Е. И. Пантелеева, К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях, *Матем. заметки*, 1988, том 44, выпуск 4, 494–505

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

К ВОПРОСУ О ПРОБЛЕМЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ДИРИХЛЕ В ЧИСЛОВЫХ ПОЛЯХ

Е. И. Пантелеева

Пусть $\tau_k(n)$ — число представлений n в виде произведения k натуральных сомножителей. Рассмотрим функцию

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n).$$

Вопрос о поведении $D_k(x)$ впервые был поставлен Л. Дирихле в 1849 г. Элементарные соображения позволяют получить формулу вида:

$$D_k(x) = xP_k(\log x) + O(x^{\alpha_k+\varepsilon}), \tag{1}$$

где P_k — многочлен $k-1$-й степени, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое фиксированное действительное число, $\alpha_k < 1$.

Проблему нахождения возможно лучшего значения α_k называют проблемой делителей Дирихле. История оценок α_k такова:

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{1}{k}, \qquad k \geqslant 2,$$

Л. Дирихле, 1849 [1],

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{2}{k+1}, \qquad k \geqslant 2,$$

Г. Вороной, 1903 [2] и Э. Ландау, 1912 [3],

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{3}{k+2}, \qquad k \geqslant 4,$$

Г. Харди и Д. Литтлвуд, 1922 [4].

В 1971 г. А. А. Карацуба в [5] доказал, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{c}{k^{2/3}}, \qquad k \geqslant 2. \tag{2}$$

При доказательстве была использована оценка для функции $\zeta(s)$ в критической полосе: при $|t| \geqslant 2$, $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$

$$\zeta(\sigma + it) \ll |t|^{a(1-\sigma)^{3/2}} \log |t|, \tag{3}$$

где a — абсолютная положительная константа. Именно, была получена формула, связывающая константы c из (2) и a из (3),

$$c = \frac{1}{2(2a)^{2/3}}, \qquad \text{при } k \geqslant 2. \tag{4}$$

В 1976 г. Фуджи в [6] улучшил значение константы c, показав, что

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{8} - 1)^{-1/3} a^{-2/3}, \quad \text{при } k \geqslant k_0. \tag{5}$$

Все эти оценки из-за формы остаточного члена в (1) становятся хуже тривиальных при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$, следовательно, (1) теряет смысл при $k \to \infty$, $x \to \infty$.

В 1973 г. А. А. Карацуба в [7] получил асимптотическую формулу для $D_k(x)$ с α_k вида (2) и константой c из α_k вида (4) равномерно по параметрам x и k.

В 1972 г. А. А. Карацуба в [8] по схеме [6] получил новые результаты в проблеме делителей Дирихле в числовых полях, улучшающие соответствующие результаты Э. Ландау 1912 г. [3].

В настоящей работе, следуя схеме доказательства [7], получены равномерные оценки остаточных членов в проблеме делителей Дирихле в числовых полях. Кроме того, получены численные значения констант, аналогичных константе c из выражения (2) для α_k. В частности, из результатов работы следует, что можно взять

$$c = \frac{1}{(2a)^{2/3}}, \qquad \text{при } k \geqslant 2,$$

что лучше (4) и (5) при всех $k \geqslant 2$.

Схема доказательства позволяет получить значение $a = 21$ (ранее были опубликованы результаты $a = 100$ [9], $a = 39$ [10], $a = 86$ [11], $a = 26{,}22$ [12]). Отсюда следует, что можно взять $c = 1/12$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* χ — *характер Дирихле по* $\bmod D$, $D \leqslant N/2$, $N_1 \leqslant 2N \leqslant t$, $t \geqslant t_0 > 0$, A — *абсолютная положительная константа. Тогда*

$$\left|\sum_{N<n\leqslant N_1} \chi(n)\, n^{it}\right| \leqslant AN e^{-\frac{1}{2976}\log^3 ND^{-1}/\log^2 t}.$$

Доказательство. 1. Введем величину γ соотношением $ND^{-1} = \gamma$. Введем параметр $c = 0{,}235$. Возьмем $b = [(ND^{-1})^c]$, $1 \leqslant x, y \leqslant b$.

$$\sum_{N<n\leqslant N_1} \chi(n)\, n^{it} = \sum_{l=0}^{D-1} \chi(l)\, e^{it\log D}\, S,$$

где $S = \sum_{ND^{-1}<z\leqslant N_1 D^{-1}} e^{it\log z}$, $z \in \mathbf{Q}$. Сделаем в S сдвиг интервала суммирования. Имеем:

$$S = \sum_{ND^{-1}<n\leqslant N_1 D^{-1}} e^{it\log(n+xy)} + 2\theta_1 b^2,$$

где $n = z - xy \in \mathbf{Q}$, $|\theta_1| \leqslant 1$. Отсюда

$$|S| \leqslant 2b^2 + b^{-2} \sum_{ND^{-1}<n\leqslant N_1 D^{-1}} \left|\sum_{x=1}^{b} \sum_{y=1}^{b} e^{it\log(n+xy)}\right|.$$

$$\log(n + xy) = \log n + F_r(xy) + R(n),$$

где

$$F_r(xy) = \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n}\right)^m,$$

$$R(n) = \sum_{m=r+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n}\right)^m.$$

Выберем r из неравенств

$$\frac{1}{\gamma(1-2c)} - 1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\gamma(1-2c)}. \tag{6}$$

При таком выборе r двойное преобразование Абеля дает

$$\left|\sum_{x=1}^{b} \sum_{y=1}^{b} e^{it\log(n+xy)}\right| \leqslant 4 \sum_{x=1}^{b} \left|\sum_{y=1}^{u_1} e^{itF_r(xy)}\right|,$$

где $1 \leqslant u_1 \leqslant b$. Обозначив

$$W = \sum_{x=1}^{b} \left|\sum_{y=1}^{u_1} e^{itF_r(xy)}\right|,$$

имеем

$$\sum_{N<n\leqslant N_1} \chi(n)\, n^{it} \leqslant 4Nb^{-2}W. \tag{7}$$

2. $W = \sum_{x=1}^{b} \left|\sum_{y=1}^{u_1} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \ldots + \alpha_r x^r y^r)}\right|$,

где $\alpha_m = \dfrac{(-1)^{m-1} t}{2\pi m n^m}$ $(m = 1, \ldots, r)$

Обозначим через $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ число решений в натуральных числах системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots - x_{2k} = \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + \ldots - x_{2k}^n = \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leqslant x_1, \ldots, x_{2k} \leqslant P.$$

При целом k по неравенству Гёльдера [13, с. 85]

$$W^{2k} \leqslant b^{2k-1} \sum_{x=1}^{b} \left| \sum_{y=1}^{b} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \ldots + \alpha_r x^r y^r)} \right|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant b^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^{b} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \ldots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|$$

Далее, по свойствам $J_{k,n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ [13, с. 84], неравенству Гёльдера [13, с. 85] и лемме И. М. Виноградова о тригонометрической сумме [13, с. 94] имеем

$$W^{4k^2} \leqslant b^{1k^2-2k} \left(\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \right)^{2k-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} J_{k,r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \left| \sum_{x=1}^{b} e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \ldots + \alpha_r \lambda_r x^r)} \right|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant b^{8k^2-4k} J_{k,r}(0, \ldots, 0) \cdot$$

$$\cdot \left| \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\, \mu_1, \ldots, \mu_r} J_{k,r}(\mu_1, \ldots, \mu_r) e^{2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_r \lambda_r \mu_r)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant b^{8k^2-4k} J_{k,r}^2(0, \ldots, 0) \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m| < A_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{\|\alpha_m \mu_m\|}\right).$$

Здесь

$$A_m = 2kb^m \qquad (m = 1, \ldots, r).$$

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1} t}{2\pi m n^m} = \frac{a_m}{q_m} + \frac{\theta_m}{q_m^2},$$

где $a_m = (-1)^{m-1}$, $q_m = \left[\dfrac{2\pi m n^m}{t}\right]$, $|\theta_m| \leqslant 1$. Если $m \geqslant 1/\gamma$, то $q_m > 1$ и сумму по μ_m оценим по лемме И. М. Виноградова [13, с. 94]; для остальных m сумму по μ_m оценим тривиально, именно, величиной $(2A_m)^2$. Имеем

$$\prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m| < A_m} \min\left(2A_m, \frac{1}{\|\alpha_m \mu_m\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (4k)^{2r} \left(\frac{18}{1-2c} \log t\right)^r b^{r^2+r} \Pi_1,$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{m\geqslant 1/\gamma\ A_m\leqslant q_m} q_m A_m^{-1} \prod_{m\geqslant 1/\gamma\ A_m>q_m} q_m^{-1}.$$

Из определения A_m и q_m, пользуясь формулой Эйлера — Маклорена [13, с. 10], получим

$$\Pi_1 \leqslant t^{\Delta}, \qquad \Delta = -\frac{c^2}{\gamma(1-c)(1-2c)} + \frac{\gamma(1-c)}{4}.$$

Из теоремы о среднем И. М. Виноградова [14, теорема 1]

$$J_{k,r}(0,\ldots,0) \leqslant A_1^{2k^2} b^{2r-y(k)},$$

где $y(x)$ — функция, обратная к функции

$$x(y) = y + 2r - (r+1)^2 \log\left(1 - 2\frac{y-r}{r^2-r}\right),$$

$A_1 > 0$ — абсолютная константа. Возьмем $k = r^2\omega$ и выберем ω так, чтобы $y(k) \geqslant \beta r^2/2$, $\beta = 0{,}92$. При таком выборе ω

$$J_{k,r}^2(0,\ldots,0) \leqslant A_1^{4k^2} b^{4k-\beta r^2},$$

$$W \leqslant A_2 b^2 \left(b^{1-\beta-1/r} t^{\Delta/r^2}\right)^{1/4r^2\omega^2} \leqslant A_2 b^2 t^{\Delta_1},$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\gamma c\left(1-\beta-\frac{1}{r}\right) - \frac{c^2}{\gamma r^2(1-c)(1-2c)} + \frac{\gamma(1-c)}{4r^2}}{4r^2\omega^2},$$

A_2 — абсолютная константа.

$\Delta_1 = \Delta_1(r, \gamma, \beta, c)$ является возрастающей по r функцией. Из (6) следует, что можно взять $r = \frac{1}{\gamma(1-2c)}$. Тогда

$$\Delta_1 = -\frac{\frac{c(1-2c)^2}{4}\left(\beta - \frac{2c^2-2c+1}{1-c} - \delta_1\right)}{\omega^2}\cdot\gamma^3,$$

где $\delta_1 = \gamma(1-2c) + \gamma^2\frac{(1-c)\cdot(1-2c)^2}{4}$.

Найдем ω. В теореме о среднем возьмем $y(k) = \beta r^2/2$. Тогда

$$k = x(y) = r^2\left(-\frac{\beta}{2} - \log((1-\beta)+\delta_2) - \delta_3\right),$$

где $\delta_2 = \frac{2-\beta}{r-1}$, $\delta_3 = \frac{2}{r} + \frac{2r+1}{r^2}\log((1-\beta)+\delta_2)$. Отсюда $\omega = -\frac{\beta}{2} - \log((1-\beta)+\delta_2) - \delta_3$.

Из оценок С. Б. Стечкина [15, предложение 4] модуля тригонометрической суммы следует, что утверждение теоремы 1 выполняется при $\gamma \geqslant 10^{-258}$. Значит, достаточно рассмотреть $\gamma < 10^{-258}$. Так как $r = \frac{1}{\gamma(1-2c)}$, $c = 0{,}235$, $\beta = 0{,}92$, то при $\gamma < 10^{-258}$ $\max(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \leqslant \leqslant 10^{-257}$. При проведении вычислений этими величинами можно пренебречь и пользоваться формулой

$$W \leqslant A_2 b^2 t^{\Delta_2},$$

где

$$\Delta_2 = -\frac{\frac{c(1-2c)^2}{4}\left(\beta - \frac{2c^2-2c+1}{1-c}\right)}{\left(\frac{\beta}{2} + \log(1-\beta)\right)^2} \cdot \gamma^3.$$

Отсюда при $c = 0{,}235$, $\beta = 0{,}92$

$$W \leqslant A_2 b^2 t^{-\alpha\cdot\gamma^3}, \qquad \alpha = \frac{1}{2976}. \tag{8}$$

$\gamma = \log ND^{-1}/\log t$, следовательно, из (7) и (8) получим утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* χ — *характер Дирихле по* $\mathrm{mod}\, D$, $|t| \geqslant 2$, $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, B — *абсолютная положительная константа. Тогда*

$$|L(\sigma+it,\chi)| \leqslant BD^{1-\sigma}|t|^{21(1-\sigma)^{3/2}} \max(\log D, \log^{2/3+\varepsilon}|t|).$$

Доказательство. Простейшее приближение $L(s,\chi)$ при $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 0$ [13, с. 155] дает:

$$L(s,\chi) = \sum_{n\leqslant D(|t|+1)} \frac{\chi(n)}{n^s} + O(D^{1-\sigma}), \tag{9}$$

$$\left|\sum_{n\leqslant D} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant 1 + \int_1^D \frac{u^{1-\sigma}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant 2D^{1-\sigma}\log D. \tag{10}$$

По преобразованию Абеля и теореме 1

$$\left|\sum_{D<n\leqslant D(|t|+1)} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sigma \int_D^{D(|t|+1)} \left|\sum_{D<n\leqslant u} \chi(n) n^{-it}\right| u^{-1-\sigma}\,\mathrm{d}u +$$
$$+ \left|\sum_{D<n\leqslant D(|t|+1)} \chi(n) n^{-it}\right| D^{-\sigma}(|t|+1)^{-\sigma} \leqslant$$
$$\leqslant D^{1-\sigma}\left(\int_0^{\log(|t|+1)} e^{f(v)}\,\mathrm{d}v + e^{f(\log(|t|+1))}\right),$$

где $f(v) = -\alpha \frac{v^3}{\log^2 t} + (1-\sigma) v$, $\alpha = \frac{1}{2976}$. Функция $f(v)$ достигает максимума в точке $v_0 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{3\alpha}} \log t$,

$$f(v_0) = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}} (1-\sigma)^{3/2} \log t.$$

Разобьем промежуток $[0, \log(|t|+1)]$ на промежутки длины $\log^{2/3+\varepsilon} t$ вида $[M, M+\log^{2/3+\varepsilon} t]$, $M \in [0, \log(|t|+1)]$. Если один из этих промежутков $[M_0, M_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t]$ содержит точку v_0, то

$$\int_{M_0}^{M_0+\log^{2/3+\varepsilon} t} e^{f(v)}\, dv \leqslant e^{f(v_0)} \log^{2/3+\varepsilon} t \leqslant t^{\frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3+\varepsilon} t.$$

Такая же оценка верна и для двух промежутков, прилегающих к $[M_0, M_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t]$ справа и слева (если они есть). Для всех остальных промежутков, если $v \in [M, M + \log^{2/3+\varepsilon} t]$, то $|v - v_0| \geqslant \log^{2/3+\varepsilon} t$.

Пусть $v \geqslant v_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t$ (симметричный случай рассматривается аналогично). Тогда

$$f(v) - f(v_0) = -\alpha \frac{(v^3 - v_0^3)}{\log^2 t} + (1-\sigma)(v - v_0) =$$
$$= -(v - v_0)\left(\frac{\alpha}{\log^2 t}(v^2 + v v_0) - \frac{2}{3}(1-\sigma)\right) \leqslant -\alpha \log^{2\varepsilon} t.$$

Отсюда

$$\int_M^{M+\log^{2/3+\varepsilon} t} e^{f(v)}\, dv \leqslant e^{f(v_0)} \int_M^{M+\log^{2/3+\varepsilon} t} e^{f(v)-f(v_0)}\, dv \leqslant$$
$$\leqslant e^{f(v_0)} \log^{2/3+\varepsilon} t\, e^{-\alpha \log^{2\varepsilon} t} \leqslant t^{\frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Так как число интервалов $[M, M + \log^{2/3+\varepsilon} t]$ не превосходит $\log^{1/3-\varepsilon} t$, то получаем

$$\left|\sum_{D<n\leqslant D(|t|+1)} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant B_1 t^{\frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}(1-\sigma)^{3/2}} D^{1-\sigma} \log^{2/3+\varepsilon} t. \qquad (11)$$

Взяв $\alpha = 1/2976$, из (9)—(11) получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $L_1(s, \chi_1), \ldots, L_k(s, \chi_k)$ — L-*ряды Дирихле с характерами* χ_1 *по* $\operatorname{mod} D_1, \ldots, \chi_k$ *по* $\operatorname{mod} D_k$, *и при* $\operatorname{Re} s > 1$ *пусть*

$$L_1(s, \chi_1) \ldots L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Тогда

$$\sum_{n\leqslant x} c_n = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{12}k^{-2/3}}(C\log x)^k,$$

где m *— число главных характеров среди* $\chi_1, \ldots, \chi_k$, P_m *— многочлен* m *— 1-й степени,* $P_0 = 0$, $\max(D_1, \ldots \ldots, D_k) \leqslant \log^2 x$, $k \leqslant \log x$, $|\theta| \leqslant 1$, C *— абсолютная положительная постоянная.*

Доказательство. Используем формулу [7, лемма 1]: при $x \geqslant 1$, $T \geqslant 2$

$$\int_1^x A(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)\,x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds + R(x), \qquad (12)$$

где $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}{}' \frac{a_n}{n^s}$ — абсолютно сходящийся при $\operatorname{Re} s > 1$ ряд, $A(\zeta) = \sum_{n\leqslant\zeta} a_n$, при $b > 1$

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|A(\zeta)|}{\zeta^{b+1}}\,d\zeta,$$

$$|R(x)| \leqslant C_1\Big(B(b)\frac{x^{b+1}}{T} + 2^b\Big(\frac{x\log x}{T} + \log T\Big)\max_{x/2\leqslant\zeta\leqslant 3x/2}|A(\zeta)|\Big).$$

Возьмем $F(s) = L_1(s,\chi_1)\ldots L_k(s,\chi_k)$, $a_n = c_n$, $A(\zeta) = \sum_{n\leqslant\zeta} c_n$, $b = 1 + 1/\log x$, $e^2 \leqslant T \leqslant x$. По лемме Марджанишвили [16]

$$0 \leqslant |A(\zeta)| \leqslant \sum_{n\leqslant\zeta}|c_n| = \sum_{n\leqslant\zeta}\tau_k(n) \leqslant \zeta\frac{(\log\zeta + k - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Поэтому

$$B(b) = \int_1^{+\infty}\frac{|A(\zeta)|}{\zeta^{b+1}}\,d\zeta \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{(\log\zeta + k - 1)^{k-1}}{(k-1)!\,\zeta^b}\,d\zeta \leqslant 2(3\log x)^k.$$

Кроме того,

$$\max_{x/2\leqslant\zeta\leqslant 3x/2}|A(\zeta)| \leqslant 4x(3\log x)^{k-1},$$

следовательно,

$$|R(x)| \leqslant C_1\Big(\frac{x^2}{T}(3\log x)^k + x(3\log x)^{k-1}\log T\Big) \leqslant C_2\frac{x^2}{T}(3\log x)^k.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\int_1^x A(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{L_1(s,\chi_1)\dots L_k(s,\chi_k)\,x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds + \theta_1\frac{x^2}{T}(C_3\log x)^k. \quad (13)$$

Вычислим последний интеграл. Возьмем $\alpha_1 = 1 - (2ak)^{-2/3}$ $(a = 21)$, $T = x^{1-\alpha_1}$, и рассмотрим интеграл J по контуру Γ с вершинами $b + iT$, $\alpha_1 + iT$, $\alpha_1 - iT$, $b - iT$:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{L_1(s,\chi_1)\dots L_k(s,\chi_k)}{s(s+1)}\,x^{s+1}\,ds.$$

Если среди характеров $\chi_1, \dots, \chi_k$ нет главных, то подынтегральная функция не имеет особенностей внутри Γ, если среди характеров $\chi_1, \dots, \chi_k$ есть главные, то в точке $s = 1$ имеется полюс, вообще, в обозначениях теоремы, $J = x^2\tilde{P}_m(\log x)$.

Оценим интегралы J_1, J_2 и J_3 по левой, верхней и нижней сторонам контура Γ.

$$|J_1| \leqslant \int_{-T}^{T}\left|\frac{L_1(\alpha_1+it,\chi_1)\dots L_k(\alpha_1+it,\chi_k)}{(\alpha_1+it)(\alpha_1+1+it)}\right| x^{\alpha_1+1}\,dt.$$

Известная формула для $L(s, \chi)$ [17, с. 133] дает:

$$\int_{-11}^{11}\left|\frac{L_1(\alpha_1+it,\chi_1)\dots L_k(\alpha_1+it,\chi_k)}{(\alpha_1+it)(\alpha_1+1+it)}\right| x^{\alpha_1+1}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 22x^{\alpha_1+1}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant k\ |t|\leqslant 11}|L_i(\alpha_1+it,\chi_i)|\right)^k \leqslant$$
$$\leqslant 22x^{\alpha_1+1}(C_4k^{2/3} + D^{1/2})^k \leqslant x^{\alpha_1+1}(C_5\log x)^k.$$

Пусть $11 \leqslant x \leqslant T$. Тогда из теоремы 2

$$\int_{T_1}^{2T_1}\left|\frac{L_1(\alpha_1+it,\chi_1)\dots L_k(\alpha_1+it,\chi_k)}{(\alpha_1+it)(\alpha_1+1+it)}\right| x^{\alpha_1+1}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x^{\alpha_1+1}D^{k(1-\alpha_1)}T_1^{ka(1-\alpha_1)^{3/2}}}{T_1}(C_6\log^{2/3+\varepsilon}$$

Так как $ka(1-\alpha_1)^{3/2} = \frac{1}{2}$, $k(1-\alpha_1) = k^{1/3}(2a)^{-2/3}$, $D^{k(1-\alpha_1)} \leqslant (\log^{1/3-\varepsilon}x)^k$, то правая часть последнего неравенства не превосходит $x^{\alpha_1+1}(C_7\log x)^k$, следовательно,

$$|J_1| \leqslant x^{\alpha_1+1}(C_8\log x)^k.$$

Заметим далее, что модули интегралов J_2 и J_3 по верхней и нижней сторонам контура Г равны.

$$|J_2|=|J_3|\leqslant\int_{\alpha_1}^{b}\frac{|L_1(\sigma+iT,\chi_1)\ldots L_k(\sigma+iT,\chi_k)|}{T^2}x^{\sigma+1}\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{D^{k(1-\alpha_1)}T^{ka(1-\alpha_1)^{3/2}}(C_9\log^{2/3+\varepsilon}x)^k x^2}{T^2}\leqslant$$

$$\leqslant x^2T^{-3/2}(C_{10}\log x)^k\leqslant x^{\alpha_1+1}(C_{10}\log x)^k.$$

Из оценок $J_1 - J_3$, равенства (13) и значения J получаем

$$\int_1^x A(\zeta)\,d\zeta=x^2\tilde{P}_m(\log x)+\theta_2x^{\alpha_1+1}(C_{11}\log x)^k.$$

Рассмотрим функцию

$$A_1(\zeta)=\frac{1}{2\Delta}\int_0^{2\Delta}A(\zeta+u)\,du,\ \ \Delta=\frac{1}{x}$$

$$A_1(\zeta)=A(\zeta)+\frac{1}{2\Delta}\int_0^{2\Delta}([\zeta+u]-[\zeta])\,c_{[\zeta+u]}\,du=$$

$$=A(\zeta)+O(|c_{[\zeta+1]}|)=A(\zeta)+O(x^{\varepsilon});$$

$$\int_1^x A_1(\zeta)\,d\zeta=\int_1^x A(\zeta)\,d\zeta+O\left(|c_{[\zeta+1]}|\int_1^x([\zeta+2\Delta]-[\zeta])\,d\zeta\right)=$$

$$=\int_1^x A(\zeta)\,d\zeta+O(x^{1+\varepsilon}\Delta)=\int_1^x A(\zeta)\,d\zeta+O(x^{\varepsilon}).$$

Отсюда

$$\int_1^x A_1(\zeta)\,d\zeta=x^2\tilde{P}_m(\log x)+\theta_3x^{\alpha_1+1}(C_{12}\log x)^k. \qquad (14)$$

Так как $A_1(\zeta)$ — непрерывная функция, то обе части (14) можно дифференцировать по x:

$$A_1(x)=xP_m(\log x)+\theta_4x^{\alpha_1}(C_{13}\log x)^k.$$

$\alpha_1=1-(2ak)^{-2/3}$, что при $a=21$ дает $1-\frac{1}{12}k^{-2/3}$. Отсюда и из формулы, связывающей $A_1(\zeta)$ и $A(\zeta)$, получим

$$A(x)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{12}k^{-2/3}}(C\log x)^k.$$

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть D — бесквадратное число, $|D|\leqslant\log^2 x$, $K=R(\sqrt{D})$ — квадратичное поле, $\mathfrak{a}$ — целые дивизоры поля K. Тогда для любого $k\geqslant 1$*

$$\sum_{N(\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_k)\leqslant x}1=xP_k(\log x)+\theta x^{1-\frac{10}{133}k^{-2/3}}(C\log x)^{2k},$$

где P_k — многочлен k —1-й степени, $|\theta| \leqslant 1$, C — абсолютная положительная константа.

Доказательство. Дзета-функция Дедекинда квадратичного поля K имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi)$$

где χ — неглавный характер по mod $|D|$. В формуле (12) возьмем $F(s) = \zeta_K^k(s)$. Тогда

$$A(\zeta) = \sum\nolimits_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) \leqslant \zeta} 1.$$

Из вида $\zeta_K(s)$ следует, что мы находимся в условиях теоремы 3, если вместо k взять $2k$ и в качестве m взять k. Показатель в остаточном члене будет иметь вид

$$1 - \frac{1}{12}(2k)^{-2/3} \leqslant 1 - \frac{10}{133} k^{-2/3}.$$

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $m > 1$ — фиксированное натуральное число, $h = \varphi(m)$, $\zeta^m = 1$, $K = R(\zeta)$ — m-круговое поле, $\mathfrak{a}$ — целые дивизоры поля K. Тогда для любого $k \geqslant 1$*

$$\sum\nolimits_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) \leqslant x} 1 = x P_k(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{12}(hk)^{-2/3}} (C \log x)^{hk}.$$

Доказательство. Дзета-функция Дедекинда кругового поля K имеет вид

$$\zeta_K(s) = L_1(s, \chi_1) \ldots L_h(s, \chi_h) \prod\nolimits_{p|m} \frac{1}{(1 - p^{1/fs})^q},$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — все $h = \varphi(m)$ характеров по mod m, а конечное произведение, в котором f и q означают зависящие от m и p положительные целые числа, представляет собой при $\sigma > 0$ абсолютно сходящийся ряд.

В формуле (12) возьмем $F(s) = \zeta_K^k(s)$. Из вида $\zeta_K(s)$ следует, что мы находимся в условиях теоремы 3, если вместо k взять hk и в качестве m взять k. Показатель в остаточном члене будет иметь вид

$$1 - \frac{1}{12}(hk)^{-2/3}.$$

Теорема 5 доказана.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
19.02.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] D i r i c h l e t L. Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie // Abh. Akad. Wiss. Berlin. 1849. Werke 2. S. 49—66.

[2] В о р о н о й Г. Ф. Об одной задаче из теории асимптотических функций // Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 2 / Киев: Изд-во АН УССР, 1952 г. С. 5—50.

[3] L a n d a y E. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl. 1912. Hft. 6. S. 687—771.

[4] H a r d y G. H., L i t t l e w o o d J. E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisors problems of Dirichlet and Piltz // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1922. V. 21. P. 39—74.

[5] К а р а ц у б а А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 241—255.

[6] F u j i i A. On the problem of divisors // Acta Arith. 1976. V. 31. P. 355—360.

[7] К а р а ц у б а А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1900. Т. 36. № 3. С. 475—483.

[8] К а р а ц у б а А. А. Проблема делителей Дирихле в числовых полях // ДАН СССР. 1972 Т. 204. № 3. С. 540—541.

[9] R i c h e r t H. E. Zur Abschatzung der Riemannschen Zetafunktion in der Nahl der Vertikalen $\sigma = 1$ // Math. Ann. 1967. Bd 169. № 1. S. 97—101.

[10] T u r a n P. On some recent results in the analytical theory of numbers // Proc. Symp. Pure Math. XX. 1969./ N. Y.: AMS, Institute of Number theory, 1971. P. 359—347.

[11] R i b e n b o i m P. Prime numbers records. A New Chapter for the Guinness Boock. Kingston, Ontario Canada: Queen's University, 1985.

[12] П а н т е л е е в а Е. И. Применение ЭВМ в решении одной задачи аналитической теории чисел // Научные труды. Вып. 195 / М.: МЛТИ, 1987. С. 112—114.

[13] К а р а ц у б а А. А. Основы теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1985.

[14] Т ы р и н а О. В. Новая оценка тригонометрического интеграла И. В. Виноградова // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1987. Т. 51. № 2. С. 363—378.

[15] С т е ч к и н С. Б. О средних значениях модуля тригонометрической суммы // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 134. С. 283—309.

[16] М а р д ж а н и ш в и л и К. К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391—393.

[17] Т и т ч м а р ш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.