЫСЛЕ КУРОША

Ю. В. Кочетова (г. Москва)

Аннотация

Рассматривается подход упорядочения алгебр, предложенный В. М. Копытовым. Изучаются свойства факторалгебры решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем по ее l-первичному радикалу. Для доказательства свойств l-первичного радикала введены понятия порядкового, строгого порядкового и решеточного гомоморфизма l-алгебр и исследованы их свойства.

Ключевые слова: решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над полем, порядковый гомоморфизм, первичный идеал, первичный радикал.

PRIME RADICALS OF $\mathcal{K}$-ORDERED ALGEBRAS AS KUROSH RADICALS

J. V. Kochetova

Abstract

The Kopytov's order for any algebras over a field is considered. Some results concerned with the properties of a factoralgebra for a lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras and its l-prime radical are obtained. Also, some results concerned with the properties of ordered homomorphisms, strictly ordered homomorphisms and lattice homomorphisms of lattice ordered algebras are presented.

Keywords: lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra over a field, ordered homomorphism, prime ideal, prime radical.

Введение

Если $L = \langle L; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над частично упорядоченным полем F, то говорят (см., например, [7]), что на алгебре L определен *$\mathcal{K}$-порядок* $\leqslant$, если:

(1) $\langle L; +; \leqslant \rangle$ является частично упорядоченной группой;

(2) из $x \leqslant y$ следует, что $\gamma x \leqslant \gamma y$ для любых $x, y \in L$ и $\gamma > 0$, $\gamma \in F$;

(3) из $x \geqslant 0$ следует, что $x + xy \geqslant 0$ и $x + yx \geqslant 0$ для всех $y \in L$.

Если при этом группа $\langle L; +; \leqslant \rangle$ решеточно упорядоченна, то алгебра L над полем F называется *решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной*, или *l-алгеброй*.

Определение такого упорядочения было введено В.М. Копытовым для алгебр Ли в 1972 году в работе [4], в которой он, в частности, отмечает, что это определение порядка можно рассматривать не только для алгебр Ли, но и для произвольных алгебр над упорядоченным полем. Данная статья продолжает изучение свойств $\mathcal{K}$-порядка для произвольных линейных алгебр над частично упорядоченным полем, начатое автором совместно с Е.Е. Ширшовой в работе [9].

Для многих алгебраических систем, в том числе и упорядоченных, исследован их первичный радикал (см. [1], [6], [7], [10]–[15], [17]), в частности, изучены свойства факторсистемы данной системы по ее первичному радикалу. Целью данной работы является характеризация l-первичного радикала решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем с точки зрения свойств ее факторалгебры по l-первичному радикалу.

В статье используется терминология, общепринятая для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [3, 16]).

При исследовании решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр используются гомоморфизмы алгебр, согласованные с порядками на данных алгебрах. Для эффективной работы с ними в первом параграфе рассмотрены понятия порядкового, строгого порядкового и решеточного гомоморфизма $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Определение 1 ([2], стр. 597). *Пусть L_1 и L_2 — частично $\mathcal{K}$-упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F. Отображение $\varphi : L_1 \to L_2$ называется порядковым гомоморфизмом (о-гомоморфизмом), если φ является и гомоморфизмом алгебр L_1 и L_2 и гомоморфизмом частично упорядоченных множеств L_1 и L_2, то есть для всех элементов $x, y \in L_1$ и для любого $\gamma \in F$ выполнены соотношения:*

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; *2)* $\varphi(\gamma x) = \gamma\varphi(x)$; *3)* $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;

4) если $x \geqslant y$, *то* $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$.

Если порядковый гомоморфизм φ частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр L_1 и L_2 является изоморфизмом этих алгебр и при этом φ^{-1} удовлетворяет условию *4)* определения 1, то φ называется *порядковым изоморфизмом* частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр L_1 и L_2.

Определение 2. *Если L_1 и L_2 — частично $\mathcal{K}$-упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем, L_1^+ и L_2^+ — конусы положительных элементов этих алгебр, $\varphi : L_1 \to L_2$ — их порядковый гомоморфизм и $\varphi(L_1^+) = L_2^+ \cap \varphi(L_1)$, то φ называется строгим порядковым гомоморфизмом.*

Определение 3 ([2], стр. 597). *Если L_1 и L_2 — l-алгебры над частично упорядоченным полем и $\varphi : L_1 \to L_2$ — такой гомоморфизм алгебр, что для любых $x, y \in L_1$ выполнены условия*

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad \text{и} \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),$$

то φ называется решеточным гомоморфизмом l-алгебры L_1 в l-алгебру L_2 или l-гомоморфизмом.

В первом параграфе доказаны основные свойства ядра, образа, прообраза при порядковом, строгом порядковом и решеточном гомоморфизмах. В этом параграфе показано, что l-гомоморфизм решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр является строгим порядковым гомоморфизмом:

Предложение 1. *Всякий решеточный гомоморфизм l-алгебр над частично упорядоченным полем является строгим порядковым гомоморфизмом.*

Также в первом параграфе доказана вторая теорема об изоморфизмах для решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Теорема 1 (вторая теорема об изоморфизмах). *Если L и L_1 — l-алгебры над частично упорядоченным полем и $\varphi : L \to L_1$ — их l-эпиморфизм, то для любого l-идеала I_1 из L_1 и его полного прообраза I из L факторалгебры L/I и L_1/I_1 l-изоморфны.*

Напомним, что *l-первичным радикалом* $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем называется пересечение всех ее *l-первичных идеалов*, то есть всех таких l-идеалов J алгебры L, для каждого из которых произведение

$$UV = \{z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i \mid x_i \in U, y_i \in V\}$$

любых двух ненулевых l-идеалов U и V факторалгебры L/J отлично от множества $\{J\}$ (см., например, [7]).

Во втором параграфе описаны свойства l-первичного радикала факторалгебры L/R решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L по ее l-первичному радикалу $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$. Основным результатом этого параграфа является утверждение о том, что l-первичный радикал l-алгебры над частично упорядоченным полем является радикалом в смысле Куроша–Амицура. Это утверждение вытекает из следующих доказанных во втором параграфе теорем и предложения.

Теорема 2. *Для l-алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l-первичного радикала $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ выполняется соотношение*

$$l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L/R) = \{0\}.$$

Теорема 3. *Если $\varphi : L \to L_1$ — решеточный гомоморфизм l-алгебр L и L_1 над частично упорядоченным полем F, то $\varphi(l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)) \subseteq l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(\varphi(L))$.*

Предложение 2. *l-первичный радикал $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ решеточно $\mathcal{K}$- упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем является наибольшим l-идеалом в L, удовлетворяющим условию $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(R) = R$.*

1. Свойства порядковых гомоморфизмов частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

В этом параграфе изучаются свойства факторалгебр решеточно $\mathcal{K}$- упорядоченных алгебр по их l-идеалу, содержатся доказательства утверждений, раскрывающих взаимосвязь между l-идеалами в решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре и ее факторалгебре по некоторому l-идеалу, изучаются свойства порядковых и решеточных гомоморфизмов l-алгебр над частично упорядоченными полями.

Вначале рассмотрим несколько свойств l-идеалов l-алгебры над частично упорядоченным полем, которые будут необходимы нам при дальнейшем изложении.

Предложение 3 ([8], лемма 21, [7], предложение 4). *Следующие условия на идеал I решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем эквивалентны:*

1) I является выпуклой подрешеткой в L;

2) для любых $x \in I$ и $y \in L$ из $|y| \leqslant |x|$ следует, что $y \in I$.

Для l-алгебр справедлива теорема о гомоморфизмах.

Теорема 4 ([8], теорема 15). *Если φ — решеточный гомоморфизм l-алгебры L_1 в l-алгебру L_2, то ядро I этого гомоморфизма является l-идеалом в L_1 и существует l-изоморфизм $\bar{\varphi}$ естественно упорядоченной факторалгебры L_1/I в L_2 такой, что $\bar{\varphi}(x + I) = \varphi(x)$ для любого $x \in L_1$.*

Доказательство предложения 1. Так как l-гомоморфизм φ l-алгебр L_1 и L_2 является l-гомоморфизмом l-групп $\langle L_1; +\rangle$ и $\langle L_2; +\rangle$, который, в свою очередь, является строгим порядковым гомоморфизмом этих групп (см., например, [3], стр. 33), то φ — порядковый гомоморфизм l-алгебр L_1 и L_2.

Для любого $x \in L_1^+$ выполняется соотношение $x = x \vee 0$, из которого по определению 3 следует $\varphi(x) = \varphi(x) \vee \varphi(0) = \varphi(x) \vee 0$. Таким образом, $\varphi(x) \in L_2^+$, и значит, $\varphi(L_1^+) \subseteq L_2^+$. Отсюда, учитывая $\varphi(L_1^+) \subseteq \varphi(L_1)$, имеем

$$\varphi(L_1^+) \subseteq L_2^+ \cap \varphi(L_1).$$

Если $y \in L_2^+ \cap \varphi(L_1)$, то $y = \varphi(x)$ для некоторого $x \in L_1$ и $y = y \vee 0$, откуда по определению l-гомоморфизма получаем $y = \varphi(x) \vee \varphi(0) = \varphi(x \vee 0)$. Значит, $y \in \varphi(L_1^+)$, и поэтому $L_2^+ \cap \varphi(L_1) \subseteq \varphi(L_1^+)$.

Следовательно, $\varphi(L_1^+) = L_2^+ \cap \varphi(L_1)$. Применение определения 2 завершает доказательство. □

Предложение 4 ([8], теорема 25). *Для любого l-идеала T l-алгебры L над частично упорядоченным полем полный прообраз каждого l-идеала факторалгебры L/T при каноническом гомоморфизме $\varepsilon : L \to L/T$ является l-идеалом l-алгебры L.*

Предложение 5. *Если L и L_1 — решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F и $\varphi : L \to L_1$ — их решеточный гомоморфизм, то полный прообраз любого l-идеала из L_1 является l-идеалом в L.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный l-идеал I_1 в L_1 и его полный прообраз $A = \{x \in L \mid \varphi(x) \in I_1\}$. Так как $\varphi(x), \varphi(y) \in I_1$ для $x, y \in A$, то по определению 3 и определению l-идеала $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \in I_1$, $\varphi(\gamma x) = \gamma\varphi(x) \in I_1$ и $\varphi(xz) = \varphi(x)\varphi(z) \in I_1$ для любых элементов $z \in L$ и $\gamma \in F$. Поэтому $x + y, \gamma x, xz \in A$, и значит, A — идеал в L.

Пусть $|y| \leqslant |x|$ для элементов $x \in A$, $y \in L$. Применяя к φ предложение 1, а к неравенству $|x| - |y| \geqslant 0$ — определение 2, получаем $\varphi(|x| - |y|) \geqslant 0$ и $\varphi(|x| - |y|) = \varphi(|x|) - \varphi(|y|)$, то есть $\varphi(|y|) \leqslant \varphi(|x|)$. При этом, учитывая определение 3, имеем $\varphi(|y|) = \varphi(y) \vee \varphi(-y) = |\varphi(y)|$ и $\varphi(|x|) = \varphi(x) \vee \varphi(-x) = |\varphi(x)|$. Значит, $|\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)|$. Так как $\varphi(x) \in I_1$, $\varphi(y) \in L_1$ и I_1 — l-идеал в L_1, то $\varphi(y) \in I_1$ по предложению 3, поэтому $y \in A$. Остается применить предложение 3 к идеалу A. □

Доказательство теоремы 1.

Композиция $\psi = \varepsilon \circ \varphi$ канонического l-эпиморфизма $\varepsilon : L_1 \to L_1/I_1$ и l-эпиморфизма $\varphi : L \to L_1$ из условия теоремы также является l-эпиморфизмом, так как $\psi : L \to L_1/I_1$ и $\psi(L) = \varepsilon(\varphi(L)) = \varepsilon(L_1) = L_1/I_1$. Применяя к ψ теорему 4, получим, что существует l-изоморфизм между $L/Ker\,\psi$ и $Im\,\psi$, и при этом $Im\,\psi = L_1/I_1$.

Рассмотрим $Ker\,\psi = \{x \in L \mid \psi(x) = I_1\}$. Поскольку $\psi(x) = \varepsilon(\varphi(x)) = \varphi(x) + I_1$, то $Ker\,\psi = \{x \in L \mid \varphi(x) \in I_1\}$ является полным прообразом l-идеала I_1, то есть $Ker\,\psi = I$. Следовательно, l-алгебры L/I и L_1/I_1 l-изоморфны. □

Для доказательства свойств l-первичных идеалов l-алгебры L нам понадобится следующее утверждение. Его доказательство аналогично доказательствам теорем 13 и 25 из [8] для l-алгебр Ли.

Предложение 6. *Для любой l-алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l-идеалов I и A множество $\bar{A} = \{T \in L/I \mid T \cap A \neq \varnothing\}$ является l-идеалом факторалгебры L/I.*

Предложение 7. *Если L и L_1 — l-алгебры над частично упорядоченным полем F и $\varphi : L \to L_1$ — их l-изоморфизм, то для всякого l-идеала I из L множество $A_1 = \{\varphi(x) \mid x \in I\}$ является l-идеалом в L_1.*

Доказательство. Если $x_1, y_1 \in A_1$ и $z_1 \in L_1$, то $x_1 = \varphi(x)$, $y_1 = \varphi(y)$ и $z_1 = \varphi(z)$ для некоторых $x, y \in I$ и $z \in L$. Отсюда по определению 3 и определению l-идеала следует, что $x_1 + y_1 = \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in A_1$, $xz_1 = \varphi(x)\varphi(z) = \varphi(xz) \in A_1$ и $\gamma x_1 = \gamma\varphi(x) = \varphi(\gamma x) \in A_1$ для любого $\gamma \in F$. Таким образом, A_1 — идеал в L_1.

При выполнении для элементов $x_1 \in A_1$ и $z_1 \in L_1$ условия $|z_1| \leqslant |x_1|$ имеем $|\varphi(z)| \leqslant |\varphi(x)|$. Используя рассуждения из доказательства предложения 5, получаем неравенство $\varphi(|z|) \leqslant \varphi(|x|)$, применение к которому l-изоморфизма φ^{-1} дает неравенство $|z| \leqslant |x|$. Отсюда по предложению 3 следует, что $z \in I$, и поэтому $z_1 \in A_1$. Это, в свою очередь, означает, что по предложению 3 идеал A_1 является l-идеалом в L_1. □

2. Свойства l-первичных радикалов l-алгебр

Данный параграф содержит описание свойств l-первичного радикала произвольной решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры, в частности, здесь описаны свойства l-первичного радикала факторалгебры L/R l-алгебры L по ее l-первичному радикалу $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$. Для доказательства утверждений данного параграфа необходимы следующие предложения.

Предложение 8. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем, I и J — ее l-первичные l-идеалы и $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L) = R$ — ее l-первичный радикал, то для канонического гомоморфизма $\varepsilon : L \to L/R$ выполняется соотношение $\varepsilon(I \cap J) = \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$.*

Доказательство. Ясно, что $\varepsilon(I \cap J) \subseteq \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$. Докажем обратное включение. Если $x \in \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$, то существуют элементы $a \in I$ и $b \in J$ такие, что $x = \varepsilon(a)$ и $x = \varepsilon(b)$, где $\varepsilon(a) = a + R$ и $\varepsilon(b) = b + R$. Отсюда следует, что $a - b \in R$, и значит, $a - b \in I$ и $a - b \in J$ по определению l-первичного радикала. Поэтому $a, b \in (I \cap J)$ и $x \in \varepsilon(I \cap J)$, а это влечет включение $\varepsilon(I) \cap \varepsilon(J) \subseteq \varepsilon(I \cap J)$. □

Замечание 1. *Утверждение и доказательство предложения 8 может быть перенесено на любое количество l-первичных l-идеалов решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры.*

Основное свойство l-первичных идеалов l-алгебры над частично упорядоченным полем сформулировано в следующем предложении.

Предложение 9 ([7], теорема 2). *Для l-идеала P l-алгебры L над частично упорядоченным полем следующие условия эквивалентны:*

(а) P — l-первичный идеал;

(б) для любых l-идеалов I_1 и I_2 l-алгебры L из $I_1 I_2 \subseteq P$ следует хотя бы одно из соотношений $I_1 \subseteq P$, $I_2 \subseteq P$.

Опишем свойства факторалгебры L/R решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L по ее l-первичному радикалу $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$.

Предложение 10. *Для любой l-алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l-первичного радикала $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ существует взаимно однозначное соответствие между l-первичными l-идеалами из L и l-первичными l-идеалами факторалгебры L/R.*

Доказательство. Рассмотрим канонический l-эпиморфизм $\varepsilon : L \to L/R$ l-алгебры L на факторалгебру $L_1 = L/R$ и произвольный l-первичный идеал P_1 l-алгебры L_1. По предложению 4 полный прообраз P l-идеала P_1 при l-гомоморфизме ε является l-идеалом в L.

Покажем, что P — l-первичный идеал в L. Для этого возьмем l-идеалы U и V в L/P, для которых $U \neq P$ и $V \neq P$, то есть $U \supset P$ и $V \supset P$. Применяя к l-алгебрам L и L_1 теорему 1, получим, что для l-идеала P_1 из L_1 и его полного прообраза P существует l-изоморфизм φ между L/P и L_1/P_1. Значит, по предложению 7 l-идеалам U и V из L/P соответствуют l-идеалы U_1 и V_1 в L_1/P_1. Допустив, что $U_1 = P_1$, из $U_1 = \varphi(U) = P_1$ получим $U = P$, что противоречит выбору l-идеала U. Поэтому $U_1 \neq P_1$ и, аналогично, $V_1 \neq P_1$. Отсюда, в силу l-первичности идеала P_1, по условию (*б*) предложения 9 следует, что $U_1 V_1 \neq P_1$. Предположив, что $UV = P$, получим $U_1 V_1 = \varphi(UV) = \varphi(P) = P_1$, противоречие. Следовательно, $UV \neq P$. Остается применить к l-идеалу P условие (*б*) предложения 9.

Аналогично, с использованием предложений 5, 6 и 9, а также теоремы 1 можно показать, что образ P_1' любого l-первичного l-идеала P' l-алгебры L при каноническом l-гомоморфизме ε является l-первичным l-идеалом в L/R. $\square$

Следующая теорема дает описание l-первичного радикала факторалгебры решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры по ее l-первичному радикалу.

Доказательство теоремы 2.

Для l-алгебры $L_1 = L/R$ рассмотрим $R_1 = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L_1) = \bigcap\limits_{P_1 \in \mathcal{P}_1} P_1$, где $\mathcal{P}_1$ — множество всех l-первичных идеалов из L_1. По предложению 10 каждый l-первичный идеал P_1 соответствует некоторому l-первичному l-идеалу P из L, и при этом $P_1 = \varepsilon(P)$. Следовательно, $R_1 = \bigcap\limits_{P_1 = \varepsilon(P)} P_1$. Так как по предложению 10 множества l-первичных идеалов в l-алгебрах L и L/R связаны взаимно однозначным соответствием, то $R_1 = \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} \varepsilon(P)$, где $\mathcal{P}$ — множество всех l-первичных идеалов из L. Отсюда, используя предложение 8, получаем, что $R_1 = \varepsilon\big(\bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} P\big) = \varepsilon(R) = 0$ в L/R. Следовательно, $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L/R) = \{0\}$. $\square$

Определение 4. *l-алгебра L над частично упорядоченным полем называется l-полупервичной, если для любого l-идеала $I \neq \{0\}$ из L верно соотношение $I^2 \neq \{0\}$.*

Необходимое и достаточное условие l-полупервичности решеточно $\mathcal{K}$- упорядоченной алгебры сформулировано в следующей теореме.

Теорема 5 ([5], теорема 1). *Решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра L над частично упорядоченным полем является l-полупервичной тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L) = \{0\}$.*

Благодаря введенному понятию l-полупервичности l-алгебры и теореме 5 можно дать эквивалентную формулировку теоремы 2.

Следствие 1. *Для любой l-алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l-первичного радикала $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра L/R является l-полупервичной алгеброй.*

Доказательство. По теореме 2 имеем $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L/R) = \{0\}$, откуда по теореме 5 следует l-полупервичность l-алгебры L/R. $\square$

Доказательство теоремы 3.

Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между l-первичными идеалами из L и l-первичными идеалами из $\varphi(L)$. Если P — l-первичный l-идеал в алгебре L, то множество $\bar{P} = \{x + Ker\,\varphi \mid x \in P\}$ является по предложению 6 l-идеалом факторалгебры $L/Ker\,\varphi$. Так как по теореме 4 алгебры $L/Ker\,\varphi$ и $\varphi(L)$ l-изоморфны, то согласно предложению 7 l-идеалу $\bar{P}$ из $L/Ker\,\varphi$ соответствует l-идеал $P_1 = \{\varphi(x) \mid x + Ker\,\varphi \in \bar{P}\} = \{\varphi(x) \mid x \in P\}$ в $\varphi(L)$.

Аналогично, если P_1 — произвольный l-первичный l-идеал из $\varphi(L)$, то по предложению 5, примененному к l-эпиморфизму $\varphi : L \to \varphi(L)$, получаем, что множество $P = \{x \in L \mid \varphi(x) \in P_1\}$ — l-идеал в L.

В каждом из полученных выше случаев по теореме 1 имеем l-изоморфизм между факторалгебрами L/P и $\varphi(L)/P_1$, благодаря которому получаем, что l-идеал P является l-первичным в L тогда и только тогда, когда l-идеал P_1 является l-первичным в $\varphi(L)$.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех l-первичных идеалов из L. Тогда $\varphi(l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)) = \varphi(\bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} P) \subseteq \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} \varphi(P)$. Так как по доказанному выше $\varphi(P)$ — l-первичный идеал в $\varphi(L)$, и каждый l-первичный идеал в $\varphi(L)$ является образом некоторого l-первичного идеала из L, то $\bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} \varphi(P) = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(\varphi(L))$. Таким образом, $\varphi(l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)) \subseteq l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(\varphi(L))$. $\square$

Доказательство предложения 2.

Ясно, что $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(R) = R$. Рассмотрим такой l-идеал J в L, для которого $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(J) = J$. Тогда J является l-первичным идеалом в L и $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(J) = \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} P$, где $\mathcal{P}$ — множество всех l-первичных идеалов в J. Поэтому в J нет l-первичных идеалов, отличных от J. Отсюда получаем, что $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L) = J \cap \mathcal{P}_1$, где $\mathcal{P}_1$ — множество l-первичных идеалов T в L, таких что $T \nsubseteq J$. Значит, $J \subseteq l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$. □

Из теорем 2, 3 и предложения 2 следует, что l-первичный радикал решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем является радикалом в смысле Куроша–Амицура (см., например, [1, гл. 2, § 1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. 496 с.
2. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные алгебры Ли // Сиб. мат. журн. 1977. Т. XVIII, № 3. С. 595—607.
3. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 295—325.
5. Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решеточно упорядоченные алгебры Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 137—143.
6. Кочетова Ю. В. Первичный радикал решеточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 191—192.
7. Кочетова Ю. В. О l-первичном радикале решеточно упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2011-2012. Т. 17, № 5. С. 55—68.
8. Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: сборник статей, посвященный памяти Н. Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. С. 131—142.
9. Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, № 1. С. 53—63.
10. Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 13—26.
11. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
12. Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно упорядоченных групп // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика. 1990. № 2. С. 84—86.

13. Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 178—184.

14. Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 193—199.

15. Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. 130 с.

16. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

17. Щукин К. К. RI-разрешимый радикал группы // Мат. сб. 1960. Т. 52, № 4. С. 1021—1031.

Московский педагогический государственный университет
Поступило 13.08.2013